УДК 519.21 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1
MSC 65Y20, 60G60, 41A25, 41A63

Об одном разложении аддитивных случайных полей*

М. Зани[1], *А. А. Хартов*[2,3]

[1] Институт Дени Пуассона, Университет Орлеана,
Франция, 45067, Орлеан, B. P. 6759, ул. Шартр, Математический корпус
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[3] Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики,
Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Для цитирования: *Зани М., Хартов А. А.* Об одном разложении аддитивных случайных полей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 39–49. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.104

Рассматривается аддитивное случайное поле на $[0,1]^d$, представляющее собой сумму d некоррелированных случайных процессов, зависящих от d независимых параметров. Предполагается, что эти процессы имеют нулевое математическое ожидание и одинаковую непрерывную ковариационную функцию. К изучению такого рода случайных полей проявляется определенный интерес. Они возникают в теории пересечений и самопересечений процессов броуновских движений, рассматриваются в задачах о малых уклонениях и в задачах конечноранговой аппроксимации при сколь угодно большой параметрической размерности d. В последних задачах ключевую роль играют спектральные характеристики ковариационного оператора. Для данного аддитивного случайного поля зависимость собственных чисел его ковариационного оператора от собственных чисел ковариационного оператора маргинальных случайных процессов достаточно проста в случае, когда последний имеет тождественную единицу в качестве собственного вектора. В другом случае, когда условие о тождественной единице не выполнено, вышеуказанная зависимость сложна, что затрудняет изучение такого рода случайных полей. Здесь при разложении случайного поля на сумму его интеграла и его центрированной версии слагаемые будут ортогональны в пространстве $L_2([0,1]^d)$, но, вообще говоря, коррелированы. В настоящей статье мы приводим для данного случайного поля другое интересное разложение, существование которого было замечено авторами при решении задач конечноранговой аппроксимации этого поля в постановке в среднем. В полученном разложении слагаемые ортогональны в пространстве $L_2([0,1]^d)$ и некоррелированы, а при больших d они близки соответственно к интегралу от случайного поля и центрированной версии поля с малой относительной средней квадратической ошибкой.

Ключевые слова: аддитивные случайные поля, разложение, ковариационная функция, ковариационный оператор, собственные пары, сложность аппроксимации в среднем.

1. Введение. Пусть на некотором вероятностном пространстве задан набор случайных процессов $X_1(t)$, $X_2(t)$,..., $X_d(t)$, $t \in [0,1]$, где d — произвольное натуральное число. Пусть данные процессы имеют нулевое математическое ожидание, одинаковую непрерывную ковариационную функцию $\mathcal{K}(t,s)$, $t,s \in [0,1]$, и являются

*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (грант СПбГУ-ННИО 6.65.37.2017).

некоррелированными. Определим случайное поле

$$Y_d(t) := \sum_{j=1}^{d} X_j(t_j), \quad t = (t_1, \ldots, t_d) \in [0,1]^d.$$

Оно имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию

$$\mathcal{K}_d(t,s) := \sum_{j=1}^{d} \mathcal{K}(t_j, s_j),$$

где $t = (t_1, \ldots, t_d)$ и $s = (s_1, \ldots, s_d)$ из $[0,1]^d$.

Случайные поля такого типа являются представителями широкого класса *аддитивных случайных полей*, к изучению которых проявляется определенный интерес. Например, они возникают в теории пересечений и самопересечений процессов броуновских движений (см. [1] и ссылки в ней), рассматриваются в задачах о малых уклонениях (см. [2]). Также появляются работы, посвященные задачам аппроксимации такого рода случайных полей со сколь угодно большой параметрической размерностью d (см. [3–7]). Опишем последние более подробно.

Пусть $V_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, — это заданное случайное поле второго порядка с нулевым математическим ожиданием. Рассмотрим его как случайный элемент V_d пространства $L_2([0,1]^d)$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ и нормой $\| \cdot \|_2$. Введем величину

$$n^{V_d}(\varepsilon) := \min\bigl\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}\left\|V_d - V_d^{(n)}\right\|_2^2 \leqslant \varepsilon\, \mathbb{E}\,\|V_d\|_2^2\bigr\}, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{E}$ — символ математического ожидания, $V_d^{(n)}$ обозначает случайный элемент вида $\sum_{k=1}^{n} \langle V_d, \varphi_k \rangle_2 \cdot \varphi_k$, где $\varphi_k \in L_2([0,1]^d)$, наилучшим образом аппроксимирующий V_d в среднем квадратическом, т. е. по норме $\sqrt{\mathbb{E}\,\| \cdot \|_2^2}$. Величина $n^{V_d}(\varepsilon)$ называется *сложностью аппроксимации в среднем* для V_d. Основная задача состоит в том, чтобы оценить рост $n^{V_d}(\varepsilon)$ при заданном сколь угодно малом пороге ε и сколь угодно большой параметрической размерности d.

