Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1
УДК 512.552.12, 512.552.13
MSC 16U80, 16S50

Обобщенно полукоммутативные кольца

Д. Рой, Т. Субеди

Национальный технологический институт Мегхалая,
Шиллонг-793003, Индия

Для цитирования: *Рой Д., Субеди Т.* Обобщенно полукоммутативные кольца // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 91–103. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.110

Назовем кольцо R *обобщенно полукоммутативным*, если для любых элементов a, $b \in R$ их произведение $ab = 0$ только тогда, когда существуют натуральные числа m, n такие, что $a^m Rb^n = 0$. В работе показано, что класс обобщенно полукоммутативных колец содержится в классе центральных полукоммутативных колец и содержит класс слабо полукоммутативных-I колец, причем включения строгие. Изучена связь обобщенно полукоммутативных колец и колец некоторых других известных типов. Приведен способ построения обобщенно полукоммутативных семейств по данному обобщенно полукоммутативному кольцу. Также в работе получено несколько критериев того, что обобщенно полукоммутативное кольцо будет редуцированным кольцом.

Ключевые слова: полукоммутативное кольцо, обобщенно полукоммутативное кольцо.

1. Введение. Здесь и далее R — ассоциативное кольцо с единицей. Через $J(R)$, $N(R)$, $Z(R)$, $E(R)$ обозначим радикал Джекобсона, множество нильпотентов, центр и множество идемпотентов кольца R соответственно. Также мы обозначим множество $\{a \in R : a^2 = 0\}$ как $N_2(R)$, а левый (правый) аннулятор элемента $a \in R$ как $l(a)$ $(r(a))$. Кольцо R называется *абелевым*, если все его идемпотенты центральные, *редуцированным*, если $N(R) = 0$, и *полупримитивным*, если $J(R) = 0$. Левый (правый) идеал L кольца R называется *GW-идеалом* [1], если для каждого элемента $a \in L$ существует натуральное число n такое, что $a^n R \subseteq L$ $(Ra^n \subseteq L)$. Кольцо R называется *полукоммутативным*, если для любого элемента $a \in R$ его левый аннулятор $l(a)$ — идеал R. Хорошо известно, что R полукоммутативно тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in R$ его правый аннулятор $r(a)$ — идеал R.

За последние годы многие математики предложили различные обобщения полукоммутативных колец. Так, кольцо R *слабо полукоммутативно* [2], если для всех a, $b \in R$ таких, что $ab = 0$, верно $aRb \subseteq N(R)$. Мы будем называть такие кольца *слабо полукоммутативными-I кольцами*, чтобы отличать их от другого обобщения полукоммутативного кольца, предложенного в работе [3], которое также называлось слабо полукоммутативным кольцом. В [3] *R слабо полукоммутативно*, если для всех $a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0, ab = 0$, существует натуральное число n такое, что или $a^n \neq 0$ и $a^n Rb = 0$, или $b^n \neq 0$ и $aRb^n = 0$. Мы будем называть такие кольца *слабо полукоммутативными-II кольцами. R — центрально полукоммутативное* (см. [4, 5]), если для всех a, $b \in R$ таких, что $ab = 0$, верно $aRb \subseteq Z(R)$. Кольцо R называется *левым (правым) GWZI-кольцом* [6], если для каждого $a \in R$ аннулятор $l(a)$ $(r(a))$ — GW-идеал кольца R.

В данной статье изучается новое обобщение полукоммутативных колец в продолжение различных существующих обобщений полукоммутативных колец.

2. Обобщенно полукоммутативные кольца.

Определение 1. Кольцо R *обобщенно полукоммутативно*, если для любых элементов a, $b \in R$ их произведение $ab = 0$ только тогда, когда существуют натуральные числа m, n такие, что $a^m R b^n = 0$.

Теорема 1. *Любое центрально полукоммутативное кольцо обобщенно полукоммутативно.*

Доказательство. Пусть R — центрально полукоммутативное кольцо и a, $b \in R$ с $ab = 0$. Тогда для всех $r \in R$ верно $a^2 r b^2 = a(arb)b = arbab = 0$, значит $a^2 R b^2 = 0$. □

Поскольку центрально полукоммутативное кольцо не обязательно должно быть полукоммутативным (см. [4, следствие 2.14]), теорема 1 показывает, что обобщенно полукоммутативное кольцо не обязательно должно быть полукоммутативным. Следующий пример демонстрирует, что обобщенно полукоммутативное кольцо не обязательно должно быть центрально полукоммутативным.

Пример 1. Пусть

$$R = S_5(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & a & b_5 & b_6 & b_7 \\ 0 & 0 & a & b_8 & b_9 \\ 0 & 0 & 0 & a & b_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a,\, b_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Поскольку любой элемент R или нильпотентен, или обратим, R обобщенно полукоммутативно. А в [4, лемма 2.9] показано, что R не центрально полукоммутативно.

Доказательство следующего предложения тривиально.

Предложение 1. *Каждое из колец из следующих классов является обобщенно полукоммутативным кольцом:*

1) слабо полукоммутативные-II кольца;

2) левые (правые) GWZI-кольца.

