УДК 512.55
MSC 16D50
Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1

Об одном обобщении самоинъективных колец

И. М. Зильберборд, С. В. Сотников

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Зильберборд И. М., Сотников С. В.* Об одном обобщении самоинъективных колец // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 60–68. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.106

Мы обобщаем понятие самоинъективного слева (справа) кольца, вводя в рассмотрение кольца, которые как левый (соответственно правый) модуль над собой являются прямой суммой инъективного модуля и полупростого модуля. Такие кольца мы называем полуинъективными слева (справа) и исследуем их свойства при помощи двустороннего пирсовского разложения данного кольца. В нашей работе получено описание полуинъективных слева нётеровых слева колец: доказано, что любое такое кольцо раскладывается в прямое произведение самоинъективного (слева и справа) кольца и нескольких факторколец (специального вида) колец верхнетреугольных матриц над телами. Из этого описания следует, что для полуинъективных слева колец верен аналог классического результата для самоинъективных колец: любое полуинъективное слева нётерово слева кольцо также полуинъективно справа и является двусторонне артиновым кольцом.

Ключевые слова: инъективный модуль, полупростой модуль, самоинъективное кольцо, пирсовское разложение.

1. Введение. Одним важным классом колец являются самоинъективные кольца. Напомним, что кольцо R называется самоинъективным слева (справа), если R — инъективный левый (правый) R-модуль. Этот класс колец хорошо изучен и включает в себя множество различных примеров, в частности, групповые алгебры конечных групп над полями (см. [1, примеры 4.12.1, 4.12.2]). Известно, что любое самоинъективное слева нётерово слева кольцо также самоинъективно справа и является двусторонне артиновым кольцом (см., например, [1, лемма 4.12.10, теорема 4.12.14*]).

В данной работе производится попытка расширения этого класса в рамках класса нётеровых слева колец в духе открытой проблемы из книги А. А. Туганбаева [2, проблема 16.14]. Вводится понятие полуинъективного слева (или справа) кольца, обсуждаются его свойства, получено полное описание полуинъективных слева нётеровых слева колец. А именно, такое кольцо раскладывается в прямое произведение самоинъективного кольца и нескольких факторколец (специального вида) колец верхнетреугольных матриц над телами.

Наше описание позволяет установить, что любое полуинъективное слева нётерово слева кольцо также полуинъективно справа и является двусторонне артиновым кольцом.

В работе рассматриваются только ассоциативные кольца с 1. Если не оговорено противное, все модули — левые. Также мы рассматриваем произвольный левый модуль как правый модуль над своим кольцом эндоморфизмов.

2. Определение полуинъективного кольца. Назовем кольцо R *полуинъективным слева*, если R как левый модуль над собой можно представить в виде прямой суммы полупростого и инъективного модулей. Отметим, что если эти прямые слагаемые — двусторонние идеалы кольца R, то R представляется в виде прямого произведения полупростого кольца и самоинъективного слева кольца. Заметим, что в этом случае кольцо R самоинъективно слева.

Аналогично вводится понятие *полуинъективного справа* кольца.

Простейшим примером полуинъективного (слева) кольца, которое при этом не самоинъективно (слева), является кольцо верхнетреугольных матриц второго порядка с коэффициентами, принадлежащими некоторому телу T:

$$R = \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Мы покажем далее в теореме 1, что кольцо R представляется в виде прямой суммы простого неинъективного и неразложимого инъективного левых R-модулей тогда и только тогда, когда оно изоморфно кольцу вида (1).

3. Пирсовское разложение кольца. Отметим, что описанный выше пример не случайно приводится в матричном виде, двустороннее пирсовское разложение помогает описать некоторые важные свойства таких колец.

Далее считаем, что рассматриваемое нами полуинъективное слева кольцо R не является самоинъективным слева. Пусть R как левый модуль над собой представляется в виде прямой суммы полупростого модуля M и инъективного модуля I. Зафиксируем какое-нибудь разложение модуля $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M_i$, где все M_i — простые модули. Для определенности будем далее предполагать, что для любого i модуль M_i не инъективен. Тогда в силу теоремы Крулля—Шмидта в любом разложении M в прямую сумму простых модулей среди прямых слагаемых нет инъективных.

Обозначим через e_M, e_I ортогональные идемпотенты, соответствующие прямым слагаемым M и I; тогда $M = Re_M, I = Re_I$.

Будем использовать эти обозначения на протяжении всей статьи.