Для решения приведенной задачи используется разложение V_d по собственным векторам его ковариационного оператора (*разложение Кархунена — Лоэва*). Частичные суммы этого разложения, как хорошо известно (см. [8] и [9]), являются оптимальными конечноранговыми аппроксимациями для V_d в указанном смысле среднего квадратического. С помощью этого разложения для сложности аппроксимации в среднем получается следующее представление:

$$n^{V_d}(\varepsilon) = \min\Bigl\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{V_d} \leqslant \varepsilon^2\, \Lambda^{V_d}\Bigr\}, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

где $\lambda_k^{V_d}$, $k \in \mathbb{N}$, — собственные числа ковариационного оператора V_d, занумерованные в порядке невозрастания, $\Lambda^{V_d} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k^{V_d}$. Таким образом, задача оценки роста $n^{V_d}(\varepsilon)$ сводится к изучению распределения этих чисел при сколь угодно больших $d \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим сложность аппроксимации в среднем аддитивных случайных полей $Y_d(t)$, $t \in [0,1]^d$. Для них зависимость $\lambda_k^{Y_d}$, $k \in \mathbb{N}$, от собственных чисел ковариационного оператора процессов $X_j(t)$, $t \in [0,1]$, достаточно проста в случае, когда последний имеет тождественную единицу в качестве собственного вектора (см. [4]). Поэтому здесь, как показано авторами в работе [6], нетрудно оценить рост $n^{Y_d}(\varepsilon)$. В случае, когда условие о тождественной единице не выполнено, вышеуказанная зависимость сложна. К решению приводит следующий подход, предложенный авторами в работе [7]. Введем $I_j := \int_{[0,1]} X_j(s)\,ds$, $j = 1, \ldots, d$, и определим

$$J_d := \int\limits_{[0,1]^d} Y_d(s)\,ds = \sum_{j=1}^{d} I_j, \qquad Y_d^c(t) := Y_d(t) - J_d = \sum_{j=1}^{d} (X_j(t_j) - I_j), \quad t \in [0,1]^d.$$

Тогда

$$Y_d(t) = J_d + Y_d^c(t), \quad t \in [0,1]^d. \tag{1}$$

Здесь аддитивное случайное поле $Y_d^c(t)$, $t \in [0,1]^d$, будет удовлетворять условию о тождественной единице и, значит, можно получить оценку роста для $n^{Y_d^c}(\varepsilon)$. После этого остается оценить $n^{Y_d}(\varepsilon)$ через $n^{Y_d^c}(\varepsilon)$.

Обратимся к разложению (1). Его слагаемые ортогональны в пространстве $L_2([0,1]^d)$, но в общем случае коррелированы. В данной статье мы приведем другое интересное разложение для $Y_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, существование которого было замечено авторами при решении вышеописанной задачи. В этом разложении слагаемые ортогональны в $L_2([0,1]^d)$ и некоррелированы, а при больших d они близки соответственно к J_d и Y_d^c с малой относительной средней квадратической ошибкой. В следующем пункте мы приведем формулировки и доказательства этих свойств. Считаем, что это разложение может найти применения в задачах, связанных с аддитивными случайными полями.

2. Результаты. Представим $Y_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, следующим образом:

$$Y_d(t) = \widetilde{J}_d(t) + \widetilde{Y}_d^c(t), \quad t \in [0,1]^d, \tag{2}$$

где

$$\widetilde{J}_d(t) := \sum_{j=1}^{d} \biggl(\frac{1}{d} \sum_{l=1}^{d} X_j(t_l) \biggr), \qquad \widetilde{Y}_d^c(t) := \sum_{j=1}^{d} \biggl(X_j(t_j) - \frac{1}{d} \sum_{l=1}^{d} X_j(t_l) \biggr), \quad t \in [0,1]^d.$$

Теорема 1. *Разложение* (2) *обладает следующими свойствами:*

1) $\operatorname{cov}(\widetilde{J}_d(t), \widetilde{Y}_d^c(s)) = 0$, $t, s \in [0,1]^d$*;*

2) $\langle \widetilde{J}_d, \widetilde{Y}_d^c \rangle_2 = 0$.

