

## МЕХАНИКА

УДК 001.891.573:533.6.011

MSC 76L05, 76K05

### К задаче моделирования течений газа за фронтом сильной ударной волны с помощью эффективного показателя адиабаты

*В. И. Богатко, Е. А. Потехина*Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Богатко В. И., Потехина Е. А.* К задаче моделирования течений газа за фронтом сильной ударной волны с помощью эффективного показателя адиабаты // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 104–111. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.111>

В задачах с сильными ударными волнами (задача о сильном взрыве, о движении тел с большими сверхзвуковыми скоростями, задача о сверхзвуковом расширении поршня) в возмущенной области течения происходит значительное повышение температуры. Поэтому при определении параметров течения газа за фронтом сильной ударной волны необходимо учитывать реальные свойства газа. Это значительно затрудняет построение приближенных аналитических решений. Однако исследования показывают, что влияние реальных свойств газа на газодинамические параметры потока можно учесть изменением показателя адиабаты, то есть введением эффективного показателя адиабаты. Если газ за ударной волной находится в состоянии термодинамического равновесия, то эффективный показатель адиабаты мало меняется во всей зоне течения. Это дает возможность моделировать течение за фронтом ударной волны некоторым совершенным газом, показатель адиабаты которого определяется в зависимости от числа Маха и термодинамического состояния газа за фронтом ударной волны. Для получения более точных решений задач с сильными ударными волнами модель должна допускать разрыв показателя адиабаты на скачке уплотнения. В настоящей работе получено явное выражение для параметров газа за фронтом интенсивной ударной волны в предположении, что показатель адиабаты претерпевает разрыв при переходе частиц газа через поверхность ударной волны. Рассмотрены плоский и осесимметричный случаи.

*Ключевые слова:* моделирование, ударная волна, гиперзвуковые течения, разрыв показателя адиабаты.

**1. Введение.** При сильном взрыве и движении тел с большими сверхзвуковыми скоростями за фронтом образующейся интенсивной ударной волны происходит значительное повышение температуры. Возникающие при этом физико-химические процессы оказывают существенное влияние на параметры течения газа в возмущенной области, а также на положение и форму фронта ударной волны. Поэтому при определении параметров течения газа за фронтом сильной ударной волны необходимо учитывать реальные свойства газа. С ростом температуры газа (свыше 2000 градусов Кельвина) зависимость показателя адиабаты от температуры резко усложняется и это значительно затрудняет построение приближенных аналитических решений для течений газа за фронтом интенсивной ударной волны.

Однако сопоставление численных расчетов с имеющимися точными решениями позволяет сделать вывод о том, что влияние реальных свойств газа на газодинамические параметры потока за фронтом интенсивной ударной волны достаточно хорошо можно учесть изменением показателя адиабаты [1]. Так, например, сопоставление автомодельного решения Л. И. Седова о сильном взрыве с численными расчетами позволяет сделать вывод о том, что влияние реальных свойств воздуха на газодинамические параметры за фронтом ударной волны достаточно хорошо можно учесть изменением отношения удельных теплоемкостей  $k = \frac{c_p}{c_v}$ , то есть введением эффективного показателя адиабаты [2]. К аналогичному выводу приводят расчеты обтекания тел сверхзвуковым потоком газа в широком диапазоне скоростей набегающего потока (см., например, [3, 4]).

Если газ за ударной волной находится в состоянии термодинамического равновесия, то эффективный показатель адиабаты мало меняется во всей зоне течения. Это дает возможность моделировать течение за фронтом ударной волны некоторым совершенным газом, показатель адиабаты которого определяется в зависимости от числа Маха и от термодинамического состояния газа за фронтом ударной волны [1, 5, 6].

Экспериментальные исследования показывают [7], что физико-химические процессы, происходящие за фронтом интенсивной ударной волны, приводят к уменьшению значения показателя адиабаты. Рекомендации по выбору (схему определения) эффективного показателя адиабаты в каждой конкретной задаче можно найти, например, в [2, 8].

При построении решения задачи определения параметров течения газа за фронтом интенсивной ударной волны чаще всего предполагается (см., например, [9, 10]), что  $M \rightarrow \infty$ . Различные варианты учета конечности числа Маха предлагаются в работах [1, 11] для решения стационарных и в [12] для решения нестационарных задач гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных тел.

Для получения более точных решений задач с сильными ударными волнами следует использовать более сложную модель совершенного газа, с помощью которого описывается течение реального газа. Модель должна допускать разрыв показателя адиабаты на скачке уплотнения. Такое исследование было проведено в [13] для прямого скачка уплотнения. Представляет, однако, интерес применить такой подход для многомерных течений.

