УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1
MSC 62G32

О второй «рекордной производной» последовательности экспоненциальных случайных величин*

В. Б. Невзоров[1], *А. В. Степанов*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта,
Российская Федерация, 236041, Калининград, ул. А. Невского, 14

Для цитирования: *Невзоров В. Б., Степанов А. В.* О второй «рекордной производной» последовательности экспоненциальных случайных величин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 69–76. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.107

Пусть Z_i $(i \geq 1)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих стандартную экспоненциальную функцию распределения H, а $Z(n)$ $(n \geq 1)$ — соответствующая последовательность экспоненциальных рекордов, полученная из последовательности Z_i $(i \geq 1)$. Назовем последовательность $Z(n)$ $(n \geq 1)$ первой «рекордной производной» последовательности Z_i $(i \geq 1)$. Известно, что величины $\nu_1 = Z(1), \nu_2 = Z(2) - Z(1), \ldots$ независимы и имеют функцию распределения H. Пусть $T(n)$ $(n \geq 1)$ — рекордные моменты в последовательности $\nu_1, \nu_2, \ldots$, а $Y(n) = Z(T(n))$ и $W(n) = Y(n) - Y(n-1)$ $(n \geq 1)$. Последовательность величин $Y(n)$ $(n \geq 1)$ (главный объект исследований данной работы) назовем второй «рекордной производной» последовательности Z_i $(i \geq 1)$. В настоящей работе выводятся распределения величин $T(n), Y(n)$ и $W(n)$ и ищется преобразование Лапласа величины $Y(n)$. В работе получен предельный результат для последовательности $Y(n)$ $(n \geq 1)$ и предложены методы генерирования величин $T(n)$ и $Y(n)$.

Ключевые слова: рекордные величины, экспоненциальное распределение, предельные теоремы, методы генерирования рекордов.

1. Введение. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с непрерывной функцией распределения F. Пользуясь величинами X_i $(i \geq 1)$, определим рекордные моменты $L(1) < L(2) < \ldots$ и рекордные величины $X(1) < X(2) < \ldots$ следующим образом:

$$\begin{aligned} L(1) &= 1, \quad X(1) = X_1, \\ L(n) &= \min\{j : j > L(n-1), X_j > X_{L(n-1)}\} \quad (n = 2, 3, \ldots), \\ X(n) &= X_{L(n)} \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Рекордные величины весьма популярны во многих областях человеческой деятельности. О различных вновь появившихся рекордных наблюдениях сообщают спортивные статистики, метеорологи, гидрологи, финансисты, геронтологи. Теория рекордов достаточно хорошо развита (см., например, монографии [1, 2]), но регулярно появляется необходимость в изучении новых рекордных схем, в рассматривании новых

*Работа В. Б. Невзорова поддержана РФФИ (грант № 18-01-00393).

моделей, отражающих те или иные неклассические ситуации, в которых для описания поведения рекордных последовательностей требуются новые приемы и новые результаты. Одна из таких ситуаций будет рассмотрена ниже.

В классической теории рекордов важное место занимают результаты, полученные для рекордов в исходных последовательностях равномерно и экспоненциально распределенных случайных величин. Дело в том, что в общем случае рекордные величины $X(1) < X(2) < \ldots$, связанные последовательными неравенствами между ними, представляют собой наборы заведомо зависимых случайных величин, к которым нельзя применить широко распространенные методы теории вероятностей, разработанные именно для независимых величин. В этой ситуации заметно выделяются рекорды, порожденные последовательностями равномерно или экспоненциально распределенных величин. Для них существуют удобные представления этих зависимых рекордных величин в виде сумм независимых случайных слагаемых или произведений независимых случайных множителей. Одно из таких представлений будет использовано ниже для дальнейшего развития теории рекордов, связанной с последовательностями экспоненциально распределенных величин.