Предложение 2. *Пусть R — обобщенно полукоммутативное кольцо. Если $a \in N_2(R)$, тогда ra, $ar \in N(R)$ для любого $r \in R$.*

Доказательство. Пусть $a \in N_2(R)$ и $r \in R$. Тогда $raar = 0$. По предположению существуют натуральные m, n такие, что $(ra)^m R (ar)^n = 0$, то есть $(ra)^m r(a(ra)^{n-1} r)a = 0$. Отсюда заключаем, что $ra \in N(R)$, следовательно $ar \in N(R)$. □

Теорема 2. *Любое обобщенно полукоммутативное кольцо слабо полукоммутативно-I.*

Доказательство. Пусть R — обобщенно полукоммутативное кольцо и a, $b \in R$ с $ab = 0$. Поскольку $ba \in N_2(R)$, для любого $r \in R$ по предложению 2 имеем $rba \in N(R)$, следовательно $aRb \subseteq N(R)$. $\square$

Кольцо R называется *слабо обращаемым* [7], если для всех $a, b, r \in R$ из $ab = 0$ следует, что $Rbra$ — левый ниль-идеал.

Теорема 3. *Если R — обобщенно полукоммутативное кольцо, то R слабо обращаемо.*

Доказательство. Пусть $a, b, r \in R$ и $ab = 0$. Для всех $s \in R$ верно $(sbra)(bras) = 0$. По предположению существуют натуральные m, n такие, что $(sbra)^m R(bras)^n = 0$, значит $(sbra)^m s(bra(sbra)^{n-1}s)bra = 0$, а это влечет $sbra \in N(R)$. Следовательно, $Rbra$ — левый ниль-идеал. $\square$

Следующий пример показывает, что существует слабо обращаемое и слабо полукоммутативное-I кольцо, которое не обобщенно полукоммутативно.

Пример 2. Пусть $R = T_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R}, i \leq j \right\}$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$. Тогда $AB = 0$. Заметим, что для любых двух натуральных m, n верно $A^m RB^n \neq 0$, следовательно R не обобщенно полукоммутативно. По [7, предложение 2.3] R слабо обращаемо. А по [2, утверждение 2.1] R — слабо полукоммутативное-I кольцо.

Предложение 3. *Каждое обобщенно полукоммутативное кольцо абелево.*

Доказательство. Пусть R — обобщенно полукоммутативное кольцо и $e \in E(R)$, $r \in R$. Поскольку $e(e-1) = 0$ по предположению, то $ere = er$. Аналогично, $ere = re$ и, таким образом, R абелево. $\square$

Пример 3. Пусть $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ a - d \equiv b \equiv c \equiv 0 (mod\, 2) \right\}$. Тогда $E(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Это показывает, что R абелево.

Возьмем $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in R$ такие, что $AB = 0$. Тогда $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R$, где $b \neq 0$, и для любых натуральных m, n верно $A^m CB^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{m+n}b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Из последнего заключаем, что R не обобщенно полукоммутативно.

Предложение 4. *Прямое произведение конечного числа обобщенных полукоммутативных колец является обобщенно полукоммутативным.*

Доказательство. Пусть $R = R_1 \times R_2$, где R_1, R_2 — обобщенные полукоммутативные кольца, и $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in R$ такие, что $ab = 0$. Тогда $a_i b_i = 0$ для всех $i \in \{1, 2\}$. По предположению для каждого i есть натуральные m_i, n_i такие, что ${a_i}^{m_i} R_i {b_i}^{n_i} = 0$. Пусть $m = \max\{m_1, m_2\}$, $n = \max\{n_1, n_2\}$. Таким образом, ${a_i}^m R_i {b_i}^n = 0$ для всех i, откуда следует $a^m R b^n = 0$. $\square$

Поскольку подкольцо обобщенно полукоммутативного кольца также обобщенно полукоммутативно, последняя теорема имеет следующее следствие.

Следствие 1. *Прямое произведение конечного числа обобщенных полукоммутативных колец является обобщенно полукоммутативным.*

Теорема 4. *Пусть идеал I кольца R не содержит ненулевых нильпотентов. Тогда если R/I обобщенно полукоммутативно, то R обобщенно полукоммутативно.*

Доказательство. Пусть a, c, $r \in R$ такие, что $ac = 0$, тогда $\overline{ac} = 0$ в R/I. По предположению существуют натуральные m, n такие, что $\overline{a}^m\overline{rc}^n = \overline{0}$, поэтому $a^m rc^n \in I$. Теперь $(c(a^m rc^n)a)^2 = 0$. Поскольку I не содержит ненулевых нильпотентов, $ca^m rc^n a = 0$. Таким образом, $(a^m rc^n)^3 = a^m rc^{n-1}(ca^m rc^n a)a^{m-1}rc^n = 0$, что приводит к $a^m rc^n = 0$. ☐

Теорема 5. *Пусть R — кольцо. Если S — мультипликативно замкнутое подмножество R, состоящее из центральных регулярных элементов, то R обобщенно полукоммутативно тогда и только тогда, когда $S^{-1}R$ обобщенно полукоммутативно.*

Доказательство. Пусть R обобщенно полукоммутативно и α, $\beta \in S^{-1}R$ такие, что $\alpha\beta = 0$. Пусть $\alpha = k^{-1}a, \beta = l^{-1}b$, где k, $l \in S, a$, $b \in R$. Получаем, что $S \subseteq Z(R)$, поэтому $0 = \alpha\beta = k^{-1}al^{-1}b = (k^{-1}l^{-1})ab = (kl)^{-1}ab$, значит $ab = 0$. По предположению существуют натуральные m, n такие, что $a^m Rb^n = 0$, следовательно $\alpha^m(S^{-1}R)\beta^n = 0$. Таким образом, $S^{-1}R$ обобщенно полукоммутативно.