В настоящей работе получено явное выражение для параметров газа за фронтом интенсивной ударной волны в предположении, что показатель адиабаты претерпевает разрыв при переходе частиц газа через поверхность разрыва. Для простоты и наглядности был рассмотрен двумерный случай течения (плоский и осесимметричный).

**2. Постановка задачи.** Будем рассматривать двумерные (плоские и осесимметричные) течения газа за фронтом сильной ударной волны. Для описания течения газа в возмущенной области за фронтом ударной волны будем использовать модель совершенного газа с эффективным показателем адиабаты. При этом будем считать, что показатель адиабаты претерпевает разрыв на фронте ударной волны.

Пусть ударная волна разделяет две области течения с параметрами  $\vec{V}_0, p_0, \rho_0, k_0$  до ударной волны и  $\vec{V}, p, \rho, k$  за ударной волной.

Систему координат введем следующим образом. Направим ось  $x$  по скорости набегающего потока  $\vec{V}_0$ , а ось  $y$  перпендикулярно оси абсцисс (см. рис. 1).

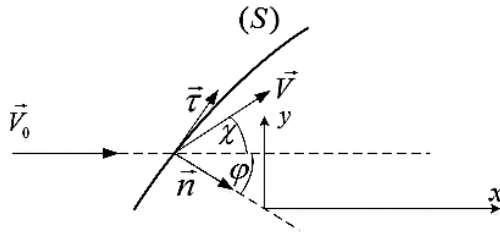


Рис. 1. Система координат.

На рис. 1 введены следующие обозначения:  $\vec{V}_0 = \{V_0, 0\}$ ,  $S$  — фронт ударной волны,  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к фронту ударной волны, направленный в сторону возмущенной области течения,  $\varphi = (\vec{n}, x)$  — угол между нормалью и осью  $x$ ,  $\vec{\tau}$  — единичный вектор касательной к фронту ударной волны,  $\chi$  — угол поворота потока.

В рассматриваемом случае граничными условиями задачи являются условия динамической совместности на фронте сильной ударной волны. Таким образом, цель настоящей работы — получить граничные условия на фронте сильной ударной волны для модели с разрывом показателя адиабаты.

Законы сохранения массы, количества движения и энергии, записанные в интегральной форме, дают условия динамической совместности для движений среды по обе стороны от поверхности разрыва:

$$[\rho \theta] = 0, \quad \rho \theta [\vec{V}] = [p] \vec{n}, \quad \rho \theta \left[ \frac{V^2}{2} + \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho} \right] = [p (\vec{V} \cdot \vec{n})]. \quad (1)$$

Здесь  $\theta$  — скорость распространения (по частицам) поверхности разрыва,  $\theta = D - \vec{V} \cdot \vec{n}$ ,  $D$  — скорость перемещения (в пространстве) поверхности разрыва. Здесь и далее под  $k$  следует понимать значение эффективного показателя адиабаты.

**3. Обобщенная динамическая адиабата.** Умножая второе соотношение из (1) скалярно на  $(\vec{V} + \vec{V}_0)$  и используя третье соотношение, после несложных преобразований получим

$$\frac{p}{\rho_0} = \frac{k-1}{k_0-1} \frac{(k_0+1)\rho - (k_0-1)\rho_0}{(k+1)\rho_0 - (k-1)\rho}. \quad (2)$$

Уравнение (2) есть уравнение динамической адиабаты в предположении, что показатель адиабаты Пуассона при переходе через фронт ударной волны претерпевает

разрыв [14]. Если показатели адиабаты совпадают, то мы приходим к классическому уравнению динамической адиабаты Гюгонио.

**4. Параметры газа за поверхностью разрыва.** Для компонентов вектора скорости за фронтом ударной волны из условий динамической совместности (1) получим

$$V_x = V_0 - \frac{[p]}{\rho_0 V_0}, \quad V_y = \frac{[p]}{\rho_0 V_0} \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

Для плотности из первого условия динамической совместности (1) имеем следующее выражение:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{[p]}{\rho_0 V_0^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (4)$$

Таким образом, все величины за поверхностью сильного разрыва зависят только от  $[p]$ . Комбинируя (2) и (4), получим квадратное уравнение для определения  $[p]$ :

$$[p]^2 - 2 \frac{\rho_0}{k+1} \left( V_0^2 \cos^2 \varphi - \frac{k}{k_0} a_0^2 \right) [p] - \frac{2 \left( 1 - \frac{k}{k_0} \right) \rho_0^2 a_0^2 V_0^2 \cos^2 \varphi}{(k_0 - 1)(k + 1)} = 0.$$

Решая его, приходим к выражению

$$[p] = \frac{\rho_0}{k+1} \left( V_0^2 \cos^2 \varphi - \frac{k}{k_0} a_0^2 \right) \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \left( 1 - \frac{k}{k_0} \right) \frac{k+1}{k_0-1} R} \right\}, \quad (5)$$

где

$$R = \frac{a_0^2 V_0^2 \cos^2 \varphi}{\left( V_0^2 \cos^2 \varphi - \frac{k}{k_0} a_0^2 \right)^2}.$$

Перед квадратным корнем в формуле (5) следует выбрать знак «+», так как знак «-» при  $k = k_0$  дает тривиальное решение  $[p] = 0$ .

