АСТРОНОМИЯ

УДК 521.14
MSC 70F15

Об одном фактор-пространстве кеплеровых орбит*

К. В. Холшевников[1,2], *А. С. Щепалова*[1], *М. С. Джазмати*[3]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Институт прикладной астрономии РАН,
Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10
[3] Кассим университет, Саудовская Аравия, г. Бураида, P.O. Box:6644-Buraidah:51452

Для цитирования: *Холшевников К. В., Щепалова А. С., Джазмати М. С.* Об одном фактор-пространстве кеплеровых орбит // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 165–174.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.116

Для оценки близости орбит небесных тел (как правило, комет, астероидов и метеороидных комплексов) в последние 15 лет предложено несколько метрик, превращающих различные пространства кеплеровых орбит в метрические. Важную роль играют фактор-пространства, позволяющие не принимать во внимание те орбитальные элементы, которые меняются вековым образом под влиянием различных возмущений. Ранее исследовано три таких пространства. В одном из них игнорируются узлы, в другом — аргументы перицентров, в третьем — и то, и другое. Здесь мы вводим еще одно, четвертое фактор-пространство, в котором отождествляются орбиты с произвольными долготами узлов и аргументами перицентров при условии, что их сумма (долгота перицентра) фиксирована. Определена функция ϱ_6, играющая роль расстояния между указанными классами орбит и удовлетворяющая первым двум аксиомам метрического пространства. Построен алгоритм ее вычисления. В общем случае наиболее сложная часть алгоритма состоит в решении тригонометрического уравнения третьей степени. Вопрос о справедливости аксиомы треугольника для ϱ_6, хотя бы в ослабленном варианте, будет исследован позднее.

Ключевые слова: кеплерова орбита, метрика, фактор-пространство метрического пространства, расстояние между орбитами.

*Работа выполнена с использованием оборудования Вычислительного центра Научного парка СПбГУ при финансовой поддержке РНФ (грант 18-12-00050).

1. Введение. Для оценки схожести кеплеровых орбит $\mathcal{E}_k$ как точек в некотором 5-мерном пространстве (положение на орбите мы опускаем, но направление движения по орбите учитываем) в этом веке предложено несколько метрик [1–8], сменивших используемые ранее критерии [9–16], оказавшиеся квазиметриками [17]. Напомним, что метрикой в некотором пространстве $\mathbb{X}$ называется функция на $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$, удовлетворяющая трем аксиомам [18–20]:

1) $\varrho(x_1,x_2)\geqslant 0$, причем $\varrho(x_1,x_2)=0$ тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$;

2) $\varrho(x_1,x_2)=\varrho(x_2,x_1)$;

3) $\varrho(x_1,x_3)\leqslant\varrho(x_1,x_2)+\varrho(x_2,x_3)$ (аксиома треугольника).

Квазиметрикой называется функция на $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$, удовлетворяющая первым двум аксиомам и ослабленной третьей аксиоме. Именно,

3a) $\varrho(x_1,x_3)\leqslant M\left[\varrho(x_1,x_2)+\varrho(x_2,x_3)\right]$ (ослабленная аксиома треугольника)

при некоторой постоянной M. Квазиметрика при $M=1$ является метрикой.

2. Метрика ϱ_2. Удобной метрикой в 5-мерном пространстве $\mathbb{H}$ всех непрямолинейных кеплеровских орбит служит описанная в [4, 5] функция[1] $\varrho_2(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$:

$$\varrho_2(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)=\sqrt{(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)^2+(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u}_k=\mathbf{u}(\mathcal{E}_k)$, $\mathbf{v}_k=\mathbf{v}(\mathcal{E}_k)$, и для каждой орбиты $\mathbf{u},\mathbf{v}$ — взаимно ортогональные векторы, пропорциональные вектору момента импульса и вектору Лапласа — Рунге — Ленца, соответственно;

$$|\mathbf{u}|=\sqrt{p},\qquad |\mathbf{v}|=e\sqrt{p},\qquad \mathbf{uv}=0. \tag{2}$$

В пространстве $\mathbb{H}$ фокальный параметр p положителен.