Обратное тривиально. ☐

Следствие 2. *Для любого кольца R $R[x]$ обобщенно полукоммутативно тогда и только тогда, когда кольцо лорановских многочленов $R[x; x^{-1}]$ обобщенно полукоммутативно.*

Доказательство. Пусть $R[x]$ обобщенно полукоммутативно. Пусть $S = \{1, x, x^2, \cdots\}$. Тогда S — мультипликативно замкнутое подмножество $R[x]$, состоящее из центральных регулярных элементов. Значит, по теореме 5 $S^{-1}R[x]$ обобщенно полукоммутативно. Остается заметить, что $R[x; x^{-1}] \simeq S^{-1}R[x]$.

Обратное тривиально. ☐

Расширение Дорро (обозначаемое $D(R, \mathbb{Z})$) кольца R над $\mathbb{Z}$ — это кольцо $R \times \mathbb{Z}$ с обычным покомпонентным сложением и умножением, определенным следующим образом: $(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1r_2 + s_1r_2 + s_2r_1, s_1s_2)$, где $r_1, r_2 \in R$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$.

Лемма 1. *Для любых $(r, s) \in D(R, \mathbb{Z})$ и натурального k*

$$(r, s)^k = \left(\sum_{i=0}^{i=k-1} \binom{k}{i} s^i r^{k-i}, s^k \right).$$

Доказательство. Заявленное проверяется индукцией по k. ☐

Теорема 6. *R обобщенно полукоммутативно тогда и только тогда, когда $D(R, \mathbb{Z})$ обобщенно полукоммутативно.*

Доказательство. Пусть $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in D(R, \mathbb{Z})$ такие, что $(r_1, s_1)(r_2, s_2) = 0$. Тогда $r_1r_2 + s_1r_2 + s_2r_1 = 0$, $s_1s_2 = 0$, поэтому $s_1 = 0$ или $s_2 = 0$. Если $s_1 = 0$, тогда $r_1r_2 + s_2r_1 = 0 = r_1(r_2 + s_2)$. По предположению существуют натуральные m, n такие, что $r_1^m R(r_2 + s_2)^n = 0$. Пусть $(r, s) \in D(R, \mathbb{Z})$. Теперь $(r_1, 0)^m(r, s)(r_2, s_2)^n = (r_1^m(r + s), 0)\left(\sum_{i=0}^{i=n-1}\binom{n}{i}s_2^i r_2^{n-i}, s_2^n\right) = \left(r_1^m(r + s)\left(\sum_{i=0}^{i=n-1}\binom{n}{i}s_2^i r_2^{n-i} + {s_2}^n\right), 0\right) = (r_1^m(r+s)(r_2+s_2)^n, 0) = (0, 0)$. Если $s_2 = 0$, тогда аналогичным образом можно взять натуральные m, n такие, что $(r_1, s_1)^m(r, s)(r_2, 0)^n = (0, 0)$. Следовательно, $D(R, \mathbb{Z})$ обобщенно полукоммутативно. Обратное получается тривиальным образом. $\square$

Теорема 7. *R обобщенно полукоммутативно тогда и только тогда, когда тривиальное расширение R с помощью R, $T(R, R) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in R\right\}$ обобщенно полукоммутативно.*

Доказательство. Пусть R обобщенно полукоммутативно и $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in T(R, R)$ такие, что $AB = 0$. Тогда $a_1a_2 = 0$. Поскольку R обобщенно полукоммутативно, существуют натуральные m, n такие, что $a_1^m R a_2^n = 0$. Тогда для каждого натурального k имеем

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & \sum\limits_{i\ge 0,\, j\ge 0,\, i+j=k-1} a_1^i b_1 a_1^j \\ 0 & a_1^k \end{pmatrix},\ B^k = \begin{pmatrix} a_2^k & \sum\limits_{i\ge 0,\, j\ge 0,\, i+j=k-1} a_2^i b_2 a_2^j \\ 0 & a_2^k \end{pmatrix}.$$

Пусть $C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in T(R, R)$. Пусть $l = 2(m + n)$. Можно заключить, что $A^lCB^l = 0$. Теперь $A^lCB^l = \begin{pmatrix} a_1^l a a_2^l & p \\ 0 & a_1^l a a_2^l \end{pmatrix}$, где

$$p = a_1^l b a_2^l + \left(\sum_{i\ge 0,\, j\ge 0,\, i+j=l-1} a_1^i b_1 a_1^j\right) a a_2^l + a_1^l a\left(\sum_{i\ge 0,\, j\ge 0,\, i+j=l-1} a_2^i b_2 a_2^j\right).$$

Поскольку $a_1^m R a_2^n = 0$, то $a_1^l a a_2^l = 0$, $a_1^l b a_2^l = 0$.