В работе уже было отмечено, что важное место в теории рекордов занимают результаты и методы, развитые при изучении экспоненциальных рекордов. Приведем некоторые из них. Пусть $Z_1, Z_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих $E(1)$-экспоненциальное распределение с функцией распределения

$$H(x) = \max\{0, 1 - e^{-x}\} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

а $Z(1) = Z1 < Z(2) < \ldots$ — соответствующие экспоненциальные рекорды. Эту последовательность рекордов, которая порождена величинами $Z_1, Z_2, \ldots$, можно трактовать, как «производную» (в дальнейшем ее будем называть «первой производной») последовательности исходных случайных величин. Известен следующий классический результат (см., например, [1, с. 12] или [2, с. 105]).

Представление 1.1. *Для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеет место следующее соотношение:*

$$(Z(1), Z(2), \ldots, Z(n)) \stackrel{d}{=} (\nu_1, \nu_1 + \nu_2, \ldots, \nu_1 + \ldots + \nu_n), \tag{1.1}$$

в котором знак $\stackrel{d}{=}$ обозначает равенство по распределению, а $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — независимые одинаково распределенные величины, также имеющие $E(1)$-экспоненциальное распределение.

Соотношение (1.1) можно переписать в более удобном для дальнейших действий виде.

Представление 1.2. *Справедливы следующие равенства для приращений рекордов:*

$$(Z(1), Z(2) - Z(1), \ldots, Z(n) - Z(n-1)) \stackrel{d}{=} (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n).$$

Из представления 1.2 следует, что разности между соседними экспоненциальными рекордными значениями являются независимыми $E(1)$-экспоненциально распределенными случайными величинами. Отметим, что преобразование Смирнова позволяет во многих ситуациях некоторые результаты, полученные в случае, когда исходные величины имеют равномерные или экспоненциальные распределения, обобщить на случай рекордных величин $X(n)$ $(n \geq 1)$ в произвольных последовательностях $X_1, X_2, \ldots$ с общей непрерывной функцией распределения F. Справедливо соотношение

$$F(X(n)) \stackrel{d}{=} 1 - e^{-Z(n)},$$

из которого вытекает, что

$$X(n) \stackrel{d}{=} F^{-1}(1 - e^{-(\nu_1 + \ldots + \nu_n)}) \stackrel{d}{=} F^{-1}(1 - U_1 \ldots U_n),$$

где $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — независимые величины, имеющие $E(1)$-распределение, а $F^{-1}(x) = \{t: \ F(t) \geq x\}$ $(x \in (0,1))$ — функция, обратная функции распределения $F(x)$ и $U_1, \ldots, U_n$ — независимые равномерно распределенные на интервале $[0,1]$ величины.

Вернемся к представлению 1.2. Видим, что с разностями

$$Z(1), \ Z(2) - Z(1), \ Z(3) - Z(2), \ \ldots$$

можно работать, как с исходными случайными величинами $Z_1, Z_2, \ldots$ Рассмотрим теперь уже рекорды среди величин $\nu_1 = Z(1), \nu_2 = Z(2) - Z(1), \ldots$ и их взаимоотношения с исходными величинами $Z_1, Z_2, \ldots$ Обозначим через $T(1) = 1 < T(2) < \ldots$ рекордные моменты в последовательности $\nu_1, \nu_2, \ldots$ и также рассмотрим случайные величины

$$Y(1) = Z(1) = Z_1, \ Y(2) = Z(T(2)), \ Y_3 = Z(T(3)), \ \ldots$$

и

$$W(1) = Y(1) = Z_1, \ W(2) = Y(2) - Y(1), \ W(3) = Y(3) - Y(2), \ \ldots$$

Последовательность случайных величин $Y(n)$ $(n \geq 1)$ можно трактовать уже как вторую «рекордную производную» последовательности исходных величин $Z_1, Z_2, \ldots$ Величины $W(n)$ $(n \geq 1)$ являются приращениями величин $Y(n)$ $(n \geq 1)$.