Перейдем теперь к изучению свойств кольца R, исходя из соответствующего пирсовского разложения. Представим R в матричном виде:

$$R = \begin{pmatrix} e_M R e_M & e_M R e_I \\ e_I R e_M & e_I R e_I \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря, кольцо R изоморфно кольцу матриц вида

$$\begin{pmatrix} End_R(M) & Hom_R(M, I) \\ Hom_R(I, M) & End_R(I) \end{pmatrix},$$

где, отметим, умножение гомоморфизмов записывается в порядке, обратном композиции: $f \cdot g = g \circ f$.

Учитывая, что у M нет ненулевых инъективных подмодулей, можно сразу отметить следующее свойство, упрощающее пирсовское разложение.

Утверждение 1. $Hom_R(I, M) = 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in Hom_R(I, M) \setminus \{0\}$. Тогда в силу полупростоты модуля M $Im(\varphi)$ — прямое слагаемое M, и потому $Im(\varphi)$ проективен. Следовательно, $Im(\varphi)$ — прямое слагаемое модуля I. Поэтому $Im(\varphi)$ инъективен, и согласно нашим предположениям о модуле M имеем $\varphi = 0$. □

Замечание 1. Итак, R изоморфно кольцу матриц вида

$$\begin{pmatrix} End_R(M) & Hom_R(M, I) \\ 0 & End_R(I) \end{pmatrix},$$

где кольцо $End_R(M) \simeq e_M R e_M$ классически полупросто в силу полупростоты модуля M.

Замечание 2. Наличие 0 на левой нижней позиции, как будет видно далее, заметно упрощает работу, если рассматривать R как кольцо формальных матриц. Например, не нужно задумываться над тем, как устроены гомоморфизмы, действующие на тензорном произведении бимодулей $Hom_R(M, I) \otimes Hom_R(I, M) \to End_R(M)$ и $Hom_R(I, M) \otimes Hom_R(M, I) \to End_R(I)$, они будут нулевыми.

4. Случай двух идемпотентов. В данном параграфе рассматривается случай, когда модули M и I оказываются неразложимыми, в частности, модуль M прост. Целью этого параграфа является описание всех таких колец, не являющихся самоинъективными слева.

Теорема 1. *Следующие условия равносильны для кольца R:*

(1) R как левый модуль над собой раскладывается в прямую сумму простого модуля M и неразложимого инъективного модуля I, причем M не инъективен;

(2) R изоморфно кольцу матриц вида $\begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}$ для некоторого тела T.

Доказательство. Предположим сначала, что выполнено условие (1). Определим $T = End_R(M)$ и заметим, что согласно лемме Шура T — тело. Кроме того, так как $e_I R e_M = 0$, то $T \simeq End_{e_M R e_M}(M)$.

Рассмотрим теперь в чуть более общей ситуации $Hom_R(M, I)$ как бимодуль.

Утверждение 2. *Пусть R — произвольное кольцо, M — простой R-модуль, I — такой неразложимый инъективный R-модуль, что $Hom_R(M, I) \neq \{0\}$, $T = End_R(M)$, $L = End_R(I)$. Тогда $Hom_R(M, I)$ прост как левый T-модуль и как правый L-модуль.*

Доказательство. Так как модуль M прост, то любой ненулевой гомоморфизм $g \in Hom_R(M, I)$ является инъекцией, а его образ — простой модуль, изоморфный модулю M. Пусть $g, g_0 \in Hom_R(M, I) \setminus \{0\}$. В силу однородности модуля I получаем, что $Im(g) \cap Im(g_0) \neq 0$ и, следовательно, $Im(g) = Im(g_0)$. Пусть $M_1 = Im(g_0)$, $\tau : M_1 \to I$ — соответствующее вложение подмодуля M_1 в I.

Ясно, что $g = \tau \circ \tilde{g}$, $g_0 = \tau \circ \tilde{g}_0$, где $\tilde{g}, \tilde{g}_0 : M \to M_1$ — некоторые изоморфизмы. Следовательно, существует $h \in T$ такой, что $\tilde{g} = \tilde{g}_0 \circ h$, и потому $g = g_0 \circ h = h \cdot g_0$.