Если $i \ge m$, то ясно, что $\left(\sum\limits_{i\ge m,\, j\ge 0,\, i+j=l-1} a_1^i b_1 a_1^j\right) a a_2^l = 0$, так как $a_1^m R a_2^n = 0$.

Если $i \le m - 1$, тогда поскольку $i + j = l - 1$, имеем $j \ge m$.

Таким образом, $\left(\sum\limits_{0\le i\le m-1,\, j\ge 0,\, i+j=l-1} a_1^i b_1 a_1^j\right) a a_2^l = 0$.

Следовательно, $\left(\sum\limits_{i\ge 0,\, j\ge 0,\, i+j=l-1} a_1^i b_1 a_1^j\right) a a_2^l = 0$.

Точно также, разбивая сумму на $i \ge n$ и $i \le n - 1$, можно доказать, что $a_1^l a\left(\sum\limits_{i\ge 0,\, j\ge 0,\, i+j=l-1} a_2^i b_2 a_2^j\right) = 0$. Следовательно, $A^lCB^l = 0$.

Обратное получается тривиальным образом. $\square$

Для произвольного кольца R и натурального n определим следующие кольцо:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix} : a_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n \right\} \quad \text{как} \quad V_n(R).$$

Лемма 2. *Пусть R — обобщенно полукоммутативное кольцо и A, $B \in V_n(R)$ с $AB = 0$. Тогда существует натуральное m такое, что $A^m R^n b^m = 0$, где*

$$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \mid r_1,\, r_2,\, \cdots, r_n \in R \right\} \quad \textit{и} \quad b \text{ — \textit{элемент из главной диагонали} } B.$$

Доказательство. Мы докажем результат индукцией по n, порядку матриц A и B. Если $n = 1$, результат следует из предположения. Предположим, что результат верен для $n = k - 1$. Пусть $A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & \beta \\ 0 & b \end{pmatrix} \in V_k(R)$ с $AB = 0$, где α, $\beta \in R^{k-1}$. Тогда $A_1 B_1 = 0$, $ab = 0$. По предположению существуют натуральные m_1, n_1 такие, что $a^{m_1} R b^{n_1} = 0$. А так как $A_1 B_1 = 0$ по индукционному предположению, то существует натуральное m_2 такое, что $A_1^{m_2} R^{k-1} b^{m_2} = 0$.

Пусть $m = m_1 + n_1 + m_2$ и $\gamma = \begin{pmatrix} \delta \\ c_k \end{pmatrix} \in R^k$, где $\delta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{k-1} \end{pmatrix} \in R^{k-1}$. Тогда

$$A^m \gamma b^m = \begin{pmatrix} A_1^m & \sum\limits_{i \geq 0,\, j \geq 0,\, i+j=m-1} A_1^i \alpha a^j \\ 0 & a^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta b^m \\ c_k b^m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_1^m \delta b^m + \left(\sum\limits_{i \geq 0,\, j \geq 0,\, i+j=m-1} A_1^i \alpha a^j \right) c_k b^m \\ a^m c_k b^m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $A_1^m \delta b^m = 0$, $a^m c_k b^m = 0$.

Если $i \geq m_2$, тогда ясно, что $\left(\sum\limits_{i \geq m_2,\, j \geq 0,\, i+j=m-1} A_1^i \alpha a^j \right) c_k b^m = 0$, поскольку $A_1^{m_2} R^{k-1} b^{m_2} = 0$. Если $i \leq m_2 - 1$, то поскольку $i + j = m - 1$, получаем $j \geq m_1$.

Тогда $\left(\sum\limits_{0 \leq i \leq m_2 - 1,\, j \geq 0,\, i+j=m-1} A_1^i \alpha a^j \right) c_k b^m = 0$, так как $a^{m_1} R b^{n_1} = 0$.

Таким образом, $\left(\sum\limits_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=m-1} A_1^i \alpha a^j\right) c_k b^m = 0$. Тогда $A^m \gamma b^m = 0$.

Это дает заявленный результат. □

Теорема 8. *R обобщенно полукоммутативно тогда и только тогда, когда $V_n(R)$ обобщенно полукоммутативно для любого $n \geq 2$.*

Доказательство. Пусть R — обобщенно полукоммутативное кольцо. Мы докажем утверждение индукцией по n. Для $n = 2$ результат следует из теоремы 7. Пусть $V_n(R)$ обобщенно полукоммутативно для любого n, $2 < n \leq k-1$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_k \\ 0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} \\ 0 & 0 & b_1 & \dots & b_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 \end{pmatrix} \in V_k(R)$$