Данная работа посвящена изучению свойств величин $T(n), Y(n)$ и $W(n)$. В параграфе 2 исследуются распределения величин $T(n), Y(n)$ и $W(n)$, ищется преобразование Лапласа величины $Y(n)$ и показывается, что последовательность векторов $(Y(n), T(n))$ образует цепь Маркова. В параграфе 3 получен предельный результат для последовательности $Y(n)$ $(n \geq 1)$. В параграфе 4 предложены методы генерирования величин $T(n)$ и $Y(n)$.

2. Распределения величин $T(n)$ и $Y(n)$. Поскольку распределения рекордных моментов одинаковы для любых непрерывных распределений F, то $T(n) \stackrel{d}{=} L(n)$. Откуда, в частности, следует (см., например, стр. 94 в книге [2]), что

$$P(T(n) = k) = \frac{| S_{k-1}^{n-1} |}{k!},$$

где S_k^n — числа Стирлинга первого рода, которые определяются равенствами

$$x(x-1) \ldots (x-k+1) = \sum_{n=0}^{k} S_k^n x^n.$$

В частном случае, при $n = 2$, справедливо

$$P(T(2) = k) = \frac{1}{k(k-1)} \quad (k \geq 2).$$

Производящая функция $\Pi_{T(n)}(s)$ величины $T(n)$ имеет вид

$$\Pi_{T(n)}(s) = Es^{T(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(1-s)} v^{n-1} e^{-v} dv \quad (0 \le s \le 1,\ n \ge 1), \tag{2.1}$$

а соответствующее преобразование Лапласа дается равенством

$$L_{Y(n)}(\lambda) = Ee^{-\lambda T(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(1-e^{-\lambda})} v^{n-1} e^{-v} dv \quad (\lambda > 0,\ n \ge 1).$$

Найдем распределение величины $Y(2)$. Воспользуемся тем, что сумма $\nu_1 + \ldots + \nu_k$ имеет гамма-распределение с параметрами $(k, 1)$ и получим, что

$$P(Y(2) \le y) = \sum_{k=2}^{\infty} P(Z(T(2)) \le y \mid T(2) = k) P(T(2) = k) =$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P(Z(k) \le y)}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!(k-1)} \int_0^y u^{k-1} e^{-u} du =$$
$$= \int_0^y e^{-u} \int_0^u \frac{e^v - 1}{v} dv du - \int_0^y \frac{e^{-u}(e^u - 1 - u)}{u} du.$$

Соответствующая плотность распределения имеет вид

$$f_{Y(2)}(y) = e^{-y} \int_0^y \frac{e^v - 1}{v} dv - 1/y + e^{-y}/y + e^{-y}.$$

Несложно также убедиться в том, что

$$EY(2) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{E(\nu_1 + \ldots + \nu_k)}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} = \infty.$$

Найдем теперь совместную плотность величин $Y(1)$ и $Y(2)$. Для этого рассмотрим понятие плотности-распределения. Пусть $F(x, y)$ — двумерная функция распределения вектора (X, Y), допускающая дифференцирование по переменной x. Назовем функцию $G(x, y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ плотностью-распределением вектора (X, Y). Пусть теперь $G_{Y(1),Y(2)}(y_1, y_2)$ — плотность-распределение вектора $(Y(1), Y(2))$, где плотность соответствует величине $Y(1)$, а распределение — величине $Y(2)$. Для $y_1 < y_2$ имеем

$$G_{Y(1),Y(2)}(y_1, y_2) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-y_1} P(\nu_2 + \ldots + \nu_k \le y_2 - y_1)}{k(k-1)} =$$
$$= e^{-y_1} \int_0^{y_2 - y_1} \frac{1 - e^{-u}(1 + u)}{u^2} du.$$

Отсюда получаем, что

$$f_{Y(1),Y(2)}(y_1, y_2) = \frac{e^{-y_1}(1 - e^{-y_2 + y_1}[1 + y_2 - y_1])}{(y_2 - y_1)^2} \quad (y_2 > y_1 > 0).$$