Доказательство. Проверим свойство 1. Зафиксируем $t = (t_1, \ldots, t_d)$ и $s = (s_1, \ldots, s_d)$ из $[0,1]^d$. Запишем

$$\operatorname{cov}(\widetilde{J}_d(t), \widetilde{Y}_d^c(s)) = \sum_{j=1}^{d} \operatorname{cov}\biggl(\frac{1}{d} \sum_{l=1}^{d} X_j(t_l), X_j(s_j) - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} X_j(s_k) \biggr) =$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \operatorname{cov}\Bigl(\sum_{l=1}^{d} X_j(t_l), X_j(s_j) \Bigr) - \frac{1}{d^2} \sum_{j=1}^{d} \operatorname{cov}\Bigl(\sum_{l=1}^{d} X_j(t_l), \sum_{k=1}^{d} X_j(s_k) \Bigr) =$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} \operatorname{cov}\bigl(X_j(t_l), X_j(s_j) \bigr) - \frac{1}{d^2} \sum_{j=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \operatorname{cov}\bigl(X_j(t_l), X_j(s_k) \bigr).$$

В силу равенства $\operatorname{cov}\big(X_j(t_l), X_j(s_k)\big) = \mathcal{K}(t_l, s_k)$ при каждом j, мы получаем

$$\operatorname{cov}(\widetilde{J}_d(t), \widetilde{Y}_d^c(s)) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\mathcal{K}(t_l, s_j) - \frac{1}{d^2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\mathcal{K}(t_l, s_k) =$$
$$= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\mathcal{K}(t_l, s_j) - \frac{1}{d}\sum_{l=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\mathcal{K}(t_l, s_k) = 0.$$

Теперь проверим свойство 2. Заметим, что

$$\langle \widetilde{J}_d, \widetilde{Y}_d^c\rangle_2 = \langle \widetilde{J}_d, Y_d - \widetilde{J}_d\rangle_2 = \langle \widetilde{J}_d, Y_d\rangle_2 - \|\widetilde{J}_d\|_2^2.$$

Для $\langle \widetilde{J}_d, Y_d\rangle_{2,d}$ мы имеем

$$\langle \widetilde{J}_d, Y_d\rangle_{2,d} = \frac{1}{d}\int\limits_{[0,1]^d}\Big(\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}X_j(t_l)\cdot\sum_{k=1}^{d}X_k(t_k)\Big)\,dt =$$
$$= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\iint\limits_{[0,1]^2}\Big(\sum_{l=1}^{d}X_j(t_l)X_k(t_k)\Big)\,dt_l\,dt_k =$$
$$= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\Big(\int\limits_{[0,1]}X_j(t_k)X_k(t_k)\,dt_k + \sum_{\substack{l=1,\dots,d\\ l\neq k}}\iint\limits_{[0,1]^2}X_j(t_l)X_k(t_k)\,dt_l\,dt_k\Big) =$$
$$= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\Big(\int\limits_{[0,1]}X_j(t)X_k(t)\,dt + (d-1)I_jI_k\Big).$$

Для $\|\widetilde{J}_d\|_2^2$ верно

$$\|\widetilde{J}_d\|_2^2 = \frac{1}{d^2}\int\limits_{[0,1]^d}\Big(\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}X_j(t_l)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{d}\sum_{r=1}^{d}X_k(t_r)\Big)\,dt =$$
$$= \frac{1}{d^2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\int\limits_{[0,1]^d}\Big(\sum_{l=1}^{d}X_j(t_l)\Big)\Big(\sum_{r=1}^{d}X_k(t_r)\Big)\,dt.$$

Перемножим суммы по l и r и проинтегрируем:

$$\|\widetilde{J}_d\|_2^2 = \frac{1}{d^2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\Big(\sum_{l=1}^{d}\int\limits_{[0,1]}X_j(t_l)X_k(t_l)\,dt_l + \sum_{\substack{l,r=1,\dots,d\\ l\neq r}}\iint\limits_{[0,1]^2}X_j(t_l)X_k(t_r)\,dt_l\,dt_r\Big) =$$
$$= \frac{1}{d^2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\Big(d\int\limits_{[0,1]}X_j(t)X_k(t)\,dt + (d^2-d)I_jI_k\Big) =$$
$$= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\Big(\int\limits_{[0,1]}X_j(t)X_k(t)\,dt + (d-1)I_jI_k\Big).$$

Видим, что $\langle \widetilde{J}_d, Y_d\rangle_2 = \|\widetilde{J}_d\|_2^2$, т. е. $\langle \widetilde{J}_d, \widetilde{Y}_d^c\rangle_2 = 0$. $\square$

В теореме 1 случайное поле $\widetilde{J}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, можно заменить на J_d.

Теорема 2. *Для* $\widetilde{Y}_d^c$ *выполнены следующие равенства:*

1) $\operatorname{cov}(J_d, \widetilde{Y}_d^c(t)) = 0$, $t \in [0,1]^d$;

2) $\langle J_d, \widetilde{Y}_d^c \rangle_2 = \langle 1, \widetilde{Y}_d^c \rangle_2 = 0$.