с $AB = 0$. Пусть $A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & \beta \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ где $A_1, B_1 \in V_{k-1}(R)$ и $\alpha = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ \vdots \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_k \\ b_{k-1} \\ \vdots \\ b_2 \end{pmatrix} \in R^{k-1}$. Тогда $A_1B_1 = 0$, $a_1b_1 = 0$. По индукционному предположению существуют натуральные m_1, n_1 такие, что $A_1^{m_1} V_{k-1}(R) B_1^{n_1} = 0$. По предположению существуют натуральные m_2, n_2 такие, что $a_1^{m_2} R b_1^{n_2} = 0$. Также из леммы 2 следует, что существует натуральное m_3 такое, что $A_1^{m_3} R^{k-1} b_1^{m_3} = 0$. Пусть $m = m_1 + m_2 + m_3 + n_1 + n_2$ и $C = \begin{pmatrix} C_1 & \gamma \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in V_k(R)$, где $C_1 \in V_{k-1}(R)$, $\gamma = \begin{pmatrix} c_k \\ c_{k-1} \\ \vdots \\ c_2 \end{pmatrix}$. Итак, $A^m C B^m =$

$$= \begin{pmatrix} A_1^m & \sum\limits_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=m-1} A_1^i \alpha a_1^j \\ 0 & a_1^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & \gamma \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^m & \sum\limits_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=m-1} B_1^i \beta b_1^j \\ 0 & b_1^m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_1^m C_1 B_1^m & A_1^m C_1 \left(\sum\limits_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=m-1} B_1^i \beta b_1^j\right) + A_1^m \gamma b_1^m + \left(\sum\limits_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=m-1} A_1^i \alpha a_1^j\right) c_1 b_1^m \\ 0 & a_1^m c_1 b_1^m \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $A_1^m C_1 B_1^m = 0$, $A_1^m \gamma b_1^m = 0$, $a_1^m c_1 b_1^m = 0$.

Если $i \geq n_1$, тогда ясно, что $A_1^m C_1 \left(\sum\limits_{i\geq n_1,\, j\geq 0,\, i+j=m-1} B_1^i \beta b_1^j\right) = 0$.

Если $i \le n_1 - 1$, тогда поскольку $i + j = m - 1$, получаем $j \ge m_3$.

Тогда $A_1^m C_1 \left(\sum\limits_{0 \le i \le n_1 - 1,\, j \ge 0,\, i+j=m-1} B_1^i \beta b_1^j \right) = 0.$

Таким образом, $A_1^m C_1 \left(\sum\limits_{i \ge 0,\, j \ge 0,\, i+j=m-1} B_1^i \beta b_1^j \right) = 0.$

Точно также, разбивая сумму на $i \ge m_3$ и $i \le m_3 - 1$, можно доказать, что $\left(\sum\limits_{i \ge 0,\, j \ge 0,\, i+j=m-1} A_1^i \alpha a_1^j \right) c_1 b_1^m = 0$. Таким образом, $A^m C B^m = 0$. Следовательно, утверждение верно для $n = k$. Значит, $V_n(R)$ обобщенно коммутативно.

Доказательство в обратную сторону тривиально. □

Теорема 9. *R обобщенно полукоммутативно тогда и только тогда, когда* $S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$ *обобщенно полукоммутативно.*

Доказательство. Пусть R обобщенно полукоммутативно и $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S_3(R)$ такие, что $AB = 0$. Тогда $a_1 a_2 = 0$. Поскольку R обобщенно полукоммутативно, существуют натуральные n_1, n_2 такие, что $a_1^{n_1} R a_2^{n_2} = 0$. Пусть $n = 3(n_1 + n_2)$. Пусть x, y обозначают элементы A^n, B^n, стоящие в первой строке и третьем столбце, соответственно. Тогда

$$A^n = \begin{pmatrix} a_1^n & \sum\limits_{i \ge 0,\, j \ge 0,\, i+j=n-1} a_1^i b_1 a_1^j & x \\ 0 & a_1^n & \sum\limits_{i \ge 0,\, j \ge 0,\, i+j=n-1} a_1^i d_1 a_1^j \\ 0 & 0 & a_1^n \end{pmatrix},$$

$$B^n = \begin{pmatrix} a_2^n & \sum\limits_{i \ge 0,\, j \ge 0,\, i+j=n-1} a_2^i b_2 a_2^j & y \\ 0 & a_2^n & \sum\limits_{i \ge 0,\, j \ge 0,\, i+j=n-1} a_2^i d_2 a_2^j \\ 0 & 0 & a_2^n \end{pmatrix},$$

где

$$x = \left(\sum_{i \ge 0,\, j \ge 0,\, i+j=n-1} a_1^i c_1 a_1^j \right) + \left(\sum_{l=0}^{l=n-2} a_1^{(n-2)-l} \left[\sum_{i \ge 0,\, j \ge 0,\, i+j=l} b_1 a_1^i d_1 a_1^j \right] \right),$$

$$y=\left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_2^i c_2 a_2^j\right)+\left(\sum_{l=0}^{l=n-2} a_2^{(n-2)-l}\left[\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=l} b_2 a_2^i d_2 a_2^j\right]\right).$$

Пусть $C=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\in S_3(R)$. Тогда

$$A^nCB^n=\begin{pmatrix} a_1^n a a_2^n & * & z \\ 0 & a_1^n a a_2^n & ** \\ 0 & 0 & a_1^n a a_2^n \end{pmatrix},$$

где $*=a_1^n a\left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_2^i b_2 a_2^j\right)+a_1^n b a_2^n+\left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_1^i b_1 a_1^j\right) a a_2^n$,