Следует отметить, что значение показателя адиабаты перед фронтом ударной волны  $k_0$  учитывается только в членах порядка  $O\left(\frac{1}{M_0^2}\right)$ .

**5. Гипоциссоида сильных разрывов.** Обратимся к соотношениям (3) и исключим из них параметр  $\varphi$ . В результате найдем уравнение гипоциссоиды для случая, когда показатель адиабаты претерпевает разрыв на фронте ударной волны [15]:

$$V_y^2 = (V_0 - V_x) \frac{2 \left( 1 - \frac{k}{k_0} \right) \frac{a_0^2 V_0}{k_0 - 1} + 2 \left( V_0^2 - \frac{k}{k_0} a_0^2 \right) (V_0 - V_x) - (k + 1) V_0 (V_0 - V_x)^2}{(k + 1) V_0 (V_0 - V_x) + 2 \frac{k}{k_0} a_0^2}. \quad (6)$$

При  $k = k_0$  из формулы (6) получаем обычное уравнение ударной поляры.

**6. Упрощенные формулы для параметров газа за поверхностью разрыва.** Найдем теперь с точностью  $O\left(\frac{1}{M_0^2}\right)$  все газодинамические величины за фронтом ударной волны. Из формулы (5) имеем

$$[p] = \rho_0 V_0^2 \left\{ \frac{2}{k+1} \cos^2 \varphi - \frac{1}{k_0} \frac{(k-1)(k+k_0)}{(k_0-1)(k+1)} \frac{1}{M_0^2} \right\}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (3) и (4) и учитывая, что  $\theta_0 = -V_{0n} = -V_0 \cos \varphi$  с точностью до членов порядка  $O(\frac{1}{M_0^2})$ , получим

$$V_x = V_0 \left\{ 1 - \frac{2}{k+1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{k_0} \frac{(k-1)(k+k_0)}{(k_0-1)(k+1)} \frac{1}{M_0^2} \right\}, \quad (8)$$

$$V_y = V_0 \operatorname{tg} \varphi \left\{ \frac{2}{k+1} \cos^2 \varphi - \frac{1}{k_0} \frac{(k-1)(k+k_0)}{(k_0-1)(k+1)} \frac{1}{M_0^2} \right\}, \quad (9)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{1}{k_0} \frac{(k-1)(k+k_0)}{(k_0-1)(k+1)} \frac{1}{M_0^2 \cos^2 \varphi}. \quad (10)$$

Полученные формулы (7)–(10) могут быть полезны при построении приближенных аналитических решений задач газовой динамики с сильными ударными волнами в качестве граничных условий для соответствующей системы уравнений. Наиболее часто для решения таких задач применяется метод тонкого ударного слоя [16], который основывается на том факте, что отношение плотностей газа на фронте ударной волны есть величина малая по сравнению с единицей. При этом следует отметить, что часто для практических целей можно ограничиться только первыми двумя членами разложения (иногда только предельным решением) в ряд по параметру, характеризующему указанное отношение плотностей. В последнем случае использование граничных условий (7)–(10) дает возможность построить более точное решение.

Отметим, что как показывают расчеты, граничные условия на фронте сильной головной ударной волны вносят большой вклад в распределение газодинамических параметров в ударном слое, чем система уравнений газодинамики [17]. Этот факт можно, по-видимому, объяснить тем, что при распространении сильной ударной волны ввиду большой сжимаемости газа во фронте ударной волны основная масса газа в возмущенной области сосредоточена в узкой прифронтальной зоне (ударном слое).

