

## Новые исследования парадокса прочности и пластичности в наноматериалах\*

*Р. З. Валиев*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9  
Уфимский государственный авиационный технический университет,  
Российская Федерация, 450008, Уфа, ул. Карла Маркса, 12

**Для цитирования:** Валиев Р. З. Новые исследования парадокса прочности и пластичности в наноматериалах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 112–127.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.112>

Кристаллические материалы могут быть высокопрочными или пластичными, но крайне редко проявляют оба эти свойства одновременно. Это обусловлено физической природой их пластической деформации, которая определяется подвижностью дислокаций — линейных дефектов кристаллической решетки — внутри отдельных зерен/кристаллитов. Это справедливо и для наноструктурных материалов, обладающих очень малыми размерами зерен в нанометрическом диапазоне. Вместе с тем, в последние годы разработан и предложен целый ряд оригинальных подходов в достижении высокой прочности и пластичности наноматериалов, полученных, в частности, методами интенсивной пластической деформации. Ниже представлен краткий обзор этих подходов и изложены их физико-механические принципы.

*Ключевые слова:* наноструктурные материалы, парадокс прочности и пластичности, интенсивная пластическая деформация, деформационные механизмы.

**1. Введение.** Для кристаллических и аморфных твердых тел-металлов, керамик, композитов их прочность является фундаментальной характеристикой, которая определяет потенциал практического использования этих материалов [1]. Как известно, механические свойства различных кристаллических материалов зависят от нескольких факторов, среди них выбор химического состава, использование деформационно-термических обработок, формирование дисперсных выделений вторых фаз, введение углеродных нанотрубок и пр., но при этом средний размер зерен/кристаллитов материала, как правило, играет весьма значительную и зачастую основную роль. В частности, прочность различных поликристаллических материалов связана с размером зерна  $d$  посредством широко известного уравнения Холла — Петча, которое утверждает, что предел текучести  $\sigma_T$  имеет вид

$$\sigma_T = \sigma_0 + k_T d^{-1/2}, \quad (1)$$

где  $\sigma_0$  — напряжение трения, а  $k_T$  — константа [2, 3]. Из этого уравнения следует, что прочность увеличивается с уменьшением размера зерна, а это способствовало постоянно возрастающему интересу к получению материалов с чрезвычайно малыми размерами зерен.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (мероприятие 3, id 26130576) и РФФИ (грант №20-03-00614 А).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

В последние два десятилетия большой интерес вызывают исследования и разработки объемных наноструктурных материалов, имеющих очень малый размер зерен/кристаллитов на наноуровне [4, 5]. К их числу относятся и ультрамелкозернистые (УМЗ) материалы, полученные методами интенсивной пластической деформации (ИПД), которые типично имеют размер зерен менее 0,5–1 мкм, т. е. меньше 500–1000 нм [5, 6]. Такой малый размер зерен обуславливает очень высокую прочность УМЗ материалов и при наличии других механизмов упрочнения, способствующих достижению сверхпрочности, когда уровень прочности материалов приближается к их теоретической прочности.

Однако материалы, обладая высокой прочностью, обычно демонстрируют низкую пластичность и крайне редко проявляют эти повышенные свойства одновременно. Данное обстоятельство обусловлено физической природой пластической деформации, которая определяется зарождением и движением дислокаций — линейных дефектов кристаллической решетки. Накопление дислокаций при пластической деформации ведет к упрочнению материала, но при этом уменьшается их подвижность и снижается пластичность, что выражено в быстром разрушении при деформации. При этом низкая пластичность является важным ограничением использования наноматериалов как перспективных конструкционных материалов, где изделию требуется набор повышенных эксплуатационных свойств — усталостной выносливости, ударной вязкости, трещиностойкости и др., которые определяются как прочностью, так и пластичностью материала.

В 2002 году были опубликованы первые работы, демонстрирующие возможность повышения пластичности наноструктурных металлических материалов при сохранении их очень высокой прочности [7–9]. Эти результаты, получившие название «парадокс прочности и пластичности наноматериалов», вызвали очень большое внимание и развитие в последующие годы в лабораториях разных стран мира. В настоящей статье рассмотрены различные подходы в достижении высокой прочности и пластичности наноматериалов, предложенные в недавних исследованиях.

**2. Прочность и «сверхпрочность».** В течение двух последних десятилетий влияние уменьшения размера зерна до нанометрового диапазона на прочность материалов было изучено в целом ряде работ (см., например, [10, 11]). Повышение прочности с уменьшением размера зерна в соответствии с уравнением (1) наблюдалось во многих исследованиях (рис. 1), но для наноразмерных зерен (20–50 нм) это соотношение, как правило, нарушается, так что кривая Холла — Петча отклоняется от линейной зависимости при более низких значениях напряжения и ее наклон  $k$  часто становится отрицательным (кривая 1 на рис. 1).

В последние годы эта проблема была подвергнута широкому анализу, как в экспериментальных, так и в теоретических исследованиях [4, 10, 11]. В то же время нарушение соотношения Холла — Петча не наблюдается в ультрамелкозернистых материалах со средним размером зерна 100–1000 нм, полученных за счет обработки методами ИПД. Кроме того, недавно было продемонстрировано, что также УМЗ сплавы могут обладать прочностью значительно более высокой, чем прочность, прогнозируемая соотношением Холла — Петча для диапазона ультрамелких зерен [12–14]. Характер такой сверхпрочности может быть обусловлен другими наноструктурными особенностями (дислокационные субструктуры, нанофазные частицы и сегрегации, нанодвойники и т. д.), которые часто наблюдаются в металлах и сплавах, подвергнутых ИПД [6, 15].

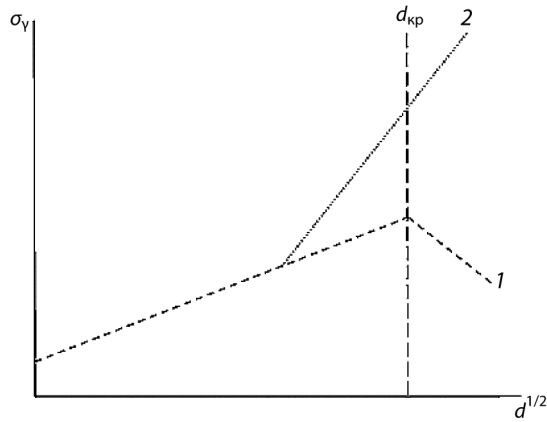


Рис. 1. Два типа наклона кривой Холла—Петча для типичного поликристалла с  $d_{кр} < 30\text{--}50$  нм (кривая 1); наноструктурного сплава, полученного ИПД обработкой (кривая 2).