Замечание. Пространство $\mathbb{H}^\star$ всех кеплеровских орбит (включая прямолинейные) также метризуемо [2]. Однако метрика там существенно сложнее. Почти-прямолинейные орбиты чрезвычайно редки, и даже когда встречаются, то не нуждаются в сравнении с соседними орбитами (см., например, исследования кометы Шумейкеров — Леви 9 [21]). Поэтому мы ограничились пространством $\mathbb{H}$.

Приведем выражения векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ через кеплеровы элементы p,e,i,g,Ω (фокальный параметр, эксцентриситет, наклон, аргумент перицентра и долгота восходящего узла):

$$\begin{aligned}
u_x&=\sqrt{p}\sin i\sin\Omega, & v_x&=e\sqrt{p}(\cos g\cos\Omega-\cos i\sin g\sin\Omega),\\
u_y&=-\sqrt{p}\sin i\cos\Omega, & v_y&=e\sqrt{p}(\cos g\sin\Omega+\cos i\sin g\cos\Omega),\\
u_z&=\sqrt{p}\cos i, & v_z&=e\sqrt{p}\sin i\sin g.
\end{aligned} \tag{3}$$

Функция (1) определена и не имеет особенностей во всем пространстве $\mathbb{H}$, включающем все эллиптические, параболические и гиперболические орбиты. Она превращает $\mathbb{H}$ в пятимерное алгебраическое, открытое, локально-компактное, линейно-связное пространство без особых точек. Физическая размерность ϱ_2 — корень из единицы длины. Например,

$$\begin{aligned}(\text{а.е.})^{1/2}&=153.149\,264\,8R_\oplus^{1/2}=386.778\,891\,7\,(\text{Мм})^{1/2}=\\
&=12\,231.022\,49\,(\text{км})^{1/2}=386\,778.891\,7\,(\text{м})^{1/2},\end{aligned} \tag{4}$$

где $R_\oplus=6\,378\,164\,222$ мм — экваториальный радиус общего земного эллипсоида [22].

[1] Мы сохраняем нумерацию метрик, принятую в [5].

Приведем формулу для вычисления ϱ_2 по известным элементам:

$$\varrho_2^2 = (1+e_1^2)p_1 + (1+e_2^2)p_2 - 2\zeta_2\sqrt{p_1p_2}\,, \qquad \zeta_2 = \cos I + e_1e_2\cos P. \tag{5}$$

Здесь I, P — углы между векторами $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ соответственно. Вот явные выражения их косинусов:

$$\cos I = c_1c_2 + s_1s_2\cos\Delta, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\cos P = s_1s_2\sin g_1\sin g_2 + (\cos g_1\cos g_2 + c_1c_2\sin g_1\sin g_2)\cos\Delta + \\ + (c_2\cos g_1\sin g_2 - c_1\sin g_1\cos g_2)\sin\Delta,\end{aligned} \tag{7}$$

где $c = \cos i$, $s = \sin i$, $\Delta = \Omega_1 - \Omega_2$.

3. Фактор-пространства. Как правило, узлы и перицентры орбит имеют большие вековые возмущения, тогда как a, q, p, e, i меняются незначительно. Поэтому полезно иногда игнорировать узлы, перицентры, или и то, и другое. Это достигается введением двух 4-мерных и одного 3-мерного фактор-пространств:

$\mathbb{H}_3$, элементом которого является класс орбит с фиксированными p, e, i, g и всевозможными значениями Ω;

$\mathbb{H}_4$, элементом которого является класс орбит с фиксированными p, e, i, Ω и всевозможными значениями g;

$\mathbb{H}_5$, элементом которого является класс орбит с фиксированными p, e, i, и всевозможными значениями g, Ω.

Метрики $\varrho_3, \varrho_4, \varrho_5$ в этих пространствах введены в [4, 5]. Справедливость трех аксиом метрического пространства для них доказана в [8].

Для полноты картины следует ввести еще одно фактор-пространство $\mathbb{H}_6$, отождествляя орбиты с одинаковыми p, e, i, $\varpi := \Omega + g$. Фиксируется долгота перицентра ϖ, но не Ω, g по отдельности.

Следуя построениям [4, 5], введем в $\mathbb{H}_6$ играющую роль расстояния функцию

$$\varrho_6 = \min \varrho_2\,, \tag{8}$$

где наименьшее значение ищется по всем углам Ω_k, g_k при условиях $\Omega_k + g_k = \varpi_k$, где ϖ_k фиксированы.