Заметим также, что $\tilde{g} = s \circ \tilde{g}_0$ для некоторого гомоморфизма $s : M_1 \to M_1$. В силу инъективности модуля I существует $f \in L$ такой, что $f \circ \tau = \tau \circ s$. Остается заметить, что тогда $g = \tau \circ s \circ \tilde{g}_0 = f \circ \tau \circ \tilde{g}_0 = f \circ g_0$, иначе говоря, $g = g_0 \cdot f$. □

Следствие 1. *В условиях утверждения 2 левые T-модули $Hom_R(M,I)$ и T изоморфны.*

Доказательство. Следует из того, что T — тело. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы и перейдем к исследованию кольца $End_R(I)$. Обозначим $S = Hom_R(M,I)$, $L = End_R(I)$, и представим кольцо R в следующем виде:

$$R = \begin{pmatrix} T & S \\ 0 & L \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим некоторый левый R-модуль X. Запишем его также в матричном виде:

$$X = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Здесь B — левый L-модуль, A — левый T-модуль, причем задано отображение $\widetilde{f} : S \otimes_L B \to A$, определяющее умножение элементов S на элементы B.

Учитывая сопряженность функторов Hom и $\otimes$, можно считать, что это умножение задано при помощи отображения $f : B \to Hom_R(e_M R e_I, A) = Hom_{e_M R e_M}(e_M R e_I, A)$. Заметим, что f является гомоморфизмом левых L-модулей.

Переформулируем для нужного нам случая критерий инъективности для модуля над кольцом «формальных» матриц (см. [3, следствие 5.5.2]).

Критерий. *Левый модуль $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ над кольцом $\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & L \end{pmatrix}$ инъективен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*
1) A — *инъективный T-модуль,*
2) $Ann(S) = \{b \in B | Sb = 0\}$ — *инъективный L-модуль,*
3) $f : B \to Hom_T(S, A)$ — *эпиморфизм.*

Применим этот критерий к модулю $I = Re_I$, тогда $A = S$ и $B = L$. Непосредственно проверяется, что соответствующий эпиморфизм $f : L \to End_T(S) = End_R(S)$ является гомоморфизмом колец. Заметим также, что $Ker(f) = Ann(S)$.

Докажем, что f — изоморфизм. Действительно, модуль $I = \begin{pmatrix} S \\ L \end{pmatrix}$ содержит два подмодуля $\begin{pmatrix} 0 \\ Ann(S) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix}$ с нулевым пересечением. В силу однородности модуля I один из этих подмодулей нулевой. Но в случае $S = 0$ модуль M был бы инъективным R-модулем, что противоречит условию. Следовательно, $Ann(S) = 0$.

Итак, мы получили, что кольца L и $End_T(S)$ изоморфны. Согласно следствию 1 левые T-модули S и T изоморфны, и потому кольцо $L \simeq End_T(T) \simeq T$.

Используя полученные изоморфизмы, можем предполагать, что R — кольцо матриц вида

$$\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & T \end{pmatrix},$$

где S — (T,T)-бимодуль, причем как левый T-модуль $S = T$, а как правый T-модуль S изоморфен T и, в частности, прост.

Пусть $t \star t_1$ — соответствующее произведение элемента $t \in S$ на $t_1 \in T$. Так как S — бимодуль, а $End_T({}_T T) \simeq T$, отображение $\Phi : T \to T$ такое, что $\Phi(t_1) = 1 \star t_1$, является мономорфизмом колец. Запишем $t \star t_1 = (t \cdot 1) \star t_1 = t \cdot (1 \star t_1) = t \cdot \Phi(t_1)$. Поскольку S_T порождается любым своим элементом (и, в частности, 1), Φ — изоморфизм.

Но тогда остается заметить, что отображение $\overline{\Phi} : \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix} \longrightarrow R$, сопоставляющее матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ матрицу $\begin{pmatrix} \Phi(a) & \Phi(b) \\ 0 & c \end{pmatrix}$, является изоморфизмом колец.

Теперь покажем, что верна обратная импликация. Пусть $R = \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}$. Ясно, что $Ann(T) = \{0\}$, а любой ненулевой гомоморфизм левых T-модулей $f : T \longrightarrow End_T(T)$ сюръективен. Следовательно, выполнены условия критерия. □

Следствие 2. *Если кольцо R полуинъективно слева (но не самоинъективно слева), и его разложение из определения полуинъективного кольца содержит лишь два неразложимых слагаемых, то R полуинъективно справа и двусторонне артиново.*

Доказательство. Это следует из явного описания в теореме 1. □

5. Нётеровы слева полуинъективные слева кольца. В данном параграфе будем дополнительно предполагать, что кольцо R нётерово слева. Тогда любой инъективный левый R-модуль (и, в частности, рассматриваемый нами левый идеал I) раскладывается в прямую сумму неразложимых слагаемых (см., например, [4, теорема 25.6]). Это главное из того, что нам дает условие нётеровости R слева.