Известно, что последовательность рекордных величин $X(n)$ $(n \geq 1)$ образует цепь Маркова. Покажем, что последовательность векторов $(Y(n), T(n))$ $(n \geq 1)$ также образует цепь Маркова. Пусть $Q_{Y(1),\dots,Y(n),T(2),\dots,T(n)}(y_1,\dots,y_n,i_2,\dots,i_n)$ — совместная плотность-распределение величин $Y(1),\dots,Y(n),T(2),\dots,T(n)$, где плотность соответствует величинам $Y(1),\dots,Y(n)$, а распределение — величинам $T(2),\dots,T(n)$. Пусть $q_{Y(1),\dots,Y(n-1),Y(n)|T(2),\dots,T(n)}(y_1,\dots,y_n \mid i_2,\dots,i_n)$ — условная плотность величин $Y(1),\dots,Y(n)$ при условии $\{T(2)=i_2,\dots,T(n)=i_n\}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&Q_{Y(1),\dots,Y(n),T(2),\dots,T(n)}(y_1,\dots,y_n,i_2,\dots,i_n) = \\
&\quad = q_{Y(1),\dots,Y(n)|T(2),\dots,T(n)}(y_1,\dots,y_n \mid i_2,\dots,i_n) P(T(2)=i_2,\dots,T(n)=i_n) = \\
&\quad = \left(e^{-y_1} \prod_{j=2}^{n} \frac{e^{-y_j+y_{j-1}}(y_j-y_{j-1})^{i_j-i_{j-1}-1}}{(i_j-i_{j-1}-1)!} \right) \frac{1}{(i_2-1)\dots(i_{n-1}-1)(i_n-1)i_n} = \\
&\qquad\qquad = \left(e^{-y_n} \prod_{j=2}^{n} \frac{(y_j-y_{j-1})^{i_j-i_{j-1}-1}}{(i_j-i_{j-1}-1)!} \right) \frac{1}{(i_2-1)\dots(i_{n-1}-1)(i_n-1)i_n},
\end{aligned}
$$

где $i_1 = 1$. Отсюда находим условную плотность-распределение вектора $(Y(n), T(n))$

$$
\begin{aligned}
&Q_{Y(n),T(n)|Y(1),\dots,Y(n-1),T(2),\dots,T(n-1)}(y_n,i_n \mid y_1,\dots,y_{n-1},i_2,\dots,i_{n-1}) = \\
&\qquad\qquad = e^{-y_n+y_{n-1}} \frac{(y_n-y_{n-1})^{i_n-i_{n-1}-1} i_{n-1}}{(i_n-i_{n-1}-1)!(i_n-1)i_n}.
\end{aligned}
$$

Поскольку условная плотность-распределение $(Y(n), T(n))$ не зависит от величин $y_1,\dots,y_{n-2},i_2,\dots,i_{n-2}$, заключаем, что последовательность векторов $(Y(n), T(n))$ $(n \geq 1)$ образует цепь Маркова. Здесь несложно показать, что последовательность $Y(n)$ $(n \geq 1)$ уже не образует цепь Маркова.

Найдем преобразование Лапласа величины $Y(n)$ $(n \geq 1)$. Случайную величину $Y(n)$ можно представить как сумму случайного числа $T(n)$ независимых $E(1)$-экспоненциально распределенных случайных слагаемых ν_i, у каждого из которых преобразование Лапласа имеет вид $L_{\nu_i}(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}$. Если учесть, что производящая функция $\Pi_{T(n)}(s)$ величины $T(n)$ дается равенством (2.1), то получаем, что

$$
L_{Y(n)}(\lambda) = \Pi_{T(n)}\left(\frac{1}{\lambda+1}\right) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(\lambda/(\lambda+1))} v^{n-1} e^{-v} dv.
$$