Аналогичную задачу на минимум для $\varrho_3, \varrho_4, \varrho_5$ удалось решить [4, 5], получив для них явные выражения через элементарные функции. Задача для ϱ_6 оказалась сложнее. Ниже она сведена к решению тригонометрического уравнения третьей степени.

Согласно (5) достаточно найти наибольшее значение ζ_2 при указанных условиях:

$$\varrho_6^2 = (1+e_1^2)p_1 + (1+e_2^2)p_2 - 2\zeta_6\sqrt{p_1p_2}\,, \qquad \zeta_6 = \max\zeta_2\,. \tag{9}$$

Представим ζ_2 в виде многочлена Фурье, используя (6), (7):

$$\begin{aligned}\zeta_2 = A_0 + A_1\cos\Delta + A_2\cos(g_1 - g_2) - A_2\cos(g_1+g_2) + B_1\cos(\Delta - g_1 - g_2) + \\ + B_2\cos(\Delta - g_1 + g_2) + B_3\cos(\Delta + g_1 - g_2) + B_4\cos(\Delta + g_1 + g_2),\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$A_0 = c_1c_2\,, \qquad A_1 = s_1s_2\,, \qquad 2A_2 = e_1e_2s_1s_2\,,$$

$$4B_1 = e_1e_2(1-c_1)(1+c_2),$$
$$4B_2 = e_1e_2(1-c_1)(1-c_2),$$
$$4B_3 = e_1e_2(1+c_1)(1+c_2),$$
$$4B_4 = e_1e_2(1+c_1)(1-c_2).$$

Подстановка $g_1 + g_2 = x$, $g_1 - g_2 = y$, $\Delta = \varpi - y$ переводит (10) в

$$\zeta_2(x,y) = A_0 + A_1\cos(\varpi - y) + A_2\cos y - A_2\cos x + \\ + B_1\cos(\varpi - x - y) + B_2\cos(\varpi - 2y) + B_3\cos\varpi + B_4\cos(\varpi + x - y). \quad (11)$$

Здесь $\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$.

Наша задача — найти наибольшее значение $\zeta_2(x,y)$ по всем углам x, y при фиксированных ϖ и коэффициентах A_k, B_k.

3.1. Одна из орбит — круговая. Если хоть один из эксцентриситетов равен нулю, то (11) вырождается в

$$\zeta_2 = c_1c_2 + s_1s_2\cos(\varpi - y). \quad (12)$$

Наибольшее значение

$$\zeta_6 = c_1c_2 + s_1s_2 = \cos(i_1 - i_2) \quad (13)$$

принимается при $y = \varpi$ и произвольном x.

3.2. Одна из орбит лежит в основной плоскости. Пусть для определенности $s_2 = 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $i_2 = 0$, $s_2 = 0$, $c_2 = 1$. Тогда

$$\zeta_2 = c_1 + \frac{1}{2}(1-c_1)e_1e_2\cos(\varpi - x - y) + \frac{1}{2}(1+c_1)e_1e_2\cos\varpi. \quad (14)$$

Наибольшее значение

$$\zeta_6 = c_1 + \frac{1}{2}(1-c_1)e_1e_2 + \frac{1}{2}(1+c_1)e_1e_2\cos\varpi \quad (15)$$

принимается при $x + y = \varpi$.

Случай 2. $i_2 = \pi$, $s_2 = 0$, $c_2 = -1$. Тогда

$$\zeta_2 = -c_1 + \frac{1}{2}(1-c_1)e_1e_2\cos(\varpi - 2y) + \frac{1}{2}(1+c_1)e_1e_2\cos(\varpi + x - y). \quad (16)$$

Наибольшее значение

$$\zeta_6 = -c_1 + e_1e_2 \quad (17)$$

принимается при $x = -\varpi/2$, $y = \varpi/2$.