Замечание 3. Поскольку кольца эндоморфизмов неразложимых инъективных модулей локальны [4, лемма 25.4], а кольца эндоморфизмов простых модулей являются телами в силу леммы Шура, то по теореме Крулля—Шмидта—Ремака—Адзумаи [4, теорема 12.6] разложение любого модуля в прямую сумму модулей таких видов единственно с точностью до перестановки изоморфных слагаемых.

Так как кольцо R Морита эквивалентно своему базисному кольцу, мы можем предполагать, что само кольцо R раскладывается в прямую сумму неразложимых слагаемых, среди которых нет попарно изоморфных. Таким образом,

$$R = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots M_k \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \dots I_l,$$

где все модули M_i — простые, но не инъективные, все модули I_j — неразложимые инъективные, причем $M_i \not\simeq M_j$ при $i \neq j$, $I_m \neq I_n$ при $m \neq n$.

Замечание 4. Рассмотрим теперь соответствующее пирсовское разложение кольца R:

$$\begin{pmatrix} End(M_1) & Hom(M_1,M_2) & \dots & Hom(M_1,M_k) & Hom(M_1,I_1) & \dots & Hom(M_1,I_l) \\ Hom(M_2,M_1) & End(M_2) & \dots & Hom(M_2,M_k) & Hom(M_2,I_1) & \dots & Hom(M_2,I_l) \\ \vdots & & & & & & \\ Hom(M_k,M_1) & Hom(M_k,M_2) & \dots & End(M_k) & Hom(M_k,I_1) & \dots & Hom(M_k,I_l) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & End(I_1) & \dots & Hom(I_1,I_l) \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Hom(I_l,I_1) & \dots & End(I_l) \end{pmatrix}$$

(все гомоморфизмы — левых R-модулей).

Итак, мы можем фиксировать полный ортогональный набор неразложимых идемпотентов $e_{M_1}, e_{M_2}, \ldots, e_{M_k}, e_{I_1}, e_{I_2}, \ldots, e_{I_l}$ такой, что $Re_{M_s} = M_s$, $Re_{I_j} = I_j$, сразу предполагая, что для любых идемпотентов e, f из этого набора $eRf = Hom_R(A, B)$, где e соответствует модулю A, f — модулю B. Кроме того, для определенных ранее идемпотентов e_M, e_I имеем $e_M = e_{M_1} + e_{M_2} + \ldots + e_{M_k}$, $e_I = e_{I_1} + e_{I_2} + \ldots + e_{I_l}$, $M = Re_M$, $I = Re_I$, $S = e_M Re_I$. Обозначим также кольцо $L = e_I Re_I$, и напомним обозначение $T = e_M Re_M$.

Утверждение 3. *Отображение, сопоставляющее M_i такой модуль I_j, что $Hom_R(M_i, I_j) \neq 0$, корректно определено и является инъекцией.*

Доказательство. Сначала отметим, что если для некоторого i и любого j $Hom_R(M_i, I_j) = 0$, то кольцо R раскладывается в прямое произведение колец, и модуль M_i инъективен вопреки нашим предположениям. Если же $Hom_R(M_i, I_j) \neq 0$, то ясно, что I_j является инъективной оболочкой M_i. Так как инъективная оболочка модуля единственна с точностью до изоморфизма, получаем, что данное отображение корректно определено. Кроме того, $Im(M_i)$ — единственный простой подмодуль в I_j (см. доказательство утверждения 2), поэтому это отображение — инъекция. □

Замечание 5. Ясно, что образ данного отображения равен $\{I_j | Se_{I_j} \neq 0\}$.

Упростим матрицу из замечания 4 уже известными методами теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть R — нётерово слева полуинъективное слева не самоинъективное слева кольцо. Тогда R Морита эквивалентно кольцу матриц вида*