Распределение величины $W(2)$ ищется из следующих соотношений:

$$
\begin{aligned}
P(W(2) \leq x) &= \sum_{k=2}^{\infty} P(W(2) \leq x \mid T(2)=k) P(T(2)=k) = \\
&\quad = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P(Z(k)-Z(1) \leq x)}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P(\nu_2+\ldots+\nu_k \leq x)}{k(k-1)} = \\
&\qquad = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^x u^{k-2} e^{-u} du = 1 + \frac{e^{-x}-1}{x}.
\end{aligned}
$$

Отметим, что случайные величины $Z(1)$ и $W(n)$ ($n \geq 2$) независимы, но уже любая пара $W(k)$ и $W(m)$ ($k < m$) представляет собой зависимые случайные величины. Видим также, что величины $T(2), Y(2)$ и $W(2)$ имеют бесконечные математические ожидания. Это же высказывание относится и к остальным случайным величинам $T(n), Y(n)$ и $W(n)$ ($n \geq 3$).

3. Предельный результат для $Y(n)$.

Утверждение. *Справедливо следующее асимптотическое соотношение:*

$$\frac{Y(n)}{e^n} \xrightarrow{p} \log 2 \quad (n \to \infty).$$

Доказательство. Как уже было показано,

$$L_{Y(n)}(\lambda) = Ee^{-\lambda Y(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(\lambda/(\lambda+1))} v^{n-1} e^{-v} dv.$$

Положим в последнем соотношении $\lambda = e^{-n}$. Несложно убедиться в том, что

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(\lambda/(\lambda+1))} v^{n-1} e^{-v} dv \sim \frac{1}{(n-1)!} \int_0^n v^{n-1} e^{-v} dv \quad (n \to \infty).$$

Для экспоненциальных рекордов $Z(n)$ известно, что

$$P\left(\frac{Z(n)-n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Выберем в последнем асимптотическом соотношении x равным нулю. Тогда

$$P(Z(n) \leq n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^n v^{n-1} e^{-v} dv \to 1/2 \quad (n \to \infty).$$

□

4. Генерирование величин $Y(n)$. В этом параграфе предложим два метода генерирования величин второй «рекордной производной» последовательности экспоненциальных случайных величин. Первый метод будет прямым методом генерирования.

Первый метод генерирования величин $Y(n)$. Генерируются экспоненциальные величины ν_i ($1 \leq i \leq n$), равные по распределению величинам $Z(i) - Z(i-1)$ ($1 \leq i \leq n$). Среди величин ν_i фиксируются рекордные величины. Пусть $T(n) = k$. Тогда полагаем $Y(n) = \nu_1 + \ldots + \nu_k$, где ν_i ($1 \leq i \leq k$) — генерации стандартной экспоненциальной случайной величины.

Отметим недостатки первого метода. Метод является ресурсозатратным и не позволяет эффективно генерировать величины $Y(n)$ при «больших» значениях n. Приведем второй метод генерирования величин второй «рекордной производной», который более эффективен и позволяет генерировать величины $Y(n)$ для «больших» значений n.

Второй метод генерации величин $Y(n)$ основан на алгоритме 2.1 из работы [3] и использует рекуррентный подход. Напомним, что $T(n) \stackrel{d}{=} L(n)$. В работе [3] было показано, что последовательность $L(n)$ может генерироваться при помощи следующего рекуррентного соотношения: $L(n+1) = \left[\frac{L(n)}{U}\right] + 1$, где [ ] — целая часть числа, а U — генерация случайного числа. Напомним также, что $L(1) = 1$.

Второй метод генерирования величин $Y(n)$***.*** Полагаем $T(1) = 1$. Генерируем величины $T(n)$ при помощи рекуррентного соотношения $T(n+1) = \left[\frac{T(n)}{U}\right] + 1$. Пусть $T(n) = k$. Полагаем $Y(n)$ равным $\nu_1 + \ldots + \nu_k$, где ν_i $(1 \le i \le n)$ — генерации стандартных экспоненциальных случайных величин.