3.3. Обе орбиты — некруговые и ни одна из них не лежит в основной плоскости. Вычислим производные

$$\frac{\partial\zeta_2}{\partial x} = A_2\sin x + B_1\sin(\varpi - x - y) - B_4\sin(\varpi + x - y), \quad (18)$$

$$\frac{\partial\zeta_2}{\partial y} = A_1\sin(\varpi - y) - A_2\sin y + B_1\sin(\varpi - x - y) + 2B_2\sin(\varpi - 2y) + B_4\sin(\varpi + x - y). \quad (19)$$

Приравняем правую часть (18) к нулю. После элементарных преобразований получим

$$[A_2 - (B_4 + B_1)\cos(\varpi - y)]\sin x - [(B_4 - B_1)\sin(\varpi - y)]\cos x = 0.$$

Подставляя выражения коэффициентов через элементы орбит и сокращая на $e_1 e_2$, перепишем последнее уравнение в виде

$$[s_1 s_2 - (1 - c_1 c_2)\cos(y - \varpi)]\sin x = [(c_2 - c_1)\sin(y - \varpi)]\cos x. \tag{20}$$

Нам повезло: сумма квадратов коэффициентов при синусе и косинусе x в (20) оказалась полным квадратом D^2, где

$$D = (1 - c_1 c_2) - s_1 s_2 \cos(y - \varpi). \tag{21}$$

Очевидно, $D \geqslant 0$. Оставляя пока в стороне вырожденный случай $D = 0$, считаем $D > 0$. Тогда не только тангенс

$$\operatorname{tg} x = \frac{(c_2 - c_1)\sin(y - \varpi)}{s_1 s_2 - (1 - c_1 c_2)\cos(y - \varpi)}\,, \tag{22}$$

но и косинус и синус — дробно-линейные функции от $\cos(y - \varpi)$, $\sin(y - \varpi)$:

$$\cos x = \mu\frac{s_1 s_2 - (1 - c_1 c_2)\cos(y - \varpi)}{D}\,, \quad \sin x = \mu\frac{(c_2 - c_1)\sin(y - \varpi)}{D}\,, \quad \mu = \pm 1. \tag{23}$$

Запишем равную нулю правую часть (19) в виде

$$\begin{aligned} &- A_2 \sin y - A_1 \sin(y - \varpi) - 2B_2 \sin(2y - \varpi) - \\ &\qquad - (B_4 + B_1)\sin(y - \varpi)\cos x + (B_4 - B_1)\cos(y - \varpi)\sin x = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Умножая на $4D$ и используя (23), представим (24) в форме

$$\begin{aligned} &4[-(1 - c_1 c_2) + s_1 s_2 \cos(y - \varpi)][A_1 \sin(y - \varpi) + A_2 \sin y + 2B_2 \sin(2y - \varpi)] - \\ &\qquad - 4\mu(B_4 + B_1)\sin(y - \varpi)[s_1 s_2 - (1 - c_1 c_2)\cos(y - \varpi)] + \\ &\qquad\qquad + 4\mu(B_4 - B_1)\cos(y - \varpi)(c_2 - c_1)\sin(y - \varpi) = 0, \end{aligned}$$

что равносильно

$$a_0 + a_1 \sin y + a_2 \sin(y - \varpi) + a_3 \sin(2y - \varpi) + a_4 \sin(2y - 2\varpi) + a_5 \sin(3y - 2\varpi) = 0. \tag{25}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 s_1 s_2 A_2 \sin\varpi, \\ a_1 &= -4(1 - c_1 c_2)A_2 + 4 s_1 s_2 B_2, \\ a_2 &= -4(1 - c_1 c_2)A_1 - 4\mu s_1 s_2 (B_4 + B_1), \\ a_3 &= -8(1 - c_1 c_2)B_2 + 2 s_1 s_2 A_2, \\ a_4 &= 2 s_1 s_2 A_1 + 2\mu[(1 - c_1 c_2)(B_4 + B_1) + 2\mu(c_2 - c_1)(B_4 - B_1)], \\ a_5 &= 4 s_1 s_2 B_2. \end{aligned}$$

Подставляя значения A_k, B_k, получим

$$\begin{aligned}
a_0 =& e_1 e_2 s_1^2 s_2^2 \sin\varpi,\\
a_1 =& -e_1 e_2 s_1 s_2 (1 + c_1 + c_2 - 3c_1 c_2),\\
a_2 =& -2 s_1 s_2 (1 - c_1 c_2)(2 + \mu e_1 e_2),\\
a_3 =& -e_1 e_2 (1 - c_1)(1 - c_2)(1 - c_1 - c_2 - 3c_1 c_2),\\
a_4 =& s_1^2 s_2^2 (2 + \mu e_1 e_2),\\
a_5 =& e_1 e_2 s_1 s_2 (1 - c_1)(1 - c_2).
\end{aligned}$$