Анализ условий (7)–(10) показывает, что в рассматриваемых задачах можно выделить два малых параметра:  $\varepsilon = \frac{k-1}{k+1}$  и  $\eta = \frac{1}{M^2}$ . Конечность числа Маха при решении стационарных задач гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных тел при условии, что параметры  $\varepsilon$  и  $\eta$  независимы, учитывалась в работах [1, 11]. В то же время известно, что с ростом скорости движения плотность газа за фронтом ударной волны растет. Поэтому естественно считать эти параметры зависимыми. При этом, как показывают расчеты параметров газа на фронте ударной волны, второй параметр стремится к нулю значительно быстрее первого. Из уравнения состояния следует, что параметр  $\eta$  должен быть пропорционален параметру  $\varepsilon$ . Поэтому приближенно учесть конечность числа Маха можно, положив  $\eta = \varepsilon q$ , где  $q$  тоже малая величина [12].

**7. Заключение.** Несмотря на большие успехи численного эксперимента в задачах газовой динамики, получение простых и достаточно точных для практических расчетов аналитических решений представляет значительный интерес. Такие решения могут иметь как самостоятельное значение, так и использоваться для оценки точности вновь разрабатываемых численных методов. Кроме того, при решении конкретной задачи их полезно использовать в комбинации с численными методами для ускорения вычислительной процедуры. Следует отметить также, что анализ

граничных условий дает возможность определить структуру разложения искомых величин в ряд и построить приближенное аналитическое решение. При построении приближенных аналитических решений полученные в работе приближенные формулы могут служить граничными условиями для системы уравнений, описывающей течение газа за фронтом сильной ударной волны.

## Литература

1. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975.
2. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. Н.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
3. *Теленин Г. Ф., Липницкий Ю. М.* Нестационарное сверхзвуковое обтекание затупленных тел с отошедшей ударной волной // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 4. С. 19–29.
4. *Запрынов Э. Д.* Численное исследование сверхзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел при  $M \rightarrow \infty$  и  $\gamma \rightarrow 1$  // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 4. С. 164–167.
5. *Лебедев М. Г., Миносцев В. Б., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П.* Приближенный метод учета влияния реальности газа при гиперзвуковом обтекании сегментальных тел // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1969. № 2. С. 107–111.
6. *Vallerani E.* An “ideal equivalent gas method” for the study of shock waves in supersonic real gas flow // *Meccanica*. 1969. Vol. 4, no. 3. P. 234–249.
7. *Гвоздева Л. Г., Предводителева О. А.* Экспериментальное исследование маховского отражения ударных волн при скорости 1000–3000 м/сек в углекислом газе, аргоне и воздухе // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 5. С. 1088–1091.
8. *Тарнавский Г. А., Шпак С. И.* Способы расчета эффективного показателя адиабаты при компьютерном моделировании гиперзвуковых течений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2001. Т. IV, № 1(7) С. 177–196.
9. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. 8-е изд. М.: Наука, 1977.
10. *Taylor G.* The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I // *Proc. Royal Society of London. Ser. A*. 1950. Vol. 201. Issue 1065. P. 192–196. <https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0052>
11. *Гиро Ж.* Основные вопросы теории гиперзвуковых течений. М.: Мир, 1965.
12. *Богатко В. И., Потехина Е. А.* Об учете конечности чисел Маха при обтекании плоских и осесимметричных тел, движущихся с большой переменной скоростью // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1995. Вып. 2, № 8. С. 49–53.
13. *Полянский О. Ю.* О моделировании течений реального газа в ударных волнах с помощью совершенного газа // Труды ЦАГИ. 1983. Вып. 2177. С. 130–137.
14. *Цибаров В. А.* Кинетический метод в теории газозвесей. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997.
15. *Богатко В. И., Потехина Е. А.* Некоторые замечания об учете реальных свойств газа за фронтом ударной волны // Ученые зап. ЛГУ. Газодинамика и теплообмен. 1977. № 393. С. 152–156.
16. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.
17. *Su F. Y., Olfe D. B.* Radiative transferee effects on reflected shock waves. I. Transparent gas // *Phys. Fluids*. 1971. Vol. 14, no. 12. P. 2636–2644.

Статья поступила в редакцию 28 августа 2019 г.;  
после доработки 18 сентября 2019 г.;  
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

*Богатко Всеволод Иванович* — канд. физ.-мат. наук, доц.; [aerovib@gmail.com](mailto:aerovib@gmail.com)

*Потехина Елена Александровна* — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; [ear225@gmail.com](mailto:ear225@gmail.com)

# To the problem of modeling gas flows behind the front of a strong shock wave using an effective adiabatic index

V. I. Bogatko, E. A. Potekhina

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Bogatko V.I., Potekhina E.A. To the problem of modeling gas flows behind the front of a strong shock wave using an effective adiabatic index. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 104–111. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.111> (In Russian)