Доказательство. Сначала проверим равенство 1. Выберем $t = (t_1, \ldots, t_d) \in [0,1]^d$. Заметим, что для любых $j, l \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{cov}(I_j, X_l(t)) = \mathbb{E}\left(\int\limits_{[0,1]} X_j(s)\, ds \cdot X_l(t) \right) = \int\limits_{[0,1]} \mathbb{E}\big(X_j(s) X_l(t)\big)\, ds.$$

Последний интеграл равен $\int_{[0,1]} \mathcal{K}(t,s)\, ds$ при $l = j$ и равен нулю при $l \neq j$. Тогда

$$\operatorname{cov}(J_d, \widetilde{Y}_d^c(t)) = \operatorname{cov}\left(\sum_{j=1}^d I_j, \sum_{j=1}^d \left(X_j(t_j) - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d X_j(t_k) \right) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^d \operatorname{cov}\left(I_j, X_j(t_j) - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d X_j(t_k) \right) = \sum_{j=1}^d \operatorname{cov}\big(I_j, X_j(t_j)\big) - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \operatorname{cov}\big(I_j, X_j(t_k)\big) =$$

$$= \sum_{j=1}^d \int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(t_j, s)\, ds - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(t_k, s)\, ds.$$

В последней двойной сумме слагаемые не зависят от j. Следовательно, мы имеем

$$\operatorname{cov}(J_d, \widetilde{Y}_d^c(t)) = \sum_{j=1}^d \int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(t_j, s)\, ds - \sum_{k=1}^d \int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(t_k, s)\, ds = 0.$$

Теперь проверим равенство 2:

$$\langle 1, \widetilde{Y}_d^c \rangle_2 = \int\limits_{[0,1]^d} \sum_{j=1}^d \left(X_j(s_j) - \frac{1}{d} \sum_{l=1}^d X_j(s_l) \right) ds =$$

$$= \sum_{j=1}^d \int\limits_{[0,1]} X_j(s_j)\, ds_j - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d \int\limits_{[0,1]} X_j(s_l)\, ds_l = \sum_{j=1}^d I_j - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d I_j = 0.$$

Тогда $\langle J_d, \widetilde{Y}_d^c \rangle_2 = J_d \cdot \langle 1, \widetilde{Y}_d^c \rangle_2 = 0$. $\square$

Для данного случайного поля $V_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, символом $\mathcal{S}(V_d)$ мы будем обозначать множество собственных пар его ковариационного оператора с ненулевыми собственными числами, т. е. пар вида (λ, ψ), где λ — ненулевое собственное число, а ψ — соответствующий собственный вектор. В следующей теореме мы устанавливаем свойства, касающиеся этих множеств для случайных полей из разложения (2).

Теорема 3. *Разложение* (2) *обладает следующими свойствами:*

1) $\mathcal{S}(\widetilde{J}_d) \cap \mathcal{S}(\widetilde{Y}_d^c) = \varnothing$*;*

2) $\mathcal{S}(Y_d) = \mathcal{S}(\widetilde{J}_d) \cup \mathcal{S}(\widetilde{Y}_d^c)$.

Доказательство. В соответствии со свойством 1 из теоремы 1 имеем равенство

$$\mathcal{K}^{Y_d}(t,s) = \mathcal{K}^{\widetilde{J}_d}(t,s) + \mathcal{K}^{\widetilde{Y}_d^c}(t,s), \quad t,s \in [0,1]^d, \tag{3}$$

в котором соответственно записаны ковариационные функции случайных полей $Y_d(t)$, $\widetilde{J}_d(t)$ и $\widetilde{Y}_d^c(t)$, $t \in [0,1]^d$.

Найдем первое слагаемое для любых $t = (t_1, \ldots, t_d)$ и $s = (s_1, \ldots, s_d)$ из $[0,1]^d$:

$$\mathcal{K}^{\widetilde{J}_d}(t,s) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} X_j(t_l) \cdot \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\sum_{r=1}^{d} X_j(s_r)\right) =$$
$$= \frac{1}{d^2}\sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{d} X_j(t_l) \cdot \sum_{r=1}^{d} X_j(s_r)\right) = \frac{1}{d^2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\sum_{r=1}^{d} \mathbb{E}\left(X_j(t_l) \cdot X_j(s_r)\right).$$

Математические ожидания заменяем на $\mathcal{K}(t_l, s_r)$:

$$\mathcal{K}^{\widetilde{J}_d}(t,s) = \frac{1}{d^2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\sum_{r=1}^{d} \mathcal{K}(t_l, s_r) = \frac{1}{d}\sum_{l=1}^{d}\sum_{r=1}^{d} \mathcal{K}(t_l, s_r).$$

Далее представим $\mathcal{K}(t_l, s_r)$ абсолютно и равномерно сходящимся рядом $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \psi_k(t_l)\psi_k(s_r)$, где λ_k, $k \in \mathbb{N}$, — собственные числа ковариационного оператора X_j, занумерованные в порядке невозрастания, а ψ_k, $k \in \mathbb{N}$, — соответствующие собственные векторы:

$$\mathcal{K}^{\widetilde{J}_d}(t,s) = \frac{1}{d}\sum_{l=1}^{d}\sum_{r=1}^{d}\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \psi_k(t_l)\psi_k(s_r) = \frac{1}{d}\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \Big(\sum_{l=1}^{d} \psi_k(t_l)\Big)\Big(\sum_{r=1}^{d} \psi_k(s_r)\Big).$$