Левую часть (25) можно записать в стандартной форме многочлена Фурье третьего порядка

$$b_0 + b_1 \cos y + b_2 \sin y + b_3 \cos 2y + b_4 \sin 2y + b_5 \cos 3y + b_6 \sin 3y = 0. \tag{26}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
b_0 =& a_0,\\
b_1 =& -a_2 \sin\varpi,\\
b_2 =& a_1 + a_2 \cos\varpi,\\
b_3 =& -a_3 \sin\varpi - a_4 \sin 2\varpi,\\
b_4 =& a_3 \cos\varpi + a_4 \cos 2\varpi,\\
b_5 =& -a_5 \sin 2\varpi,\\
b_6 =& a_5 \cos 2\varpi
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
b_0 =& e_1 e_2 s_1^2 s_2^2 \sin\varpi,\\
b_1 =& 2 s_1 s_2 (1 - c_1 c_2)(2 + \mu e_1 e_2) \sin\varpi,\\
b_2 =& -s_1 s_2 [e_1 e_2 (1 + c_1 + c_2 - 3c_1 c_2) + 2(1 - c_1 c_2)(2 + \mu e_1 e_2) \cos\varpi],\\
b_3 =& (1 - c_1)(1 - c_2)[e_1 e_2 (1 - c_1 - c_2 - 3c_1 c_2) \sin\varpi - (1 + c_1)(1 + c_2)(2 + \mu e_1 e_2) \sin 2\varpi],\\
b_4 =& (1 - c_1)(1 - c_2)[-e_1 e_2 (1 - c_1 - c_2 - 3c_1 c_2) \cos\varpi + (1 + c_1)(1 + c_2)(2 + \mu e_1 e_2) \cos 2\varpi],\\
b_5 =& -e_1 e_2 s_1 s_2 (1 - c_1)(1 - c_2) \sin 2\varpi,\\
b_6 =& e_1 e_2 s_1 s_2 (1 - c_1)(1 - c_2) \cos 2\varpi.
\end{aligned}$$

Случай $D = 0$. Пусть $e_1 e_2 s_1 s_2 \neq 0$, $D = 0$. Последнее соотношение равносильно $\cos(y - \varpi) = 1$, $\cos(i_1 - i_2) = 1$, т. е.

$$i_2 = i_1\,, \qquad y = \varpi. \tag{27}$$

Условие $D = 0$ означает, что $\partial\zeta_2/\partial x = 0$ при любом x. Осталось приравнять нулю правую часть (19) с учетом (27):

$$(B_4 - B_1) \sin x = (A_2 + 2B_2) \sin\varpi$$

или

$$(1 - c_1) \sin\varpi = 0. \tag{28}$$

Условие $s_1 > 0$ влечет $c_1 < 1$, так что (28) удовлетворяется лишь при $\sin\varpi = 0$.

Итак, случай $D = 0$ возможен лишь при

$$i_1 = i_2, \qquad \sin\varpi = 0, \tag{29}$$

причем переменная y должна равняться ϖ. Подставляя (29) в левую часть (24), убеждаемся в справедливости (24) при любом x. Таким образом, при выполнении равенств (29) точка (x, ϖ) тора x, y при любом x стационарна. Соответствующее значение ζ_2 согласно (11) равно ζ_2^*, где

$$\zeta_2^* = (A_0 + A_1) + (A_2 + B_2 + B_3)\cos\varpi + (-A_2 + B_1 + B_4)\cos x = 1 + e_1 e_2 \cos\varpi. \tag{30}$$

Найдем другие стационарные точки $\zeta_2(x, y)$ при условиях (29). Теперь (21), (23) принимают вид $D = s_1^2 - s_1^2 \cos(y - \varpi)$,

$$\cos x = \mu, \qquad \sin x = 0. \tag{31}$$

Значения (31) следует подставить в правую часть (19) и получить

$$A_1 \sin(\varpi - y) - A_2 \sin y + \mu B_1 \sin(\varpi - y) + 2B_2 \sin(\varpi - 2y) + \mu B_4 \sin(\varpi - y) = 0,$$

что равносильно

$$(1 + c_1)(2 + \mu e_1 e_2)\sin(\varpi - y) - e_1 e_2 (1 + c_1)\sin y + e_1 e_2 (1 - c_1)\sin(\varpi - 2y) = 0.$$

Поскольку $\sin\varpi = 0$ согласно (29), получаем окончательно

$$[(1 + c_1)(2 + \mu e_1 e_2)\cos\varpi + e_1 e_2 (1 + c_1) + 2e_1 e_2 (1 - c_1)\cos\varpi\cos y]\sin y = 0. \tag{32}$$

Уравнение (32) имеет тривиальный корень $y = \varpi$. Поэтому случай $D = 0$ можно не рассматривать отдельно.