In problems with strong shock waves (the problem of a strong explosion, the motion of bodies with high supersonic speeds, the problem of supersonic piston expansion), a significant increase in temperature occurs in the perturbed region of the flow. Therefore, when determining the parameters of the gas flow behind the front of a strong shock wave, it is necessary to take into account the real properties of the gas. This greatly complicates the construction of approximate analytical solutions. However, studies show that the influence of the real properties of the gas on the gas-dynamic parameters of the flow can be taken into account by changing the adiabatic index, that is, by introducing an effective adiabatic exponent. If the gas behind the shock wave is in a state of thermodynamic equilibrium, then the effective adiabatic index changes little in the entire flow zone. This makes it possible to simulate the flow behind the shock wave front by some perfect gas, the adiabatic index of which is determined depending on the Mach number and the thermodynamic state of the gas by the shock front. To obtain more accurate solutions to problems with strong shock waves, the model must allow a break in the adiabatic index at the shock wave. In the present work, an explicit expression is obtained for the gas parameters behind the front of an intense shock wave under the assumption that the adiabatic index undergoes discontinuity during the transition of gas particles through the surface of the shock wave. The plane and axisymmetric case are considered.

*Keywords:* modeling, shock wave, hypersonic flows, adiabatic index discontinuity.

## References

1. Lunev V. V., *Hypersonic aerodynamics* (Mashinostroenie Publ., Moscow, 1975). (In Russian)
2. Zel'dovich Y. B., Raizer Y. P., *Physics of Shock Waves and Hightemperature Hydrodynamic Phenomena* (Academic Press, New York, 1967).
3. Telenin G. F., Lipnitsky Yu. M., "Unsteady supersonic flow around blunt bodies with a departing shock wave", *Izv. USSR Academy of Sciences. Fluid and gas mechanics* (4), 19–29 (1966). (In Russian)
4. Zapryanov Z. D., "Numerical study of supersonic flow around flat and axisymmetric blunt bodies as  $M \rightarrow \infty$  and  $\gamma \rightarrow 1$ ", *Izv. USSR Academy of Sciences. Fluid and gas mechanics* (4), 164–167 (1967). (In Russian)
5. Lebedev M. G., Minostsev V. B., Telenin G. F., Tinyakov G. P., "An approximate method for taking into account the influence of gas reality during hypersonic flow around segmental bodies", *Izv. USSR Academy of Sciences. Fluid and gas mechanics* (2), 107–111 (1969). (In Russian)
6. Vallerani E., "An "ideal equivalent gas method" for the study of shock waves in supersonic real gas flow", *Meccanica* 4(3), 234–249 (1969).
7. Gvozdeva L. G., Predvoditeleva O. A., "An experimental study of the Mach reflection of shock waves at a speed of 1000–3000 m/s in carbon dioxide, argon and air", *Dokl. USSR Academy of Sciences* 163(5), 1088–1091 (1965). (In Russian)
8. Tarnavsky G. A., Shpak S. I., "Methods for calculating the effective adiabatic index in computer simulation of hypersonic flows", *Siberian Journal of Industrial Mathematics* IV(1–7), 177–196 (2001). (In Russian)
9. Sedov L. I., *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* (Academic Press, New York, 1959).

10. Taylor G., “The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I”, *Proc. Royal Society of London. Ser. A.* **201**, issue 1065, 192–196 (1950). <https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0052>
11. Guiraud J.-P., *Topics in hypersonic flow theory* (Stanford University Press, Stanford, California, 1963).
12. Bogatko V. I., Potekhina E. A., “About registration of the Mach number finiteness in a near moving flow with a high variable velocity plane and axisymmetrical bodies”, *St. Petersburg University. Mechanics Bulletin* (2), 1–5 (1995).
13. Polyansky O. Yu., “On the simulation of real gas flows in shock waves using perfect gas”, *Proceedings of TsAGI* (2177), 130–137 (1983). (In Russian)
14. Tsibarov V. A., *Kinetic method in the theory of gas suspensions* (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 1997). (In Russian)
15. Bogatko V. I., Potekhina E. A., “Some comments on taking into account the real properties of the gas behind the shock front”, *Scientists app. LSU. Gas dynamics and heat transfer* (393), 152–156 (1977). (In Russian)
16. Chernyi G. G., *Gas flows with a high supersonic velocity* (Fizmatgiz Publ., Moscow, 1959). (In Russian)
17. Su F. Y., Olfe D. B., “Radiative transfer effects on reflected shock waves. I. Transparent gas”, *Phys. Fluids* **14**(12), 2636–2644 (1971).

Received: August 28, 2019  
Revised: September 18, 2019  
Accepted: September 19, 2019

Authors' information:

Vsevolod I. Bogatko — aerovib@gmail.com  
Elena A. Potekhina — eap225@gmail.com