Рассмотрим количественное описание отклонения от закона Холла—Петча с учетом влияния двух типов границ между зернами — большеугловых границ (БУГ) и малоугловых границ (МУГ) — на предел текучести материала. Согласно предшествующему анализу [16] предположим, что каждый из этих типов границ, а также неравновесное состояние границ зерен (НГЗ) независимым образом вносят вклад в предел текучести:

$$\sigma_T = \sigma_0 + \sigma_{МУГ} + \sigma_{БУГ} + \sigma_{НГЗ} \quad (2)$$

и

$$\sigma_T = \sigma_0 + M\alpha G\mathbf{b}((1.5S_v\theta/\mathbf{b})_{МУГ}) + k_T d^{-1/2} + M\alpha G\mathbf{b}(\rho_{ДГЗ})^{1/2}, \quad (3)$$

где  $\sigma_0$  — пороговое напряжение,  $M$  — фактор Тейлора ( $M = 3$ ),  $\alpha$  — постоянная ( $\alpha = 0,24$ ),  $G$  — модуль сдвига (79 ГПа),  $\mathbf{b}$  — вектор Бюргерса (0,249 нм), член  $S_v$  связан с размером ячейки,  $\theta$  — угол разориентации МУГ,  $d$  — средний размер зерна,  $\rho_{ДГЗ}$  — плотность дислокаций в границах зерен и  $k_T$  — постоянная Холла—Петча. Численные значения для констант взяты из работы [16].

Вклад этих различных компонентов для никеля, подвергнутого ИПД, хорошо согласуется с экспериментально полученными данными, как показано в табл. 1. После кручения под высоким давлением была сформирована однородная УМЗ структура с преимущественно большеугловыми разориентациями. Следовательно, для этих

Таблица 1. Вклад в предел текучести для никеля, подвергнутого ИПД

Обработка никеля	Предел текучести $\sigma_{Тэксп}$ (МПа)	Предел текучести $\sigma_{Трасч}$ (МПа)	$\sigma_{МУГ}$ (МПа)	$\sigma_{БУГ}$ (МПа)	$\sigma_{ДГЗ}$ (МПа)
РКУП + прокатка	990	980	510	280	170
Кручение под высоким давлением	1200	1190	—	460	710

Здесь  $\sigma_{Тэксп}$  — экспериментальные данные,  $\sigma_{Трасч}$  — вычисленные посредством уравнения (2).

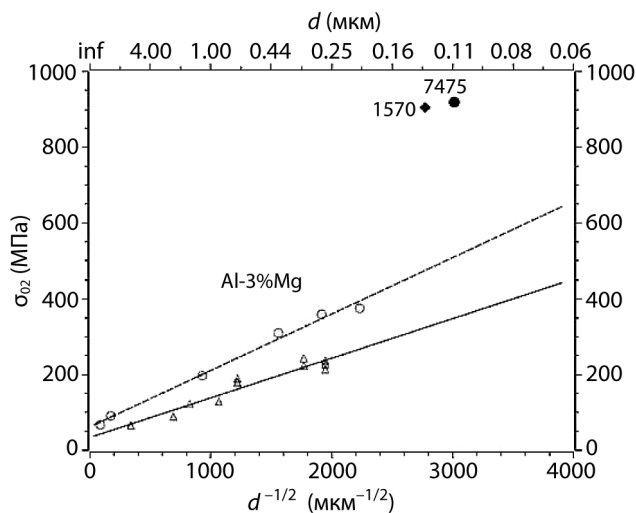


Рис. 2. Зависимость Холла—Петча для Al-сплавов 1100 [17] и Al-3%Mg [18] и данные о пределах текучести для УМЗ сплавов 1570 и 7475.

образцов целесообразно пренебречь вкладом МУГ. Таким образом, анализ результатов испытаний механических свойств показывает, что наличие субструктуры и неравновесного состояния границ зерен вносит более весомый вклад в предел текучести никеля, подвергнутого ИПД, чем прочность, рассчитанная в соответствии с законом Холла—Петча для материала с данным размером зерна.

В дополнение к дислокационной субструктуре и неравновесным границам зерен другие наноструктурные элементы, образованные в УМЗ материалах вследствие фазовых превращений, включая динамическое старение, инициированное ИПД [6], могут внести свой вклад в изменение предела текучести и напряжения течения. Этот вопрос был недавно подробно изучен на примере сверхпрочных УМЗ Al-сплавов, а именно сплавов Al 1570 и 7475 [12, 13].

На рис. 2 представлены данные для ряда алюминиевых сплавов в виде соотношения Холла—Петча, где предел текучести ( $\sigma_{0.2}$ ) изображен в зависимости от обратной величины квадратного корня из размера зерен ( $d^{-1/2}$ ) для УМЗ сплава Al 1100, полученного с помощью накапливаемого соединения прокаткой и последующей термообработки [17], а также для сплава Al-3%Mg, подвергнутого равноканальному угловому прессованию (РКУП) [18]. Следующие параметры были приняты для соотношения Холла—Петча в сплаве 1100 [16]:  $\sigma_0 = 6.0$  МПа и  $k_T = 105$  и  $\sigma_0 = 62$  МПа и  $k_T = 149$  для сплава Al-3%Mg [18]. Рис. 2 также демонстрирует данные, полученные для крупнозернистых (КЗ) и УМЗ сплавов 1570 и 7475.

Величины  $\sigma_{0.2}$  для КЗ закаленных сплавов были близки к результатам, полученным для сплава Al-3%Mg. Однако для УМЗ состояний в сплавах 1570 и 7475 с размером зерен 100–130 нм величина  $\sigma_T$  значительно выше величины, рассчитанной по соотношению Холла—Петча для данных размеров зерен.

Изучение кривых Холла—Петча для технически чистого титана (A-70, подобный Grade 4), а также для УМЗ титана Grade 4, полученного с помощью РКУП и последующей термомеханической обработки [19] показало, что величины  $\sigma_{0.2}$  для

титана в УМЗ состоянии значительно выше, чем величины, предсказанные по соотношению Холла — Петча для заданного размера зерен. Аналогичная закономерность наблюдается и для других УМЗ материалов [20].

Таким образом, новый эффект сверхпрочности наноструктурных металлов и сплавов, полученных с помощью ИПД, может наблюдаться в различных материалах, имеющих «положительный» наклон кривой Холла — Петча, как показано на рис. 1 (кривая 2). «Сверхпрочность» объемных наноструктурных материалов может иметь различное происхождение. Во-первых, она может быть следствием уже известных дополнительных механизмов упрочнения, а именно твердорастворного упрочнения, дисперсионного и дислокационного упрочнений [5, 21]. Однако причиной может быть и влияние новых механизмов упрочнения, которые вызваны изменением зернограницной структуры и приводят к дальнейшему повышению прочности [14, 22].

Недавно, основываясь на экспериментальных исследованиях материалов, полученных с помощью вакуумного осаждения [22], Фирстов и др. [23, 24] указали на подобный «положительный» наклон кривой Холла — Петча, где для диапазона размеров зерен  $d_{кр2} < d < d_{кр1}$  показатель степени  $d$  в уравнении (1) варьируется от  $-1/2$  до  $-1$ , а для  $d < d_{кр1}$  показатель степени  $d$  равен  $-3$  при наличии сегрегаций на границах зерен.