4. Алгоритм вычисления ϱ_6. Опишем алгоритм вычисления ϱ_6. Он сводится к определению ζ_6, после чего ϱ_6 дается формулой (9).

1. Если хотя бы одна из орбит — круговая, то ζ_6 определяется формулой (13).
2. Пусть хотя бы одна из орбит (дадим ей номер 2) лежит в основной плоскости и описывает прямое движение, так что $s_2 = 0$, $c_2 = 1$. Тогда ζ_6 определяется формулой (15).
3. Пусть хотя бы одна из орбит (дадим ей номер 2) лежит в основной плоскости и описывает обратное движение, так что $s_2 = 0$, $c_2 = -1$. Тогда ζ_6 определяется формулой (17).
4. Пусть $e_1 e_2 s_1 s_2 \neq 0$,
$$i_1 = i_2\,, \qquad \sin\varpi = 0. \tag{33}$$
   (a) При $\mu = 1$ и $\mu = -1$ находим все вещественные корни $y_n(\mu)$ уравнения (32) при $-\pi < y \leqslant \pi$. Два из них $y = 0$ и $y = \pi$ тривиальны и не зависят от μ. Всего получаем не более 6 различных чисел $y_n(\mu)$.
   (b) По формуле (11) находим $\zeta_2(x(\mu), y_n(\mu))$, где $x(\mu)$ дается соотношениями (31).
   (c) Искомая величина ζ_6 равна наибольшему из чисел $\zeta_2(x(\mu), y_n(\mu))$.

5. Пусть $e_1 e_2 s_1 s_2 \neq 0$, и хотя бы одно из условий (33) нарушено (случай общего положения).

   (a) При $\mu = 1$ и $\mu = -1$ находим все вещественные корни $y_n(\mu)$ уравнения (25) или (26) при $-\pi < y \leqslant \pi$. При каждом μ их не более 6.

   (b) Каждому корню $y_n(\mu)$ отвечает ровно одно значение $x_n(\mu)$, вычисляемое по формулам (23). Получаем несколько (не более 12) точек вида $(x_n(\mu), y_n(\mu))$.

   (c) Для каждой пары $(x_n(\mu), y_n(\mu))$ определяем ζ_2 по формуле (11).

   (d) Искомая величина ζ_6 равна наибольшему из чисел $\zeta_2(x_n(\mu), y_n(\mu))$.

Замечание. Метрики ϱ_k при $k = 1, \dots, 5$ инвариантны относительно начала отсчета долгот. То же верно и для ϱ_6. Действительно, правая часть (11) зависит лишь от разности долгот перицентров ϖ.

Осталось решить две задачи. Построить удовлетворительный код для вычисления ζ_6 и выяснить, является ли $\varrho_6(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ метрикой, или хотя бы квазиметрикой. Первые две аксиомы метрического пространства выполняются для $\varrho_6(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с очевидностью. Справедливость аксиомы 3 (или хотя бы 3a) нужно исследовать. Этим мы займемся в ближайшем будущем.

Литература

1. *Kholshevnikov K. V., Vassiliev N. N.* Natural metrics in the spaces of elliptic orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2004. Vol. 89, no. 2. P. 119–125.

2. *Kholshevnikov K. V.* Metric Spaces of Keplerian Orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2008. Vol. 100, no. 3. P. 169–179.

3. *Maruskin J. M.* Distance in the space of energetically bounded Keplerian orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2010. Vol. 108, no. 3. P. 265–274.

4. *Холшевников К. В.* О метриках в пространствах кеплеровских орбит // Физика космоса: Труды 45-й международной студ. науч. конф., Екатеринбург, 1–5 февраля 2016 г. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2016. С. 168–184.

5. *Kholshevnikov K. V., Kokhirova G. I., Babadzhanov P. B., Khamroev U. H.* Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin // MNRAS. 2016. Vol. 462, no. 2. P. 2275–2283.