$**=a_1^n a\left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_2^i d_2 a_2^j\right)+a_1^n d a_2^n+\left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_1^i d_1 a_1^j\right) a a_2^n$,

$$z=a_1^n a y+a_1^n b\left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_2^i d_2 a_2^j\right)+$$
$$+\left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_1^i b_1 a_1^j\right) a\left(\sum_{k\geq 0,\, l\geq 0,\, k+l=n-1} a_2^k d_2 a_2^l\right)+a_1^n c a_2^n+$$
$$+\left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_1^i b_1 a_1^j\right) d a_2^n+x a a_2^n.$$

Поскольку $a_1^{n_1}Ra_2^{n_2}=0$, получаем $a_1^n a a_2^n=0$, $a_1^n b a_2^n=0$, $a_1^n c a_2^n=0$, $a_1^n d a_2^n=0$. Тогда

$$a_1^n a y=a_1^n a\left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_2^i c_2 a_2^j\right)+$$
$$+a_1^n a\left(\sum_{l=0}^{l=n-2} a_2^{(n-2)-l}\left[\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=l} b_2 a_2^i d_2 a_2^j\right]\right).$$

Если $i\geq n_2$, ясно, что $a_1^n a\left(\sum_{i\geq n_2,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_2^i c_2 a_2^j\right)=0$, так как $a_1^{n_1}Ra_2^{n_2}=0$.

Если $i\leq n_2-1$, тогда поскольку $i+j=n-1$, получаем $j\geq n_2$.

Таким образом, $a_1^n a\left(\sum_{0\leq i\leq n_2-1,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_2^i c_2 a_2^j\right)=0$.

Следовательно, $a_1^n a \left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_2^i c_2 a_2^j \right) = 0.$

Если $l \geq 2n_2 - 1$, тогда поскольку $i + j = l$, получаем либо $i \geq n_2$, либо $j \geq n_2$, что дает нам $a_1^n a \left(\sum_{l=2n_2-1}^{l=n-2} a_2^{(n-2)-l} \left[\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=l} b_2 a_2^i d_2 a_2^j \right] \right) = 0$. Тогда $l \leq 2n_2 - 2$ влечет $(n-2) - l \geq n_2$, откуда $a_1^n a \left(\sum_{l=0}^{l=2n_2-2} a_2^{(n-2)-l} \left[\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=l} b_2 a_2^i d_2 a_2^j \right] \right) = 0.$

Таким образом,

$$a_1^n a \left(\sum_{l=0}^{l=n-2} a_2^{(n-2)-l} \left[\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=l} b_2 a_2^i d_2 a_2^j \right] \right) = 0.$$

Следовательно, $a_1^n a y = 0$. Аналогичным образом можно доказать, что $x a a_2^n = 0$.

Точно также, разбивая сумму на $\{i \geq n_1,\, k \geq n_2\}$, $\{i \geq n_1,\, k \leq n_2 - 1\}$, $\{i \leq n_1 - 1,\, k \geq n_2\}$, $\{i \leq n_1 - 1,\, k \leq n_2 - 1\}$, можно доказать равенство

$$\left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_1^i b_1 a_1^j \right) a \left(\sum_{k\geq 0,\, l\geq 0,\, k+l=n-1} a_2^k d_2 a_2^l \right) = 0.$$

Разбивая сумму на $i \geq n_1$ и $i \leq n_1 - 1$, можно доказать, что

$$\left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_1^i b_1 a_1^j \right) d a_2^n = 0, \quad \left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_1^i d_1 a_1^j \right) a a_2^n = 0,$$
$$\left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_1^i b_1 a_1^j \right) a a_2^n = 0.$$

Разбивая сумму на $i \geq n_2$ и $i \leq n_2 - 1$, можно доказать, что

$$a_1^n b \left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_2^i d_2 a_2^j \right) = 0, \quad a_1^n a \left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_2^i d_2 a_2^j \right) = 0,$$
$$a_1^n a \left(\sum_{i\geq 0,\, j\geq 0,\, i+j=n-1} a_2^i b_2 a_2^j \right) = 0.$$

Таким образом, $A^n C B^n = 0$. Следовательно, $S_3(R)$ обобщенно полукоммутативно. В обратную сторону заявленное утверждение получается тривиальным образом. $\square$

Пусть $R[A, B]$ обозначает $\{(a_1, a_2, \cdots, a_n, b, b, \cdots) : a_i \in A,\, b \in B, n \geq 1,\, 1 \leq i \leq n\}$. Если A — кольцо с единицей и B — подкольцо A, содержащие единицу A, тогда $R[A, B]$ будет кольцом относительно покомпонентных операций сложения и умножения.