Возможно, что существуют также характерные значения размера зерен и у наноструктурных материалов, полученных методами ИПД. Действительно, наличие неравновесных границ зерен типично для большинства материалов, подвергнутых ИПД и их влияние на механические свойства становится значительным при размере зерна менее 500–1000 нм [6]. В то же время при достижении размера зерна 100 нм и менее может быть достигнут значительный вклад зернограницных сегрегаций в общую прочность. Недавно этот вопрос был подробно рассмотрен в работах [12, 13], где показано, что высокая прочность УМЗ Al-сплавов напрямую связана с формированием выявленных методом 3D атомной зондовой томографии сегрегаций на границах зерен [12, 25]. Механизмом, контролирующим скорость процесса, является взаимодействие «дислокация-граница зерен», поскольку в УМЗ материалах деформация происходит за счет дислокаций, испущенных границами зерен, движущимися сквозь зерно, а затем захватываемыми его противоположной границей. В этом случае повышенная концентрация атомов примеси на границах зерен может подавлять испускание дислокаций из таких границ за счет примесного торможения, и в результате напряжение, необходимое для испускания дислокации, возрастает. Вместе с тем, это предположение требует дальнейших исследований видов зернограницных сегрегаций и их влияния на упрочнения.

**3. Пластическая деформация и пластичность.** Высокая пластичность металлических материалов имеет важное значение для операций формования, а также для того, чтобы избежать разрушений несущих конструкций в процессе их эксплуатации. Пластичность материалов определяется степенью деформации, до которой материал может быть пластически деформирован без разрушений. Рассматривают два критерия пластичности [5].

1. Равномерное удлинение представляет собой максимальную деформацию, при которой еще наблюдается однородное пластическое течение (равномерное уменьшение площади поперечного сечения) и после которой начинается образование шейки. Равномерное удлинение определяется конкуренцией пластического течения и сопро-

тивления материалов макролокализации пластического течения. Этот параметр важен при операциях формования металла, при которых он подвергается растягивающим напряжениям.

2. Удлинение до разрушения (общее удлинение до разрушения или условная деформация до разрушения) представляет собой сумму равномерного удлинения и удлинения с образованием шейки, которое, в свою очередь, контролируется конкуренцией между локализованной пластической деформацией и процессом разрушения.

Создание конструкционных материалов со сбалансированной комбинацией высокой прочности и пластичности традиционно является важнейшей целью специалистов по физике и механике материалов. Вместе с тем исследованиями последних двух десятилетий было показано, что существенное измельчение зерен вплоть до нанометрового диапазона обычно приводит к очень высокой твердости и прочности различных металлов и сплавов, но в то же время эти материалы, как правило, проявляют низкую пластичность при испытании на растяжение [5, 6, 26, 27]. Аналогичная тенденция хорошо известна для металлов, подвергнутых сильной деформации другими способами, такими как прокатка, экструзия или волочение. Прочность и пластичность являются ключевыми механическими свойствами любого материала, но эти свойства обычно имеют противоположные характеристики. Традиционно, материалы могут быть прочными или пластичными, но они редко обладают этими свойствами одновременно.

Пластическая деформация в наноструктурных металлических материалах обычно локализуется на самых ранних этапах деформирования (1–3%), что приводит к образованию шейки с последующим разрушением образца. Различные стратегии по улучшению низкой пластичности наноматериалов были предложены в работах [5, 28, 29]. Эти стратегии можно разделить на две группы, которые определены как а) «механические» стратегии и б) «микроструктурные» стратегии. «Механические» стратегии используют механические характеристики УМЗ материалов, такие как способность к деформационному упрочнению и/или чувствительность к скорости деформации. Эти механические характеристики могут варьироваться посредством изменения таких параметров испытания, как температура и/или скорость деформации. «Микроструктурные» стратегии основаны на принципах контролируемого наноструктурного дизайна.

В случае растяжения равномерная деформация, как правило, хорошо согласуется с известным критерием Консидера [30],

$$(d\sigma/d\varepsilon) = \sigma, \quad (4)$$

представляющим собой геометрический критерий, который утверждает, что макролокализация пластической деформации (образование шейки), ведущая к разрушению образца, должна происходить тогда, когда коэффициент деформационного упрочнения  $d\sigma/d\varepsilon$  уменьшается до уровня напряжения течения  $\sigma$ . Наноструктурные металлические материалы обычно характеризуются повышенной чувствительностью к скорости деформации даже при низких температурах по сравнению с их КЗ аналогами [28, 29]. Таким образом, критерий Харта [31] является более подходящим для прогнозирования равномерного удлинения УМЗ металлов и сплавов:

$$(d\sigma/d\varepsilon) = (1 - m)\sigma, \quad (5)$$

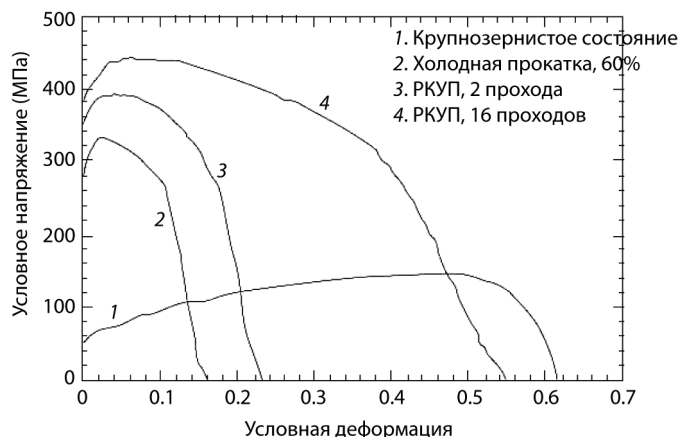


Рис. 3. Инженерная диаграмма напряжение-деформация для меди, подвергнутой испытанию при  $K_T$  и скорости деформации  $10^{-3} \text{ с}^{-1}$ : условия обработки указаны для каждой кривой [7].

где  $m$  — это показатель чувствительности к скорости деформации. Из уравнения (5) следует, что равномерное удлинение может быть повышено за счет а) увеличения коэффициента деформационного упрочнения  $d\sigma/d\varepsilon$  и/или б) чувствительности к скорости деформации  $m$ .

Учитывая тот факт, что механические характеристики материалов также определяются их микроструктурой, основным инструментом для повышения пластичности наноструктурных сплавов является управление наноструктурой.

В связи с этим недавние результаты необычайно высокой прочности и повышенной пластичности нескольких объемных УМЗ металлов, подвергнутых ИПД, представляют особый интерес [5, 32–34]. Рассмотрим несколько примеров из этих исследований.

В первом исследовании высокочистая (99,996%) медь была подвергнута РКУП при комнатной температуре по маршруту Вс с вращением заготовки на  $90^\circ$  по часовой стрелке вокруг ее оси между последовательными проходами. Прочность и пластичность были измерены посредством одноосных испытаний на растяжение. Итоговая инженерная диаграмма напряжение-деформация показана на рис. 3 для образцов меди, испытанных при комнатной температуре в исходном КЗ состоянии и в трех состояниях после обработки [7]. Очевидно, что медь в исходном КЗ состоянии с размером зерен около 30 мкм имеет типично низкий предел текучести, но обладает значительным деформационным упрочнением и высоким удлинением до разрушения. В то же время холодная прокатка меди со степенью деформации 60% значительно увеличивает прочность, как показывает кривая 2 на рис. 3, но существенно уменьшает удлинение до разрушения. Этот результат согласуется с классическими механическими характеристиками металлов, подвергнутым пластической деформации. Эта же тенденция характерна и для меди после 2 проходов РКУП. Однако дальнейшее деформирование меди вплоть до 16 проходов РКУП, как показывает кривая 4 на рис. 3, одновременно увеличивает как прочность, так и пластичность. Причем увеличение пластичности гораздо более значительно по сравнению с относительно небольшим увеличением прочности.