6. *Кузнецов Э. Д., Сафронова В. С.* Приложение метрик пространства кеплеровых орбит для поиска астероидов на близких орбитах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2017. № 4. Вып. 2. С. 86–92.

7. *Kuznetsov E., Safronova V.* Application of metrics in the space of orbits to search for asteroids on close orbits // Planetary and Space Science. 2018. Vol. 157. P. 22–27.

8. *Milanov D. V.* Metrics in Keplerian orbits quotient spaces // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2018. Vol. 130. P. 27. https://doi.org/10.1007/s10569-018-9820-1

9. *Southworth R., Hawkins G.* Statistics of meteor streams // Smithson. Contrib. Astrophys. 1963. Vol. 7. P. 261–285.

10. *Drummond J. D.* On meteor/comet orbital discriminant D // Proc. Southwest Regional Conf. Astron. Astrophys. / Eds. P. F. Gott, P. S. Riherd. Little Rock AR, 1979. Vol. 5. P. 83–86.

11. *Drummond J. D.* A test of comet and meteor shower associations // Icarus. 1981. Vol. 45. P. 545–553.

12. *Jopek T. J.* Remarks on the Meteor Orbital Similarity D-Criterion // Icarus. 1993. Vol. 106, no. 2. P. 603–607.

13. *Klačka J.* Meteor Stream Membership Criteria. 2000. arXiv:astro-ph/0005509v1

14. *Jopek T. J., Froeschlé Cl.* A stream search among 502 TV meteor orbits. An objective approach // Astron. Astrophys. 1997. Vol. 320, no. 2. P. 631–641.

15. *Valsecchi G. B., Jopek T. J., Froeschlé Cl.* Meteoroid stream identification: a new approach — I. Theory // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1999. Vol. 304, no. 4. P. 743–750.

16. *Калинин Д. А.* О критериях общности в кометных метеороидных комплексах // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2013. Вып. 5. С. 3–9.

17. *Milanov D. V., Milanova Yu. V., Kholshevnikov K. V.* Relaxed triangle inequality for the orbital similarity criterion by Southworth and Hawkins and its variants // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. Vol. 131, no. 1. Art. no. 5. https://doi.org/10.1007/s10569-019-9884-6

18. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: КомКнига, 2006.

19. *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Изд. ИКИ, 2004.

20. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1984.

21. The Collision of Comet P/Shoemaker — Levy 9 and Jupiter / Eds. K. S. Noll, H. A. Weaver, P. D. Feldman. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.

22. *Аллен К. У.* Астрофизические величины. М.: Мир, 1977.

Статья поступила в редакцию 25 августа 2019 г.;
после доработки 5 сентября 2019 г.;
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Холшевников Константин Владиславович — д-р физ.-мат. наук, проф.; kvk@astro.spbu.ru
Щепалова Анастасия Сергеевна — аспирант; shepalovanastya@mail.ru;
Джазмати Мухаммад Салахович — канд. физ.-мат. наук, проф.; jazmati@yahoo.com

On a quotient space of Keplerian orbits

K. V. Kholshevnikov[1,2], *A. S. Shchepalova*[1], *M. S. Jazmati*[3]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Institute of Applied Astronomy RAS, nab. Kutuzova, 10, St. Petersburg, 191187, Russian Federation
[3] Qassim University, P.O.Box:6644-Buraidah:51452, Saudi Arabia

For citation: Kholshevnikov K. V., Shchepalova A. S., Jazmati M. S. On a quotient space of Keplerian orbits. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 165–174. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.116 (In Russian)

Several metrics were proposed during last 15 years which transform divers spaces of Keplerian orbits in metric ones. They are used to estimate a proximity of orbits of celestial bodies (usually comets, asteroids, and meteoroid complexes). An important role play quotient spaces. They allow us not to take into account those orbital elements which change in the secular mode under different perturbations. Three quotient spaces were just examined. Nodes are ignored in one of them; arguments of pericenters are ignored in the second one; both nodes and arguments of pericenters are ignored in the third one. Here, we introduce a fourth quotient space where orbits with arbitrary longitudes of nodes and arguments of pericenters are identified under the condition that their sum (longitude of pericenter) is fixed. The function ϱ_6 serving as a distance between pointed classes of orbits, and satisfying first two axioms of metric spaces is determined. An algorithm of its calculation is proposed. In general the most complicated part of the algorithm represents the solution of a trigonometric equation of third degree. The question on the validity of the triangle axiom for ϱ_6, at least in a relaxed variant, will be examined later.