Пусть $(\lambda^*, \psi^*) \in \mathcal{S}(\widetilde{J}_d)$, где λ^* — собственное число, а ψ^* — собственный вектор. Тогда

$$\psi^*(t) = \frac{1}{\lambda^*}\int\limits_{[0,1]^d} \mathcal{K}^{\widetilde{J}_d}(t,s)\psi^*(s)\,ds = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{d,k}\Big(\sum_{l=1}^{d} \psi_k(t_l)\Big), \quad t \in [0,1]^d, \tag{4}$$

где

$$a_{d,k} := \frac{1}{d} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda^*}\int\limits_{[0,1]^d} \Big(\sum_{r=1}^{d} \psi_k(s_r)\Big)\psi^*(s)\,ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теперь покажем, что

$$\int\limits_{[0,1]^d} \mathcal{K}^{Y_d}(t,s)\Big(\sum_{l=1}^{d} \psi_m(s_l)\Big)\,ds = \int\limits_{[0,1]^d} \mathcal{K}^{\widetilde{J}_d}(t,s)\Big(\sum_{l=1}^{d} \psi_m(s_l)\Big)\,ds, \quad t \in [0,1]^d. \tag{5}$$

Обозначим левую и правую части (5) соответственно через $L_d(t)$ и $R_d(t)$. Рассмотрим сначала первую:

$$L_d(t) = \int\limits_{[0,1]^d} \sum_{j=1}^{d} \mathcal{K}(t_j, s_j)\Big(\sum_{l=1}^{d} \psi_m(s_l)\Big)\,ds = \sum_{j=1}^{d}\Big(\sum_{l=1}^{d} \int\limits_{[0,1]^d} \mathcal{K}(t_j, s_j)\psi_m(s_l)\,ds\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\Big(\int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(t_j, s_j)\psi_m(s_j)\,ds_j + \sum_{\substack{l=1,\dots,d\\ l\neq j}} \iint\limits_{[0,1]^2} \mathcal{K}(t_j, s_j)\psi_m(s_l)\,ds\,ds_l\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\Big(\int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(t_j, s)\psi_m(s)\,ds + (d-1)\int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(t_j, s)\,ds \cdot \int\limits_{[0,1]} \psi_m(s)\,ds\Big).$$

Далее рассмотрим $R_d(t)$:

$$R_d(t) = \frac{1}{d}\int\limits_{[0,1]^d} \sum_{l=1}^{d}\sum_{r=1}^{d} \mathcal{K}(t_l, s_r)\Big(\sum_{j=1}^{d} \psi_m(s_j)\Big)\,ds =$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{l=1}^{d}\Big(\sum_{r=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \int\limits_{[0,1]^d} \mathcal{K}(t_l, s_r)\psi_m(s_j)\,ds\Big) =$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{l=1}^{d}\Big(\sum_{j=1}^{d} \int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(t_l, s_j)\psi_m(s_j)\,ds_j + \sum_{\substack{j,r=1,\dots,d\\ j\neq r}} \iint\limits_{[0,1]^2} \mathcal{K}(t_l, s_r)\psi_m(s_j)\,ds_r\,ds_j\Big) =$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{l=1}^{d}\Big(d\int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(t_l, s)\psi_m(s)\,ds + (d^2-d)\int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(t_l, s)\,ds \cdot \int\limits_{[0,1]} \psi_m(s)\,ds\Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{d}\Big(\int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(t_l, s)\psi_m(s)\,ds + (d-1)\int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(t_l, s)\,ds \cdot \int\limits_{[0,1]} \psi_m(s)\,ds\Big).$$

Видим, что $L_d(t) = R_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, т. е. равенство (5) верно. В соответствии с (4) мы заключаем, что

$$\int\limits_{[0,1]^d} \mathcal{K}^{Y_d}(t,s)\psi^*(s)\,ds = \int\limits_{[0,1]^d} \mathcal{K}^{\widetilde{J}_d}(t,s)\psi^*(s)\,ds = \lambda^*\psi^*(t), \quad t \in [0,1]^d.$$

Тогда $(\lambda^*, \psi^*) \in \mathcal{S}(Y_d)$, т. е. $\mathcal{S}(\widetilde{J}_d) \subset \mathcal{S}(Y_d)$. В силу (3) мы имеем

$$\int\limits_{[0,1]^d} \mathcal{K}^{\widetilde{Y}_d^c}(t,s)\psi^*(s)\,ds = \int\limits_{[0,1]^d} \big(\mathcal{K}^{Y_d}(t,s) - \mathcal{K}^{\widetilde{J}_d}(t,s)\big)\psi^*(s)\,ds = 0, \quad t \in [0,1]^d.$$

Это означает, что $(\lambda^*, \psi^*) \notin \mathcal{S}(\widetilde{Y}_d^c)$. Таким образом, $\mathcal{S}(\widetilde{J}_d) \cap \mathcal{S}(\widetilde{Y}_d^c) = \varnothing$, т. е. свойство 1 доказано.