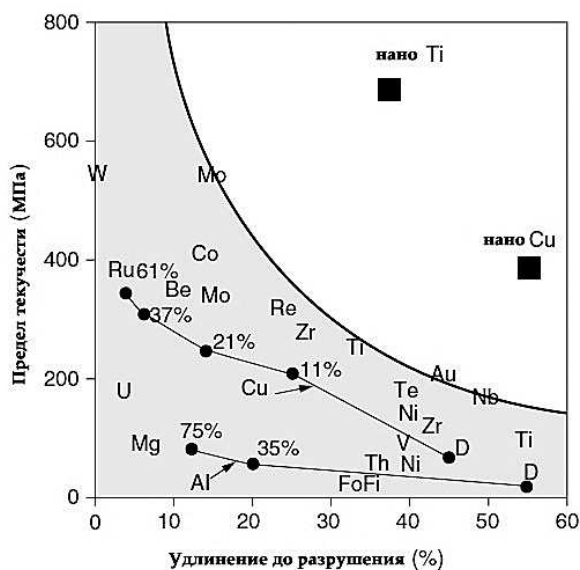


Рис. 4. Парадокс прочности и пластичности металлов, подвергну-  
тых ИПД: уникальная комбинация высокой прочности и пластичности  
наноструктурной меди и титана, подвергнутых ИПД (две верхние точ-  
ки), принципиально отличает их от обычных КЗ металлов (нижние точки  
относятся к металлам чистоты 99,5–99,9%) [7, 32].

Таким образом, данные, приведенные на рис. 3 для меди, подвергнутой РКУП, наглядно демонстрируют повышение прочности, а также пластичности с накопленной деформацией за счет увеличения числа проходов с 2 до 16 [7]. На момент исследования в 2002 году этот значительный результат никогда ранее не наблюдался в металлах, подвергнутых пластическому деформированию. Этот эффект был назван «парадоксом прочности и пластичности металлов, подвергнутых ИПД». Принципы этого парадокса показаны на рис. 4, из которого видно, что характеристики обычных металлов лежат в пределах нижней затемненной области. На рис. 4 также видно, что холодная прокатка меди и алюминия (уменьшение толщины отмечено в каждой точке) увеличивает предел прочности, но уменьшает удлинение до разрушения или пластичность. Уникальная комбинация высокой прочности и высокой пластичности, соответствующая на рис. 4 наноструктурной меди и титану после ИПД, принципиально отличает их от обычных КЗ металлов.

В последние годы подобные тенденции были описаны для ряда металлов, включая алюминий [35, 36], медь [37], никель [15] и титан [34], подвергнутых различным видам ИПД, таким как РКУП, кручение под высоким давлением или соединение накапливаемой прокаткой. Происхождение этого необычного явления связано с увеличением доли большеугловых границ зерен при увеличении степени деформации и последующим изменением преобладающих механизмов деформации из-за возрастающей тенденции к активизации зернограницного проскальзывания (ЗГП) и вращения зерен [5, 32, 34]. Как известно [5], скорость ЗГП описывается выражением

$$\dot{\epsilon}_{gbs} = \frac{A'' D_{gb} G b}{K_B T} \left( \frac{b}{d} \right)^2 \left( \frac{\sigma}{G} \right)^2, \quad (6)$$



где  $A''$  обозначает безразмерный параметр ( $\approx 10$ ),  $D_{gb}$  — коэффициент зернограничной диффузии ( $D_{gb} \ll D_{bulk}$ ),  $K_B$  — постоянная Больцмана,  $d$  — размер зерна,  $T$  — абсолютная температура,  $G$  — модуль сдвига и  $\sigma$  — приложенное напряжение.

Отсюда следует, что при заданном напряжении скорость проскальзывания заметно возрастает при уменьшении размера зерен, при этом также может снижаться температура деформации. Это способствует значительному повышению пластичности УМЗ материала. При этом повышение скорости зернограничной диффузии в материале, например, за счет образования сегрегаций определенных легирующих элементов, может даже обеспечивать проявление сверхпластичности при комнатной температуре. Это недавно было экспериментально обнаружено в сплаве Al-30%Zn с ультрамелкозернистой структурой [38]. Вместе с тем, как показывает теоретический анализ [5], проскальзывание по границам зерен в наноматериалах тесно связано с аккомодационными процессами (рис. 5) и это необходимо учитывать при анализе механизмов пластической деформации.

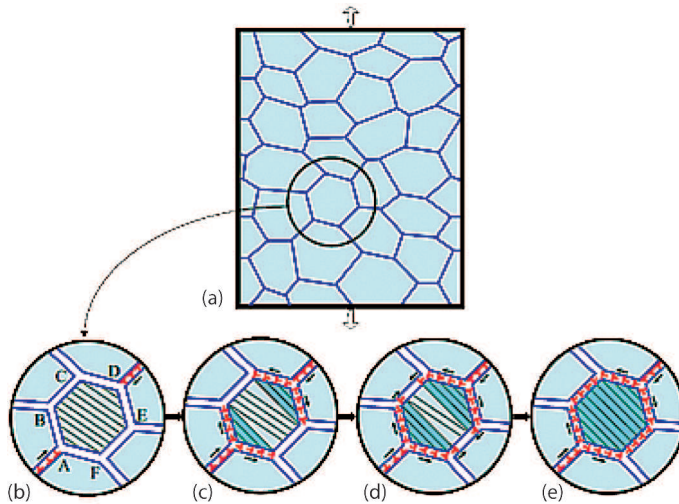


Рис. 5. Зернограничное проскальзывание и его аккомодация посредством вращательной деформации, скорость которой контролируется зернограничной диффузией. (а) Нанокристаллический образец при растяжении (общий схематический вид). Увеличенные вставки (b–e) иллюстрируют аккомодацию скольжения вдоль границ зерен, примыкающих к тройным стыкам А и D, посредством вращательной деформации внутри зерна ABCDEF (схематично). Вращательная деформация опосредована диффузионно-контролируемым переползанием зернограничных дислокаций.

Еще одним подходом к проблеме повышения пластичности является формирование бимодального распределения зерен по размерам [39, 40]. Такой материал обладал чрезвычайно высокой пластичностью, сохраняя при этом очень высокую прочность. Причина этого заключается в том, что нанокристаллические зерна обеспечивают прочность, но зерна большего размера стабилизируют деформацию растяжения.

Другое свидетельство эффективности распределения зерен по размерам было получено в результате исследований цинка [41], меди [40] и алюминиевого сплава [42]. Кроме того, исследование меди [40] показало, что бимодальные структуры могут увеличить пластичность не только в ходе испытаний на растяжение, но и при

циклической деформации. Этот результат весьма важен для улучшения усталостных свойств материалов.