$$\begin{pmatrix}
T_1 & 0 & \ldots & 0 & S_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots \\
0 & 0 & \ldots & T_k & 0 & \ldots & S_k & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & L_1 & \ldots & 0 & L_{1,k+1} & \ldots & L_{1,l} \\
\vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & L_k & L_{k,k+1} & \ldots & L_{k,l} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & L_{k+1,k+1} & \ldots & L_{k+1,l} \\
\vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & L_{l,k+1} & \ldots & L_{l,l}
\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $T_1, \ldots, T_k$ — тела, $S_j \simeq T_j$ как левый T_j-модуль и $S_j \cdot L_{j,i} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала первые k строк матрицы, полученной при помощи пирсовского разложения кольца R. Так как в наших предположениях различные простые прямые слагаемые не изоморфны между собой, имеем $Hom_R(M_i, M_j) = 0$ для $i \neq j$. Используя утверждение 3, перенумеруем при необходимости модули $I_1, \ldots, I_l$ (и соответствующие им идемпотенты) так, чтобы $Hom_R(M_j, I_j) \neq 0$. Теперь для любого $j > k$ имеем $Se_{I_j} = 0$, а для любого $j \leqslant k$ получаем, что $Se_{I_j} = e_{M_j} Se_{I_j} \neq 0$. Кроме того, в силу следствия 1 $S_j = Hom_R(M_j, I_j)$ изоморфен $T_j = End_R(M_j)$ как левый модуль над телом T_j.

Изучим теперь правый аннулятор $Ann(S)$ бимодуля S. Пусть $j \leqslant k$, M' — образ некоторого мономорфизма $M_j \longrightarrow I_j$, и $t \in Re_{I_j} \setminus \{0\}$. Заметим, что Rt — ненулевой подмодуль однородного модуля I_j, а M' — простой подмодуль I_j, поэтому $M' \subset Rt$. Поскольку $M_j = Re_{M_j}$, имеем $e_{M_j} Rt \neq 0$ и, следовательно, $St \neq 0$.

Если, в частности, $t \in e_{I_i}Re_{I_j}\backslash\{0\}$, причем $i \neq k$, то $e_{M_j}Rt \subset (e_{M_j}Re_{I_i})Re_{M_j} = 0$. В силу предыдущего рассуждения в этом случае имеем $e_{I_i}Re_{I_j} = 0$. Поэтому столбец с номером $k+j$ действительно имеет указанный в условии вид.

Кроме того, если $x \in Ann(S)$, то ясно, что для $j \leqslant k$ $xe_{I_j} = 0$. Таким образом, $Ann(S) = \overset{l}{\underset{k+1}{\oplus}} Re_{I_j} = \overset{l}{\underset{k+1}{\oplus}} Le_{I_j}$. □

Теорема 3. *Пусть R — неразложимое нётерово слева полуинъективное слева самобазисное кольцо. Тогда R либо самоинъективно, либо изоморфно факторкольцу кольца верхнетреугольных матриц некоторого порядка над некоторым телом K по идеалу*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & K & K & K \dots K \\ 0 & 0 & 0 & K & K \dots K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K \dots K \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Будем использовать обозначения и результаты из предыдущей теоремы. Докажем сначала, что можно считать, что в матрице (2) $S_i = L_i = T_i$ для любого $i \leqslant k$. Перенумеруем идемпотенты в нашем наборе (переставив e_{I_i} на второе место) так, чтобы кольцо R имело вид $\begin{pmatrix} T_i' & S_i' \\ 0 & L_i' \end{pmatrix}$, где $T_i' = \begin{pmatrix} T_i & S_i \\ 0 & L_i \end{pmatrix}$. Применив критерий к R-модулю I_i, получим, что левый T_i'-модуль $\begin{pmatrix} S_i \\ L_i \end{pmatrix}$ инъективен. Кроме того, ясно, что $\begin{pmatrix} T_i \\ 0 \end{pmatrix}$ прост как левый T_i'-модуль, а $S_i \neq 0$. Поэтому кольцо T_i' удовлетворяет предположениям теоремы 1, и в силу этой теоремы кольца T_i' и $\begin{pmatrix} T_i & T_i \\ 0 & T_i \end{pmatrix}$ изоморфны.

Итак, матрица (2) после соответствующей перестановки строк и столбцов приобрела следующий вид:

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 & L_{1,k+1} & \dots & L_{1,l} \\ 0 & 0 & T_2 & \dots & 0 & T_2 \dots 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T_k & 0 \dots T_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & T_2 \dots 0 & L_{2,k+1} & \dots & L_{2,l} \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 & L_{l,k+1} & \dots & L_{l,l} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Докажем теперь теорему индукцией по числу идемпотентов в данном полном наборе в R. Можем сразу предположить, что R не самоинъективно. База индукции была рассмотрена в теореме 1.

Запишем матрицу (3) в виде $\begin{pmatrix} T_1 & S'' \\ 0 & L'' \end{pmatrix}$, где $S'' = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Будем считать идемпотенты e_{M_i} (где $i > 1$) и e_{I_j} элементами кольца L''. Ясно, что среди

L''-модулей $L''e_{M_i}$ $(i > 1)$, $L''e_{I_j}$ нет изоморфных. Заметим также, что все модули $L''e_{M_i}$ просты.