Далее заметим, что для любых $t, s \in [0,1]^d$

$$\mathcal{K}^{\widetilde{Y}_d^c}(t,s) = \mathcal{K}^{Y_d}(t,s) - \mathcal{K}^{\widetilde{J}_d}(t,s) =$$
$$= \sum_{(\lambda,\psi)\in\mathcal{S}(Y_d)} \lambda\,\psi(t)\psi(s) - \sum_{(\lambda,\psi)\in\mathcal{S}(\widetilde{J}_d)} \lambda\,\psi(t)\psi(s) = \sum_{(\lambda,\psi)\in\mathcal{S}(Y_d)\setminus\mathcal{S}(\widetilde{J}_d)} \lambda\,\psi(t)\psi(s).$$

В последней сумме все ψ ортонормальны, значит, $\mathcal{S}(Y_d) \setminus \mathcal{S}(\widetilde{J}_d) \subset \mathcal{S}(\widetilde{Y}_d^c)$. Далее заметим, что

$$\sum_{(\lambda,\psi)\in\mathcal{S}(\widetilde{Y}_d^c)} \lambda = \int\limits_{[0,1]^d} \mathcal{K}^{\widetilde{Y}_d^c}(s,s)\,ds = \int\limits_{[0,1]^d} \Bigg(\sum_{(\lambda,\psi)\in\mathcal{S}(Y_d)\setminus\mathcal{S}(\widetilde{J}_d)} \lambda\,\psi(s)^2 \Bigg) ds = \sum_{(\lambda,\psi)\in\mathcal{S}(Y_d)\setminus\mathcal{S}(\widetilde{J}_d)} \lambda.$$

Следовательно, нет таких пар $(\lambda,\psi) \in \mathcal{S}(\widetilde{Y}_d^c)$, что $(\lambda,\psi) \notin \mathcal{S}(Y_d) \setminus \mathcal{S}(\widetilde{J}_d)$. Тогда $\mathcal{S}(Y_d) \setminus \mathcal{S}(\widetilde{J}_d) = \mathcal{S}(\widetilde{Y}_d^c)$. Это и соотношение $\mathcal{S}(\widetilde{J}_d) \subset \mathcal{S}(Y_d)$ дают свойство 2. $\square$

Найдем степень приближения случайных элементов J_d и Y_d^c соответственно элементами $\widetilde{J}_d$ и $\widetilde{Y}_d^c$. Введем константы:

$$\bar{\lambda}_0 := \iint\limits_{[0,1]^2} \mathcal{K}(t,s)\,dt\,ds, \qquad \bar{\Lambda} := \int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(s,s)\,ds - \iint\limits_{[0,1]^2} \mathcal{K}(t,s)\,dt\,ds.$$

Легко проверить, что $\bar{\lambda}_0$ равна $\mathbb{E}\,I_j^2$ и $\bar{\Lambda}$ есть след ковариационного оператора $X_j - I_j$ при каждом j.

Теорема 4.

$$\mathbb{E}\,\|J_d - \widetilde{J}_d\|_2^2 = \mathbb{E}\,\|Y_d^c - \widetilde{Y}_d^c\|_2^2 = \bar{\Lambda}.$$

Доказательство. Первое равенство вытекает из $Y_d(t) = J_d + Y_d^c(t) = \widetilde{J}_d(t) + \widetilde{Y}_d^c(t)$, $t \in [0,1]^d$. Заметим, что

$$\mathbb{E}\,\|J_d - \widetilde{J}_d\|_2^2 = \mathbb{E} \int\limits_{[0,1]^d} \bigg(\sum_{j=1}^d \Big(I_j - \frac{1}{d} \sum_{l=1}^d X_j(s_l) \Big) \bigg)^2 ds =$$
$$= \int\limits_{[0,1]^d} \mathbb{E} \bigg(\sum_{j=1}^d \Big(I_j - \frac{1}{d} \sum_{l=1}^d X_j(s_l) \Big) \bigg)^2 ds = \int\limits_{[0,1]^d} \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \Big(I_j - \frac{1}{d} \sum_{l=1}^d X_j(s_l) \Big)^2 ds =$$
$$= \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \int\limits_{[0,1]^d} \Big(I_j - \frac{1}{d} \sum_{l=1}^d X_j(s_l) \Big)^2 ds.$$