Еще один подход для повышения прочности и пластичности основан на образовании частиц вторичных фаз в наноструктурной металлической матрице [27]. Эти частицы могут изменять направление распространения полосы сдвига в процессе деформации, что, таким образом, приводит к увеличению пластичности.

Данный принцип достижения высокой прочности и пластичности посредством введения промежуточных метастабильных фаз был успешно реализован в промышленном сплаве Al-Zn-Mg-Cu-Zr [43] и сплаве Al-10,8%Ag, подвергнутом РКУП и последующему старению [33].

Недавно был предложен еще один новый подход получения высокой прочности и пластичности в наноструктурных материалах, полученных методами ИПД [44]. Проведенные в этой работе исследования показали, что УМЗ Al, полученный кручением под высоким давлением, имеет очень высокую прочность, но весьма малую пластичность (рис. 6).

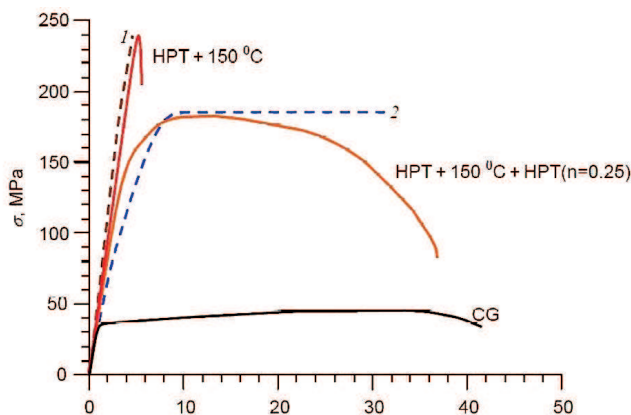


Рис. 6. Теоретические зависимости напряжения течения от величины пластической деформации (пунктирные кривые) в сравнении с экспериментальными данными (сплошные кривые) [44].

Пластичность материала остается низкой и после отжига при 150°C, однако резко возрастает после дополнительной небольшой деформации ( $n = 0,25$ ). Как показал теоретический анализ [44], природа повышения пластичности обусловлена облегчением зарождения дислокаций в тройных стыках (рис. 7).

Стоит также отметить, что как прочность, так и пластичность УМЗ металлов, полученных методами ИПД, могут быть улучшены посредством проведения механических испытаний при более низкой температуре. В работе [45] была исследована инженерная диаграмма «напряжение-деформация» для УМЗ титана с размером зерна 260 нм, подвергнутого испытанию при комнатной температуре и при температуре 77 К. При комнатной температуре титан обладает достаточной пластичностью и небольшим равномерным удлинением при скорости деформации  $1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Однако при 77 К прочность материала резко повышается до 1,4 ГПа. Одновременно происходит повышение относительного удлинения до разрушения, которое увеличивается со скоростью деформации до максимума 20%. Полученные результаты из-

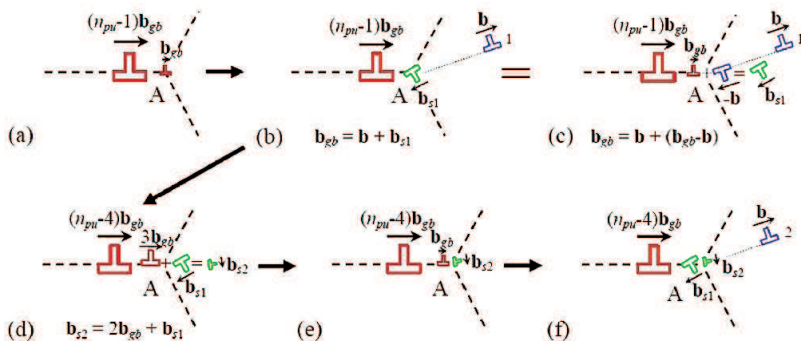


Рис. 7. Схема образования сидячей дислокации на тройном стыке. (а) Начальная конфигурация дефекта с накоплением ЗГД, которая моделируется  $(n - 1) b_{gb}$ -супердислокацией и  $b_{gb}$ -дислокацией. (б, с) Эмиссия первой решеточной  $b$ -дислокации и образование первой сидячей  $b_{s1}$ -дислокации. (д) Образование второй сидячей  $b_{s2}$ -дислокации. (е, ф) Выделение второй  $b$ -дислокации второй решетки и трансформация сидячей дислокации.

мерения прочности и пластичности превосходят или, по крайней мере, сравнимы с результатами для сплавов Ti с большим процентом легирующих элементов.

**4. Заключение.** Таким образом, результаты недавних исследований показывают, что измельчение зерен методами ИПД может привести к уникальному сочетанию прочности и пластичности металлических материалов. Такие улучшенные механические свойства весьма привлекательны для разработки новых перспективных конструкционных материалов [5, 11, 32, 46, 47]. Однако достижение этих свойств связано с формированием особых наноструктур, имеющих как ультрамелкие зерна, так и другие наноструктурные элементы-нанодвойники, высокодисперсные частицы, зернограницные сегрегации, что, в свою очередь, определяется режимами интенсивной пластической деформации и характером последующих методов обработки. Эта стратегия представляет собой теорию и практику наноструктурирования для получения повышенных механических свойств в металлических материалах с помощью методов ИПД [6]. В свою очередь формирование таких наноструктур определяет действующие механизмы деформации [5, 48, 49] и необычные свойства материалов [6, 50].

## Литература

1. Штремель М. А. Прочность сплавов. Часть I. Деформация: Учебник для вузов. М.: МИСиС, 1997.
2. Petch N. J. The Cleavage Strength of Polycrystals // Journal of the Iron and Steel Institute. 1953. Vol. 174. P. 25–28.
3. Valiev R. Z. Structure and Mechanical Properties of Ultrafine Grained Metals // Mater. Sci. Eng. 1997. Vols. A234–A236. P. 59–66.
4. Pande C., Cooper K. Nanomechanics of Hall–Petch relationship in nanocrystalline materials // Prog. Mater. Sci. 2009. Vol. 54. P. 689.
5. Ovid'ko I. A., Valiev R. Z., Zhu Y. T. Review on superior strength and enhanced ductility of metallic nanomaterials // Progress in Materials Science. 2018. Vol. 94. P. 462–540.
6. Valiev R. Z., Zhilyaev A. P., Langdon T. G. Bulk Nanostructured Materials: Fundamentals and Applications. John Wiley & Sons Inc., 2014.
7. Valiev R. Z., Alexandrov I. V., Zhu Y. T., Lowe T. C. Paradox of Strength and Ductility in Metals Processed by Severe Plastic Deformation // JMR. 2002. Vol. 17, no. 1. P. 5–8.
8. Wang Y., Chen M., Zhou F., Ma E. High tensile ductility in a nanostructured metal // Nature. 2002. Vol. 419. P. 912.