Результаты одной из генераций величин $Y(n)$, полученные при помощи второго метода, приведем в таблице.

Y(1)	Y(2)	Y(3)	Y(4)	Y(5)	Y(6)	Y(7)	Y(8)	Y(9)	Y(10)
0.39	4.60	32.35	41.89	512.17	5195.87	58724.22	67044.42	128243.61	567728.15

Y(11)	Y(12)	Y(13)	Y(14)	Y(15)	Y(16)	Y(17)	Y(18)	Y(19)	Y(20)
95141.27	834438.55	967343.27	983556.66	2871485.35	6775320.15	15068643.65	61441230.35	148457404.46	309387616.31

Литература

1. *Arnold B., Balakrishnan N., Nagaraja H.* Records. New York: Wiley, 1998.
2. *Невзоров В. Б.* Рекорды. Математическая теория. М.: Фазис, 2000.
3. *Пахтеев А. И., Степанов А. В.* Генерирование больших последовательностей нормальных рекордных величин и максимумов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 431–440.

Статья поступила в редакцию 29 апреля 2019 г.;
после доработки 9 июня 2019 г.;
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Невзоров Валерий Борисович — д-р физ.-мат. наук, проф.; valnev@mail.ru
Степанов Алексей Васильевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; alexeistep45@mail.ru

On the second record derivative of a sequence of exponential random variables*

V. B. Nevzorov[1], *A. V. Stepanov*[2]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Immanuel Kant Baltic Federal University, ul. A. Nevskogo, 14, Kaliningrad, 236041, Russian Federation

For citation: Nevzorov V. B., Stepanov A. V. On the second record derivative of a sequence of exponential random variables. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 69–76.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.107 (In Russian)

Let Z_i $(i \ge 1)$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with standard exponential distribution H and $Z(n)$ $(n \ge 1)$ be the corresponding sequence of exponential records associated with Z_i $(i \ge 1)$. Let us call the sequence $Z(n)$ $(n \ge 1)$ the first "record derivative" of the sequence Z_i $(i \ge 1)$. It is

*The work of V. B. Nevzorov is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant N 18-01-00393).

known that $\nu_1 = Z(1), \nu_2 = Z(2) - Z(1), \ldots$ are independent variables with distribution H. Let $T(n)$ $(n \geq 1)$ be record times obtained from the sequence $\nu_1, \nu_2, \ldots$ and $Y(n) = Z(T(n)), W(n) = Y(n) - Y(n-1)$ $(n \geq 1)$. Let us call the sequence $Y(n)$ $(n \geq 1)$ (the main objective of the research of the present paper) the second "record derivative" of the sequence Z_i $(i \geq 1)$. In the present paper, we find the distributions of $T(n), Y(n), W(n)$ and study the Laplace transform of $Y(n)$. A limit result for the sequence $Y(n)$ $(n \geq 1)$ is obtained in the paper. We also propose some methods of generation of $T(n)$ and $Y(n)$.

Keywords: record values, exponential distribution, limit results; methods of record generation.

References

1. Arnold B., Balakrishnan N., Nagaraja H., *Records* (Wiley, New York, 1998).

2. Nevzorov V. B., *Records. Mathematical theory* (Phasis Publ., Moscow, 2000). (In Russian). English translation in: *Translations of Mathematical Monographs* (American Math. Society, 2001).

3. Pakhteev A. I., Stepanov A. V., "Generating Large Sequences of Normal Maxima via Record Values", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **51** (3), 260–266 (2018). https://doi.org/10.3103/S106345411803007X

Received: April 29, 2019
Revised: June 9, 2019
Accepted: September 19, 2019

Authors' information:

Valery B. Nevzorov — valnev@mail.ru
Alexei V. Stepanov — alexeistep45@mail.ru