Применив критерий к R-модулю I_j, мы получим, что $Ann(S'') = L''e_{I_j}$ инъективен как L''-модуль. Поэтому кольцо L'' полуинъективно слева, кроме того, оно нётерово слева и самобазисно.

Разложим кольцо L'' в прямое произведение неразложимых колец и рассмотрим прямой множитель F, которому принадлежит простой модуль $U = L''e_{I_1}$. Легко видеть, что кольцо F полуинъективно слева. Если F самоинъективно, то U инъективен как F-модуль, и тогда $L_{1,m} = 0$ для всех m. Следовательно, в этом случае $F = T_1$ и $R = \begin{pmatrix} T_1 & T_1 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$. В противном случае в силу индукционного предположения для некоторого n кольцо F изоморфно факторкольцу кольца верхнетреугольных матриц порядка n над некоторым телом K по указанному в условии идеалу. Остается заметить, что тогда $K = End_F(U) \simeq T_1$, и R изоморфно факторкольцу кольца верхнетреугольных матриц порядка $n + 1$ над телом T_1 по соответствующему идеалу. □

Замечание 6. Указанные в условии теоремы 3 факторкольца колец верхнетреугольных матриц полуинъективны слева и справа. Это легко проверяется при помощи критерия и индукции по порядку матриц. Кроме того, эти факторкольца двусторонне артиновы (и, следовательно, нётеровы), а также самобазисны и неразложимы.

Следствие 3. *Любое полуинъективное слева нётерово слева кольцо полуинъективно справа и двусторонне артиново.*

Доказательство. Следует из полученного в теореме 3 описания таких колец, замечания 6 и аналогичного результата для самоинъективных колец. □

Следствие 4. *Полуинъективное слева нётерово слева кольцо является прямым произведением самоинъективного кольца и полуцепного артинового кольца.*

Доказательство. Ясно, что кольцо верхнетреугольных матриц над телом и, следовательно, любое его факторкольцо — полуцепное. Поэтому данный результат непосредственно следует из теоремы 3 и замечания 6. □

Литература

1. *Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V.* Algebras, rings and modules. Vol. 2. In: Mathematics and Its Applications. Springer, 2007.
2. *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. МЦНМО, 2009.
3. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Модули над кольцами формальных матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15. Вып. 8. С. 145–211.
4. *Anderson F., Fuller K.* Rings and categories of modules. Springer-Verlag, 1992.

Статья поступила в редакцию 5 августа 2019 г.;
после доработки 17 сентября 2019 г.;
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Зильберборд Игорь Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доц.; i.zilberbord@mail.spbu.ru
Сотников Сергей Васильевич — студент; st040116@student.spbu.ru

On a generalization of self-injective rings

I. M. Zilberbord, S. V. Sotnikov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Zilberbord I. M., Sotnikov S. V. On a generalization of self-injective rings. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 60–68. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.106 (In Russian)

In this work the notion of left (right) self-injective ring is generalized. We consider rings that are direct sum of injective module and semisimple module as a left (respectively, right) module above itself. We call such rings left (right) semi-injective and research their properties with the help of two-sided Peirce decomposition of the ring. The paper contains the description of left Noetherian left semi-injective rings. It is proved that any such ring is a direct product of (two-sided) self-injective ring and several quotient rings (of special kind) of rings of upper-triangular matrices over skew fields. From this description it follows that for left semi-injective rings we have the analogue of the classical result for self-injective rings. Namely, if a ring is left Noetherian and left semi-injective then this ring is also right semi-injective and two-sided Artinian.

Keywords: injective module, semisimple module, self-injective ring, Peirce decomposition.

References

1. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V., *Algebras, rings and modules* **2**, in: *Mathematics and Its Applications* (Springer, 2007).

2. Tuganbaev A. A., *Theory of rings. Arithmetical modules and rings* (MCNMO Publ., 2009). (In Russian)

3. Krylov P. A., Tuganbaev A. A., “Modules over formal matrix rings”, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* **15**(8), 145–211 (2009). (In Russian)

4. Anderson F., Fuller K., *Rings and categories of modules* (Springer-Verlag, 1992).

Received: August 5, 2019
Revised: September 17, 2019
Accepted: September 19, 2019

Authors’ information:

Igor M. Zilberbord — i.zilberbord@mail.spbu.ru
Sergei V. Sotnikov — st040116@student.spbu.ru