9. Valiev R. Z. Nanomaterial Advantage // Nature. 2002. Vol. 419. P. 887–889.
10. Morris D. G. Nanostructured Metals and Alloys. In: Processing, Microstructure, Mechanical Properties and Applications / Ed. S. H. Whang. Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 2011.
11. Mayers M. A., Mishra A., Benson D. J. Mechanical properties of nanocrystalline materials // Prog. Mater. Sci. 2006. Vol. 51. P. 427.
12. Valiev R. Z., Enikeev N. A., Murashkin M. Y., Kazykhanov V. U., Sawage X. On the origin of extremely high strength of ultrafine-grained Al alloys produced by severe plastic deformation // Scr. Mater. 2010. Vol. 63. P. 949.
13. Valiev R. Z., Enikeev N. A., Murashkin M. Y., Aleksandrov S. E., Goldshtein R. V. Super-strength of ultrafine-grained aluminum alloys produced by severe plastic deformation // Dokl. Phys. 2010. Vol. 55, no. 6. P. 267.
14. Valiev R. Z., Enikeev N. A., Langdon T. G. Towards superstrength of nanostructured metals and alloys produced by SPD // Kovove. Mater. 2011. Vol. 49. P. 1.
15. Krasilnikov N., Lojkowski W., Pakiela Z., Valiev R. Z. Tensile strength and ductility of ultrafine-grained nickel processed by severe plastic deformation // Mater. Sci. Eng. 2005. Vol. A37. P. 330.
16. Hughes D. A., Hansen N. Microstructure and strength of nickel at large strains // Acta Metall. 2000. Vol. 48. P. 2985.
17. Tsuji N. Nanostructured Materials by High-Pressure Severe Plastic Deformation / Eds. Y. T. Zhu, V. Varyukhin. Dordrecht: Springer, 2006.
18. Furukawa M., Horita Z., Nemoto M., Valiev R. Z., Langdon T. G. Factors Influencing the Flow and Hardness of Materials with Ultrafine Grain Sizes // Philos. Mag. A. 1998. Vol. 78. P. 203.
19. Semenova I. P., Salimgareeva G., Da Costa G., Lefebvre W., Valiev R. Z. Enhanced strength and ductility of ultrafine-grained Ti processed by severe plastic deformation // Adv. Eng. Mater. 2010. Vol. 12. P. 803.
20. Ivanisenko Y., Sergueeva A. V., Minkow A., Valiev R. Z., Fecht H. J. Nanomaterials by Severe Plastic Deformation / Eds. M. J. Zehetbauer, R. Z. Valiev. Weinheim: Wiley-VCH, 2004.
21. Sabirov I., Murashkin M., Valiev R. Z. Nanostructured aluminium alloys produced by severe plastic deformation: new horizons in development // Mater. Sci. Eng. 2013. Vol. A560. P. 1.
22. Li J. C. M. Mechanical Properties of Nanocrystalline Materials / Ed. J. S. M. Li. Singapore: Pan Stanford Publ., 2011.
23. Firstov S. A., Rogul T. G., Shut O. A. Transition from microstructures to nanostructures and ultimate hardening // Funct. Mater. 2009. Vol. 16. P. 4.
24. Фирстов С. А., Рогуль Т. Г., Марушко В. Т., Сагайдак В. А. Структура и микротвердость поликристаллического хрома, полученного методом магнетронного распыления // Вопросы материаловедения. 2003. Т. 33. С. 201.
25. Liddicoat P. V., Liao X. Z., Zhao Y., Zhu Y. T., Murashkin M. Y., Lavernia E. J., Valiev R. Z., Ringer S. P. Nanostructural hierarchy increases the strength of aluminium alloys // Nat. Commun. 2010. Vol. 1. P. 63.
26. Morris D. G. Mechanical Behaviour of Nanostructured Materials. Utikon-Zurich: Trans. Tech., 1998.
27. Koch C. C. Optimization of strength and ductility in nanocrystalline and ultrafine grained metals // Scr. Mater. 2003. Vol. 49. P. 657.
28. Zhao Y., Zhu Y. T., Lavernia E. J. Strategies for improving tensile ductility of bulk nanostructured materials // Adv. Eng. Mater. 2010. Vol. 12. P. 76.
29. Ma E. Eight routes to improve the tensile ductility of bulk nanostructured metals and alloys // JOM. 2006. Vol. 58, no. 4. P. 49.
30. Dieter G. E. Mechanical Metallurgy. Boston: McGraw-Hill, 1986.
31. Hart E. W. Theory of the tensile test // Acta Metall. 1967. Vol. 15. P. 351.
32. Valiev R. Z. Nanostructuring of Metals by Severe Plastic Deformation for Advanced Properties // Nat. Mater. 2004. Vol. 3. P. 511.
33. Horita Z., Ohashi K., Fujita T., Kaneko K., Langdon T. G. Achieving high strength and high ductility in precipitation-hardened alloys // Adv. Mater. 2005. Vol. 17. P. 1599.
34. Wang Y., Chen M., Zhou F., Ma E. High tensile ductility in a nanostructured metal // Nature. 2002. Vol. 419. P. 912.
35. Hoepfel H. W., May J., Eisenlohr P., Goeken M. Z. Strain-rate sensitivity of ultrafine-grained materials // Metallkd. 2005. Vol. 96. P. 566.
36. May J., Hoepfel H. W., Goeken M. Strain rate sensitivity of ultrafine-grained aluminium processed by severe plastic deformation // Scr. Mater. 2005. Vol. 53. P. 189.

37. Dalla Torre F., Lapovok R., Sandlin J., Thomson P. F., Davies C. H. J., Pereloma E. V. Microstructures and properties of copper processed by equal channel angular extrusion for 1–16 passes // *Acta Mater.* 2004. Vol. 52. P. 4819.
38. Edalati K., Horita Z., Valiev R. Z. Transition from poor ductility to room-temperature superplasticity in a nanostructured aluminum alloy // *Sci. Rep.* 2018. Vol. 8, no. 1. P. 6740. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-25140-1>
39. Valiev R. Z., Sergueeva A. V., Mukherjee A. K. The Effect of Annealing on Tensile Deformation Behavior of Nanostructured SPD Titanium // *Scr. Mater.* 2003. Vol. 49. P. 669.
40. Mughrabi H., Hoepfel H. W., Kautz M., Valiev R. Z. Annealing treatments to enhance thermal and mechanical stability of ultrafine-grained metals produced by severe plastic deformation // *Z. Metallkd.* 2003. Vol. 94. P. 1079.
41. Zhang X., Wang H., Scattergood R. O., Narayan J., Koch C. C., Sergueeva A. V., Mukherjee A. K. Studies of deformation mechanisms in ultra-fine-grained and nanostructured Zn // *Acta Mater.* 2002. Vol. 50. P. 4823.
42. Park Y. S., Chung K. H., Kim N. J., Lavernia E. J. Microstructural investigation of nanocrystalline bulk Al-Mg alloy fabricated by cryomilling and extrusion // *Mater. Sci. Eng.* 2004. Vol. A374. P. 211.
43. Islamgaliev R. K., Yunusova N. F., Sabirov I. N., Sergueeva A. V., Valiev R. Z. Deformation Behaviour of Nanostructured Aluminum Alloy Processed by Severe Plastic Deformation // *Mater. Sci. Eng.* 2001. Vol. A319–A321. P. 877.
44. Orlova T. S., Skiba N. V., Mavlyutov A. M., Murashkin M., Valiev R. Z., Gutkin M. Y. Hardening by annealing and implementation of high ductility of ultra-fine grained aluminum: experiment and theory // *Reviews on Advanced Materials Science.* 2018. Vol. 57, no. 2. P. 224–240.
45. Wang Y., Ma E., Valiev R. Z., Zhu Y. Tough Nanostructured Metals at Cryogenic Temperatures // *Adv. Mater.* 2004. Vol. 16. P. 328.
46. Глезер А. М., Козлов Э. В., Конева Н. А., Попова Н. А., Курзума И. А. Основы пластической деформации наноструктурных материалов. М.: Физматлит, 2016.
47. Рудской А. И., Коджаспиров Г. Е. Ультрамелкозернистые металлические материалы. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2015.
48. Morozov N. F., Ovid'ko I. A., Skiba N. V. Plastic flow through widening of nanoscale twins in ultrafine-grained metallic materials with nanotwinned structures // *Reviews of Advanced Materials Science.* 2014. Vol. 37. P. 29.
49. Скиба Н. В. Обзор микромеханизмов пластической деформации в нанодвойникованных материалах // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия.* 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 489–493.
50. Valiev R. Z., Estrin Y., Horita Z., Langdon T. G., Zehetbauer M. J., Zhu Y. T. Fundamentals of superior properties in bulk nanoSPD materials // *Materials Research Letters.* 2016. Vol. 4, no. 1. P. 1–21.