Здесь

$$\Big(I_j - \frac{1}{d} \sum_{l=1}^d X_j(s_l) \Big)^2 = I_j^2 - 2I_j\,\frac{1}{d} \sum_{l=1}^d X_j(s_l) + \frac{1}{d^2} \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d X_j(s_l) X_j(s_k) =$$
$$= I_j^2 - 2I_j\,\frac{1}{d} \sum_{l=1}^d X_j(s_l) + \frac{1}{d^2} \sum_{\substack{k,l=1,\dots,d\\ k\neq l}} X_j(s_l) X_j(s_k) + \frac{1}{d^2} \sum_{l=1}^d X_j(s_l)^2.$$

Тогда

$$\int\limits_{[0,1]^d} \Big(I_j - \frac{1}{d}\sum_{l=1}^{d} X_j(s_l)\Big)^2 ds = I_j^2 - 2I_j\,\frac{1}{d}\sum_{l=1}^{d} I_j + \frac{1}{d^2}\sum_{\substack{k,l=1,\dots,d\\ k\neq l}} I_j^2 + \frac{1}{d^2}\sum_{l=1}^{d}\int\limits_{[0,1]} X_j(s_l)^2\, ds_l =$$

$$= I_j^2 - 2I_j\,\frac{1}{d}\cdot dI_j + \frac{1}{d^2}\cdot(d^2-d)I_j^2 + \frac{1}{d^2}\cdot d\int\limits_{[0,1]} X_j(s)^2\, ds = \frac{1}{d}\cdot\int\limits_{[0,1]} X_j(s)^2\, ds - \frac{1}{d}\cdot I_j^2.$$

Получаем

$$\mathbb{E}\,\|J_d - \widetilde{J}_d\|_2^2 = \sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}\int\limits_{[0,1]^d}\Big(I_j - \frac{1}{d}\sum_{l=1}^{d} X_j(s_l)\Big)^2 ds = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\Bigg(\mathbb{E}\int\limits_{[0,1]} X_j(s)^2\, ds - \mathbb{E}\, I_j^2\Bigg).$$

Здесь для каждого j имеем

$$\mathbb{E}\int\limits_{[0,1]} X_j(s)^2\, ds = \int\limits_{[0,1]} \mathcal{K}(s,s)\, ds = \bar{\Lambda} + \bar{\lambda}_0, \qquad \mathbb{E}\, I_j^2 = \bar{\lambda}_0.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\,\|J_d - \widetilde{J}_d\|_2^2 = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}. \quad \square$$

Вычислим величину $\mathbb{E}\,\|J_d\|_2^2$:

$$\mathbb{E}\,\|J_d\|_2^2 = \mathbb{E}\, J_d^2 = \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{d} I_j\Big)^2 = \sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}\, I_j^2 = \bar{\lambda}_0 d.$$

Найдем $\mathbb{E}\,\|Y_d^c\|_2^2$. В силу ортогональности J_d и Y_d^c, верно

$$\mathbb{E}\,\|Y_d^c\|_2^2 = \mathbb{E}\,\|Y_d\|_2^2 - \mathbb{E}\,\|J_d\|_2^2.$$

Здесь

$$\mathbb{E}\,\|Y_d\|_2^2 = \mathbb{E}\int\limits_{[0,1]}\Big(\sum_{j=1}^{d} X_j(s)\Big)^2 ds = \sum_{j=1}^{d}\int\limits_{[0,1]}\mathbb{E}\, X_j(s)^2\, ds = d\int\limits_{[0,1]}\mathcal{K}(s,s)\, ds,$$

то есть $\mathbb{E}\,\|Y_d\|_2^2 = d(\bar{\Lambda} + \bar{\lambda}_0)$. Тогда

$$\mathbb{E}\,\|Y_d^c\|_2^2 = (\bar{\Lambda} + \bar{\lambda}_0)d - \bar{\lambda}_0 d = \bar{\Lambda} d.$$

Используя теорему 4 и найденные значения $\mathbb{E}\,\|J_d\|_2^2$ и $\mathbb{E}\,\|Y_d^c\|_2^2$, мы сразу получаем относительные ошибки приближения случайных элементов J_d и Y_d^c соответственно случайными элементами $\widetilde{J}_d$ и $\widetilde{Y}_d^c$:

$$\frac{\mathbb{E}\,\|J_d - \widetilde{J}_d\|_2^2}{\mathbb{E}\,\|J_d\|_2^2} = \frac{\bar{\Lambda}}{\bar{\lambda}_0}\cdot\frac{1}{d}, \qquad \frac{\mathbb{E}\,\|Y_d^c - \widetilde{Y}_d^c\|_2^2}{\mathbb{E}\,\|Y_d^c\|_2^2} = \frac{1}{d}.$$

Здесь соответственно предполагается, что $\bar{\lambda}_0 \neq 0$ и $\bar{\Lambda} \neq 0$. Отсюда делаем вывод о сближении (в указанном смысле) разложений (1) и (2) при больших d.