Теорема 10. *Пусть A — произвольное кольцо и B — подкольцо A, содержащие единицу A. Тогда A обобщенно полукоммутативно тогда и только тогда, когда $R[A,B]$ обобщенно полукоммутативно.*

Доказательство. Пусть A обобщенно полукоммутативно и $f,g \in R[A,B]$ с $fg = 0$. Пусть $f = (a_1, a_2, \cdots, a_{n_1}, a, a, \cdots), g = (b_1, b_2, \cdots, b_{n_2}, b, b, \cdots)$, где $a_i, b_j \in A$, $a, b \in B$, $n_1, n_2 \geq 1$, $1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$. Возьмем $n = \max\{n_1, n_2\}$. Если n_1 будет максимумом, положим $b_i = b$ для всех i, $n_2 + 1 \leq i \leq n_1$, и если n_2 будет максимумом, положим $a_i = a$ для всех i, $n_1 + 1 \leq i \leq n_2$. Тогда $ab = 0$ и для всех i, $1 \leq i \leq n$, $a_i b_i = 0$. По предположению существуют натуральные k_i и $l_i\,(1 \leq i \leq n)$ и p, q такие, что $a_i^{k_i} R b_i^{l_i} = 0$ и $a^p R b^q = 0$. Пусть $m = \max\{k_1, k_2, \cdots, k_n, l_1, l_2, \cdots, l_n, p, q\}$. Тогда $f^m(R[A,B])g^m = 0$. Это показывает, что $R[A,B]$ обобщенно полукоммутативно. В обратную сторону заявленное утверждение получается тривиальным образом. □

Левый R-модуль M назовем *ниль-инъективным по Вею* [8], если для любого $0 \neq a \in N(R)$ существует натуральное n такое, что $a^n \neq 0$, и любой левый R-гомоморфизм из Ra^n в M продолжается до гомоморфизма из R в M.

Теорема 11. *Пусть R обобщенно полукоммутативно. Тогда R редуцируемо, если оно удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *R полупримитивно;*

2) *каждый простой сингулярный левый R-модуль ниль-инъективен по Вею;*

3) *каждый простой сингулярный правый R-модуль ниль-инъективен по Вею.*

Доказательство. Рассмотрим $0 \neq a \in R$ такое, что $a^2 = 0$.

Пусть R полупримитивно. Тогда $a \notin J(R)$, так что существует максимальный правый идеал M кольца R такой, что $a \notin M$, что в конечном итоге приводит к $x + ay = 1$ для некоторого $x \in M$, $y \in R$. Поскольку $aa = 0$ и R обобщенно полукоммутативно, $ay = 1 - x \in N(R)$ по предложению 2. Отсюда можно заключить, что $1 \in M$ — таким образом, получаем противоречие.

Пусть R удовлетворяет условию (2). Пусть L — максимальный левый идеал R, содержащий $l(a)$. Поскольку R абелево, то, как легко видеть, L — существенный левый идеал R, и по предположению R/L ниль-иньективен по Вею. Рассмотрим левый R-гомоморфизм $f : Ra \to R/L$, заданный по правилу $f(ra) = r + L$. Тогда по предположению существует левый R-гомоморфизм $g : R \to R/L$ такой, что $f(ra) = g(ra)$ для $r \in R$. Поэтому $1 + L = f(a) = g(a) = ag(1) = a(b + L)$ для некоторого $b \in R$ и, таким образом, $1 - ab \in L$. Поскольку $aa = 0$, по предложению 2, $ab \in N(R)$, заключаем, что $1 - ab$ обратим, что дает нам противоречие.

Пусть R удовлетворяет условию (3). Тогда существует максимальный существенный правый идеал K кольца R, содержащий $r(a)$. По предположению R/K ниль-иньективен по Вею. Рассуждая, как и в предыдущем абзаце, мы видим, что существует $b \in R$ такой, что $1 - ba \in K$ — это противоречие, поскольку $ba \in N(R)$. Таким образом, R редуцируемо. □

Кольцо R *регулярно (по фон Неймону)*, если для любого $a \in R$ существует некоторый $b \in R$ такой, что $a = aba$. R *строго регулярно*, если для любого $a \in R$ существует некоторый $b \in R$ такой, что $a = a^2 b$. R — *правое SF-кольцо* [9], если все его простые правые модули — гладкие. Известно, что регулярные кольца являются правыми SF-кольцами. Однако до настоящего времени неизвестно, являются ли правые SF-кольца регулярными.

Теорема 12. *Обобщенно полукоммутативное правое SF-кольцо сильно регулярно.*

Доказательство. Пусть R — обобщенно полукоммутативное, правое SF-кольцо. Поскольку R — правое SF-кольцо, $R/J(R)$ — также правое SF-кольцо (см. [10, предложение 3.2]). Покажем, что $R/J(R)$ — редуцированное кольцо. Предположим обратное. Тогда существует $a^2 \in J(R)$ такой, что $a \notin J(R)$. Если $l(a)R + J(R) = R$, Тогда $1 = b + \sum t_i r_i$, где $b \in J(R)$, $t_i \in l(a)$, $r_i \in R$, поэтому $a = ab + \sum at_i r_i$. Значит, для каждого i верно $(at_i)^2 = a(t_i a)t_i = 0$. Если $at_i \notin J(R)$ для некоторого i, то существует максимальный левый идеал L кольца R такой, что $at_i \notin L$. Поэтому $L + Rat_i = R$ и, следовательно, $1 = x + yat_i$ для некоторых $x \in L$, $y \in R$. Так как $at_i \in N_2(R)$, по предложению 2, $1 - x = yat_i \in N(R)$, тогда $1 \in L$, получаем противоречие. Таким образом, $at_i \in J(R)$ для всех i, то есть $\sum at_i r_i \in J(R)$, а значит, $a \in J(R)$, что противоречит тому, что $a \notin J(R)$. Итак, $l(a)R + J(R) \neq R$, поэтому существует максимальный правый идеал M кольца R, содержащий $l(a)R + J(R)$. Поскольку R — правое SF-кольцо и $a^2 \in J(R) \subseteq M$, то существует $c \in M$, для которого $a^2 = ca^2$, значит, $a - ca \in l(a) \subseteq M$, и, следовательно, $a \in M$. Тогда существует элемент $d \in M$ такой, что $a = da$. Что влечет за собой $1 - d \in l(a) \subseteq M$, следовательно $1 \in M$, а это противоречит тому, что $M \neq R$. Поэтому $R/J(R)$ — редуцированное кольцо. Значит, согласно [10, замечание 3.13], $R/J(R)$ — сильно регулярное кольцо, а поэтому R — квазидвойственное кольцо. А как квазидвойственное, SF-регулярное кольцо, R будет регулярным (см. [10, теорема 4.10]), что завершает доказательство. $\square$