Статья поступила в редакцию 16 мая 2019 г.;  
 после доработки 18 сентября 2019 г.;  
 рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Валиев Руслан Зуфарович — д-р физ.-мат. наук, проф.; [ruslan.valiev@ugatu.su](mailto:ruslan.valiev@ugatu.su)

## New studies of paradox of strength and ductility in nanomaterials\*

R. Z. Valiev

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation  
 Ufa State Aviation Technical University, ul. Karla Marksa, 12, Ufa, 450008, Russian Federation

**For citation:** Valiev R. Z. New studies of paradox of strength and ductility in nanomaterials. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 112–127. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.112> (In Russian)

\*This work is supported by St. Petersburg State University (activity 3, id 26130576), Russian Foundation for Basic Research (grant No. 20-03-00614 A).

Crystalline materials can be superstrong or ductile, but they rarely exhibit both of these properties at the same time. This is due to the physical nature of their plastic deformation, which is determined by the mobility of dislocations — linear defects of the crystal lattice — in the grain/crystallite interior. This is also true for nanostructured materials with very small grain sizes in the nanometric range. At the same time, in recent years, a number of original approaches have been developed and proposed to achieve high strength and ductility of nanomaterials, particularly, processed by severe plastic deformation (SPD) techniques. The paper below presents a brief overview of these approaches as well as their physico-mechanical principles put forward as of today.

*Keywords:* nanostructured materials, paradox of strength and ductility, severe plastic deformation, deformation mechanisms.

## References

1. Shtremel M. A., *Strength of Alloys. Part I. Deformation: textbook for Institutions of Higher Education* (MISIS Publ., Moscow, 1997).
2. Petch N. J., “The Cleavage Strength of Polycrystals”, *Journal of the Iron and Steel Institute* **174**, 25–28 (1953).
3. Valiev R. Z., “Structure and Mechanical Properties of Ultrafine Grained Metals”, *Mater. Sci. Eng.* **A234–A236**, 59–66 (1997).
4. Pande C., Cooper K., “Nanomechanics of Hall-Petch relationship in nanocrystalline materials”, *Prog. Mater. Sci.* **54**, 689 (2009).
5. Ovid’ko I. A., Valiev R. Z., Zhu Y. T., “Review on superior strength and enhanced ductility of metallic nanomaterials”, *Progress in Materials Science* **94**, 462–540 (2018).
6. Valiev R. Z., Zhilyaev A. P., Langdon T. G., *Bulk Nanostructured Materials: Fundamentals and Applications* (John Wiley & Sons Inc., 2014).
7. Valiev R. Z., Alexandrov I. V., Zhu Y. T., Lowe T. C., “Paradox of Strength and Ductility in Metals Processed by Severe Plastic Deformation”, *JMR* **17**(1), 5–8 (2002).
8. Wang Y., Chen M., Zhou F., Ma E., “High tensile ductility in a nanostructured metal”, *Nature* **419**, 912 (2002).
9. Valiev R. Z., “Nanomaterial Advantage”, *Nature* **419**, 887–889 (2002).
10. Morris D. G., *Nanostructured Metals and Alloys. Processing, Microstructure, Mechanical Properties and Applications* (S. H. Whang (ed.), Woodhead Publishing Limited, Cambridge, 2011).
11. Mayers M. A., Mishra A., Benson D. J., “Mechanical properties of nanocrystalline materials”, *Prog. Mater. Sci.* **51**, 427 (2006).
12. Valiev R. Z., Enikeev N. A., Murashkin M. Y., Kazykhanov V. U., Sauvage X., “On the origin of extremely high strength of ultrafine-grained Al alloys produced by severe plastic deformation”, *Scr. Mater.* **63**, 949 (2010).
13. Valiev R. Z., Enikeev N. A., Murashkin M. Y., Aleksandrov S. E., Goldshtein R. V., “Superstrength of ultrafine-grained aluminum alloys produced by severe plastic deformation”, *Dokl. Phys.* **55** (6), 267 (2010).
14. Valiev R. Z., Enikeev N. A., Langdon T. G., “Towards superstrength of nanostructured metals and alloys produced by SPD”, *Kovove Mater.* **49**, 1 (2011).
15. Krasilnikov N., Lojkowski W., Pakielka Z., Valiev R. Z., “Tensile strength and ductility of ultrafine-grained nickel processed by severe plastic deformation”, *Mater. Sci. Eng.* **37**, 330 (2005).
16. Hughes D. A., Hansen N., “Microstructure and strength of nickel at large strains”, *Acta Metall.* **48**, 2985 (2000).
17. Tsuji N., *Nanostructured Materials by High-Pressure Severe Plastic Deformation* (Y. T. Zhu, V. Varyukhin (eds.), Springer, Dordrecht, 2006).
18. Furukawa M., Horita Z., Nemoto M., Valiev R. Z., Langdon T. G., “Factors Influencing the Flow and Hardness of Materials with Ultrafine Grain Sizes”, *Philos. Mag. A* **78**, 203 (1998).
19. Semenova I. P., Salimgareeva G., Da Costa G., Lefebvre W., Valiev R. Z., “Enhanced strength and ductility of ultrafine-grained Ti processed by severe plastic deformation”, *Adv. Eng. Mater.* **12**, 803 (2010).
20. Ivanisenko Y., Sergueeva A. V., Minkow A., Valiev R. Z., Fecht H. J., *Nanomaterials by Severe Plastic Deformation* (M. J. Zehetbauer, R. Z. Valiev (eds.), Wiley-VCH, Weinheim, 2004).
21. Sabirov I., Murashkin M., Valiev R. Z., “Nanostructured aluminium alloys produced by severe plastic deformation: new horizons in development”, *Mater. Sci. Eng.* **A560**, 1 (2013).