Keywords: Keplerian orbit, metrics, quotient space of a metric space, distance between orbits.

References

1. Kholshevnikov K. V., Vassiliev N. N., “Natural metrics in the spaces of elliptic orbits”, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **89**(2), 119–125 (2004).

2. Kholshevnikov K. V., “Metric Spaces of Keplerian Orbits”, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **100**(3), 169–179 (2008).

3. Maruskin J. M., “Distance in the space of energetically bounded Keplerian orbits”, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **108**(3), 265–274 (2010).

4. Kholshevnikov K. V., “On metrics in the space of Keplerian orbits”, *“Physics of Space”: Proceedings of the 45th International. stud. sci. conference, Yekaterinburg, 1–5 February, 2016*, 168–185 (Yekaterinburg, 2016). (In Russian)

5. Kholshevnikov K. V., Kokhirova G. I., Babadzhanov P. B., Khamroev U. H., “Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin”, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* **462**(2), 2275–2283 (2016).

6. Kuznetsov E. D., Safronova V. S., “Using of metrics in the space of orbits to searching for asteroids on close orbits”, *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation* (4), issue 2, 86–92 (2017). (In Russian)

7. Kuznetsov E., Safronova V., “Application of metrics in the space of orbits to search for asteroids on close orbits”, *Planetary and Space Science* **157**, 22–27 (2018).

8. Milanov D. V., “Metrics in Keplerian orbits quotient spaces”, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **130**, 27 (2018). https://doi.org/10.1007/s10569-018-9820-1

9. Southworth R., Hawkins G., “Statistics of meteor streams”, *Smithson. Contrib. Astrophys.* **7**, 261–285 (1963).

10. Drummond J. D., “On meteor/comet orbital discriminant D”, *Proc. Southwest Regional Conf. Astron. Astrophys.* **5**, 83–86 (P. F. Gott, P. S. Riherd (eds.), Little Rock AR, 1979).

11. Drummond J. D., “A test of comet and meteor shower associations”, *Icarus* **45**, 545–553 (1981).

12. Jopek T. J., “Remarks on the Meteor Orbital Similarity D-Criterion”, *Icarus* **106**(2), 603–607 (1993).

13. Klačka J., “Meteor Stream Membership Criteria”, arXiv:astro-ph/0005509v1 (2000).

14. Jopek T. J., Froeschlé Cl., “A stream search among 502 TV meteor orbits. An objective approach”, *Astron. Astrophys.* **320**(2), 631–641 (1997).

15. Valsecchi G. B., Jopek T. J., Froeschlé Cl., “Meteoroid stream identification: a new approach — I. Theory”, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* **304**(4), 743–750 (1999).

16. Kalinin D. A., “On similarity criteria in comet and meteoroid complexes”, *Izvestia vuzov. Geodesy and aerial survey* **3**, 3–9 (2005). (In Russian)

17. Milanov D. V., Milanova Yu. V., Kholshevnikov K. V., “Relaxed triangle inequality for the orbital similarity criterion by Southworth and Hawkins and its variants”, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **131**(1), 5 (2019). https://doi.org/10.1007/s10569-019-9884-6

18. Hausdorff F., *Set Theory* (AMS Chelsea Publishing, 2005).

19. Burago D. Y., Burago Y. D., Ivanov S. V., *A Course in Metric Geometry*, in Ser.: *Graduate Studies of Mathematics* **33** (AMS, 2001).

20. Korn G., Korn T., *Mathematical handbook for scientists and engineers* (Courier Corporation, 2013).

21. *The Collision of Comet P/Shoemaker — Levy 9 and Jupiter* (K. S. Noll, H. A. Weaver, P. D. Feldman (eds.), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006).

22. *Allen’s Astrophysical Quantities* (4th ed., A. N. Cox (ed.), Springer, 1999).

Received: August 25, 2019
Revised: September 5, 2019
Accepted: September 19, 2019

Authors’ information:

Konstantin V. Kholshevnikov — kvk@astro.spbu.ru
Anastassia S. Shchepalova — shepalovanastya@mail.ru
Mohammad S. Jazmati — jazmati@yahoo.com