Литература

1. *Zhou H.* Left SF-rings and regular rings // Comm. Algebra. 2007. Vol. 35. P. 3842–3850.

2. *Liang L., Wang L., Liu Z.* On a generalization of semicommutative rings // Taiwanese J. Math. 2007. Vol. 11, no. 5. P. 1359–1368.

3. *Wang L., Wei J.* Weakly semicommutative rings and strongly regular rings // Kyungpook Math. J. 2014. Vol. 54. P. 65–72.

4. *Ozen T., Agayev N., Harmanci A.* On a class of semicommutative rings // Kyungpook Math. J. 2011. Vol. 51. P. 283–291.

5. *Wang L., Wei J.* Central semicommutative rings // Indian J. Pure Appl. Math. 2014. Vol. 45, no. 1. P. 13–25.

6. *Du C., Wang L., Wei J.* On a generalization of semicommutative rings // Journal of Mathematical Research and Applications. 2014. Vol. 34, no. 3. P. 253–264.

7. *Liang Z., Gang Y.* On weakly reversible rings // Acta Math. Univ. Comenian. (N. S.). 2007. Vol. 76, no. 2. P. 189–182.

8. *Wei J. C., Chen J. H.* Nil-injective rings // Intern. Electron. J. Algebra. 2007. Vol. 2. P. 1–21.

9. *Ramamurthy V. S.* On the injectivity and flatness of certain cyclic modules // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 48. P. 21–25.

10. *Rege M. B.* On von Neumann regular rings and SF-rings // Math. Japonica. 1986. Vol. 31, no. 6. P. 927–936.

Статья поступила в редакцию 24 мая 2019 г.;
после доработки 2 сентября 2019 г.;
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Рой Дебрадж — PhD; debraj.hcu@gmail.com
Субеди Тикарам — PhD; tsubedi2010@gmail.com

Generalized semicommutative rings

D. Roy, T. Subedi

National Institute of Technology Meghalaya, India, Meghalaya, Shillong-793003

For citation: Roy D., Subedi T. Generalized semicommutative rings. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 91–103. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.110 (In Russian)

We call a ring R *generalized semicommutative* if for any a, $b \in R$, $ab = 0$ implies there exists positive integers m, n such that $a^m R b^n = 0$. We observe that the class of generalized semicommutative rings strictly lies between the class of central semicommutative rings and weakly semicommutative-I rings. Relationships are provided between generalized semicommutative rings and some known classes of rings. From an arbitrary generalized semicommutative ring, we produce many families of generalized semicommutative rings. Finally we provide some conditions for a generalized semicommutative ring to be reduced.

Keywords: semicommutative ring, generalized semicommutative ring.

References

1. Zhou H., “Left SF-rings and regular rings”, *Comm. Algebra* **35**, 3842–3850 (2007).
2. Liang L., Wang L., Liu Z., “On a generalization of semicommutative rings”, *Taiwanese J. Math.* **11**(5), 1359–1368 (2007).
3. Wang L., Wei J., “Weakly semicommutative rings and strongly regular rings”, *Kyungpook Math. J.* **54**, 65–72 (2014).
4. Ozen T., Agayev N., Harmanci A., “On a class of semicommutative rings”, *Kyungpook Math. J.* **51**, 283–291 (2011).
5. Wang L., Wei J., “Central semicommutative rings”, *Indian J. Pure Appl. Math.* **45**(1), 13–25 (2014).
6. Du C., Wang L., Wei J., “On a generalization of semicommutative rings”, *Journal of Mathematical Research and Applications* **34** (3), 253–264 (2014).
7. Liang Z., Gang Y., “On weakly reversible rings”, *Acta Math. Univ. Comenian. (N. S.)* **76** (2), 189–182 (2007).
8. Wei J. C., Chen J. H., “Nil-injective rings”, *Intern. Electron. J. Algebra* **2**, 1–21 (2007).
9. Ramamurthy V. S., “On the injectivity and flatness of certain cyclic modules”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **48**, 21–25 (1975).
10. Rege M. B., “On von Neumann regular rings and SF-rings”, *Math. Japonica* **31** (6), 927–936 (1986).

Received: May 24, 2019
Revised: September 2, 2019
Accepted: September 19, 2019

Authors’ information:

Debraj Roy — debraj.hcu@gmail.com
Tikaram Subedi — tsubedi2010@gmail.com