22. Li J. C. M., *Mechanical Properties of Nanocrystalline Materials* (J. S. M. Li (ed.), Pan Stanford Publ., Singapore, 2011).
24. Firstov S. A., Rogul T. G., Marushko V. T., Sagaydak V. A., "Structure and microhardness of polycrystalline chromium produced by magnetron sputtering", *Voprosy Materialovedeniya* **33**, 201 (2003). (In Russian)
23. Firstov S. A., Rogul T. G., Shut O. A., "Transition from microstructures to nanostructures and ultimate hardening", *Funct. Mater.* **16**, 4 (2009).
25. Liddicoat P. V., Liao X. Z., Zhao Y., Zhu Y. T., Murashkin M. Y., Lavernia E. J., Valiev R. Z., Ringer S. P., "Nanostructural hierarchy increases the strength of aluminium alloys", *Nat. Commun.* **1**, 63 (2010).
26. Morris D. G., *Mechanical Behaviour of Nanostructured Materials* (Trans. Tech., Uetikon-Zurich, 1998).
27. Koch C. C., "Optimization of strength and ductility in nanocrystalline and ultrafine grained metals", *Scr. Mater.* **49**, 657 (2003).
28. Zhao Y., Zhu Y. T., Lavernia E. J., "Strategies for improving tensile ductility of bulk nanostructured materials", *Adv. Eng. Mater.* **12**, 76 (2010).
29. Ma E., "Eight routes to improve the tensile ductility of bulk nanostructured metals and alloys", *JOM* **58**(4), 49 (2006).
30. Dieter G. E., *Mechanical Metallurgy* (McGraw-Hill, Boston, 1986).
31. Hart E. W., "Theory of the tensile test", *Acta Metall.* **15**, 351 (1967).
32. Valiev R. Z., "Nanostructuring of Metals by Severe Plastic Deformation for Advanced Properties", *Nat. Mater.* **3**, 511 (2004).
33. Horita Z., Ohashi K., Fujita T., Kaneko K., Langdon T. G., "Achieving high strength and high ductility in precipitation-hardened alloys", *Adv. Mater.* **17**, 1599 (2005).
34. Wang Y., Chen M., Zhou F., Ma E., "High tensile ductility in a nanostructured metal", *Nature* **419**, 912 (2002).
35. Hoepfel H. W., May J., Eisenlohr P., Goeken M. Z., "Strain-rate sensitivity of ultrafine-grained materials", *Metallkd.* **96**, 566 (2005).
36. May J., Hoepfel H. W., Goeken M., "Strain rate sensitivity of ultrafine-grained aluminium processed by severe plastic deformation", *Scr. Mater.* **53**, 189 (2005).
37. Dalla Torre F., Lapovok R., Sandlin J., Thomson P. F., Davies C. H. J., Pereloma E. V., "Microstructures and properties of copper processed by equal channel angular extrusion for 1–16 passes", *Acta Mater.* **52**, 4819 (2004).
38. Edalati K., Horita Z., Valiev R. Z., "Transition from poor ductility to room-temperature superplasticity in a nanostructured aluminum alloy", *Sci. Rep.* **8**(1), 6740 (2018). <https://doi.org/10.1038/s41598-018-25140-1>
39. Valiev R. Z., Sergueeva A. V., Mukherjee A. K., "The Effect of Annealing on Tensile Deformation Behavior of Nanostructured SPD Titanium", *Scr. Mater.* **49**, 669 (2003).
40. Mughrabi H., Hoepfel H. W., Kautz M., Valiev R. Z., "Annealing treatments to enhance thermal and mechanical stability of ultrafine-grained metals produced by severe plastic deformation", *Z. Metallkd.* **94**, 1079 (2003).
41. Zhang X., Wang H., Scattergood R. O., Narayan J., Koch C. C., Sergueeva A. V., Mukherjee A. K., "Studies of deformation mechanisms in ultra-fine-grained and nanostructured Zn", *Acta Mater.* **50**, 4823 (2002).
42. Park Y. S., Chung K. H., Kim N. J., Lavernia E. J., "Microstructural investigation of nanocrystalline bulk Al-Mg alloy fabricated by cryomilling and extrusion", *Mater. Sci. Eng.* **A374**, 211 (2004).
43. Islamgaliev R. K., Yunusova N. F., Sabirov I. N., Sergueeva A. V., Valiev R. Z., "Deformation Behaviour of Nanostructured Aluminum Alloy Processed by Severe Plastic Deformation", *Mater. Sci. Eng.* **A319–A321**, 877 (2001).
44. Orlova T. S., Skiba N. V., Mavlyutov A. M., Murashkin M., Valiev R. Z., Gutkin M. Y., "Hardening by annealing and implementation of high ductility of ultra-fine grained aluminum: experiment and theory", *Reviews on Advanced Materials Science* **57** (2), 224–240 (2018).
45. Wang Y., Ma E., Valiev R. Z., Zhu Y., "Tough Nanostructured Metals at Cryogenic Temperatures", *Adv. Mater.* **16**, 328 (2004).
46. Glezer A. M., Kozlov E. V., Koneva N. A., Popova N. A., Kurzina I. A., *Basics of Plastic Deformation of Nanostructured Materials* (Fizmatlit Publ., Moscow, 2016). (In Russian)
47. Rudskoy A. I., Kodjaspirov G. E., *Ultrafine-grained Metallic Materials* (Polytechnic Univ. Publishing House, St. Petersburg, 2015). (In Russian)

48. Morozov N. F., Ovid'ko I. A., Skiba N. V., "Plastic flow through widening of nanoscale twins in ultrafine-grained metallic materials with nanotwinned structures", *Reviews of Advanced Materials Science* **37**, 29 (2014).

49. Skiba N. V., "Review of micromechanisms of plastic deformation in nanotwinned materials", *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5 (63)**, issue 3, 489–493 (2018). (In Russian)

50. Valiev R. Z., Estrin Y., Horita Z., Langdon T. G., Zehetbauer M. J., Zhu Y. T., "Fundamentals of superior properties in bulk nanoSPD materials", *Materials Research Letters* **4**(1), 1–21 (2016).

Received: May 16, 2019

Revised: September 18, 2019

Accepted: September 19, 2019

#### Author's information:

Ruslan Z. Valiev — ruslan.valiev@ugatu.su

## ХРОНИКА

9 октября 2019 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН выступил кандидат физ.-мат. наук, доцент А. С. Кулешов (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва) с докладом на тему «Эффект трансгрессии в задачах механики неголономных систем».

Краткое содержание доклада:

В 1986 г. проф. Я. В. Татаринов заложил основы теории слабо неголономных систем. Рассматриваются механические системы с неголономными связями, содержащими малый параметр. Предполагается, во-первых, что при нулевом значении параметра связи такой системы интегрируемы, то есть получается семейство голономных систем, зависящее от нескольких произвольных констант интегрирования. Во-вторых, эти голономные системы должны быть вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами. При ненулевом значении малого параметра поведение таких систем можно рассматривать при помощи асимптотических методов, представляя его как трансгрессию: сочетание движения слегка модифицированной голономной системы с медленным изменением былых констант. В данном докладе предложены методы, используемые для изучения эффекта трансгрессии в неголономных системах с малым параметром, а также описан эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника и в задаче о движении тонкого твердого стержня по поверхности цилиндра.