Литература

1. *Chen X., Li W. V.* Small deviation estimates for some additive processes // Proc. Conf. High Dimensional Probab. III, Progress in Probability. Birkhäuser, 2003. Vol. 55. P. 225–238.
2. *Karol A., Nazarov A., Nikitin Ya.* Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 360, no. 3. P. 1443–1474.
3. *Hickernell F. J., Wasilkowski G. W., Woźniakowski H.* Tractability of linear multivariate problems in the average-case setting. In: Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2006 / Eds. A. Keller, S. Heinrich, H. Niederreiter. Berlin: Springer, 2008. P. 461–493.
4. *Lifshits M. A., Zani M.* Approximation complexity of additive random fields // J. Complexity. 2008. Vol. 24, no. 3. P. 362–379.
5. *Lifshits M. A., Zani M.* Approximation of additive random fields based on standard information: Average case and probabilistic settings // J. Complexity. 2015. Vol. 31, no. 5. P. 659–674.
6. *Khartov A. A., Zani M.* Asymptotic analysis of average case approximation complexity of additive random fields // J. Complexity. 2019. Vol. 52. P. 24–44.
7. *Khartov A. A., Zani M.* Approximation complexity of sums of random processes // J. Complexity. 2019. Vol. 54. Art. no. 101399.
8. *Brown J. L.* Mean Square truncation error in series expansions of random functions // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1960. Vol. 8, no. 1. P. 28–32.
9. *Ritter K.* Average-case Analysis of Numerical Problems. In Ser.: Lecture Notes in Math. No. 1733. Berlin: Springer, 2000.

Статья поступила в редакцию 22 марта 2019 г.;
после доработки 8 июня 2019 г.;
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Зани Маргарита — PhD; marguerite.zani@univ-orleans.fr
Хартов Алексей Андреевич — канд. физ.-мат. наук; alexeykhartov@gmail.com

On a decomposition of additive random fields*

M. Zani[1], *A. A. Khartov*[2,3]

[1] Institut Denis Poisson, Université d'Orléans, Bâtiment Mathématiques, Rue de Chartres, B. P. 6759–45067, Orléans cedex 2, France
[2] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[3] St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Kronverksky pr., 49, St. Petersburg, 197101, Russian Federation

For citation: Zani M., Khartov A. A. On a decomposition of additive random fields. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 39–49. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.104 (In Russian)

We consider an additive random field on $[0,1]^d$, which is a sum of d uncorrelated random processes. We assume that the processes have zero mean and the same continuous covariance function. There is a significant interest in the study of random fields of this type. They appear for example in the theory of intersections and selfintersections of Brownian processes, in the problems concerning the small ball probabilities, and in the finite rank approximation problems with arbitrary large parametric dimension d. In the last problems the spectral characteristics of the covariance operator play key role. For a given additive

*The work is supported by St. Petersburg State University (grant SPbSU–DFG 6.65.37.2017).

random field the eigenvalues of its covariance operator easily depend on the eigenvalues of the covariance operator of the marginal processes in the case, when the latter has identical 1 as an eigenvector. In the opposite case the dependence is complex, that makes these random fields difficult to study. Here decomposing the random field into the sum of its integral and its centered version, the summands will be orthogonal in $L_2([0,1]^d)$, but in the general case they are correlated. In the present paper we propose another interesting decomposition for the random field, that was observed by the authors within finite rank approximation problems in the average case setting. In the derived decomposition the summands are orthogonal in $L_2([0,1]^d)$ and uncorrelated. Moreover, for large d they are respectively close to the integral and to the centered version of the random field with small relative mean squared error.

Keywords: additive random fields, decomposition, covariance function, covariance operator, eigenpairs, average case approximation complexity.

References

1. Chen X., Li W. V., "Small deviation estimates for some additive processes", *Proc. Conf. High Dimensional Probab. III, Progress in Probability* **55**, 225–238 (Birkhäuser, 2003).

2. Karol A., Nazarov A., Nikitin Ya., "Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators", *Trans. Amer. Math. Soc.* **360**(3), 1443–1474 (2008).

3. Hickernell F. J., Wasilkowski G. W., Woźniakowski H., *Tractability of linear multivariate problems in the average-case setting*, in: *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2006*, 461–493 (A. Keller, S. Heinrich, H. Niederreiter (eds.), Springer, Berlin, 2008).

4. Lifshits M. A., Zani M., "Approximation complexity of additive random fields", *J. Complexity* **24**(3), 362–379 (2008).

5. Lifshits M. A., Zani M., "Approximation of additive random fields based on standard information: Average case and probabilistic settings", *J. Complexity* **31**(5), 659–674 (2015).

6. Khartov A. A., Zani M., "Asymptotic analysis of average case approximation complexity of additive random fields", *J. Complexity* **52**, 24–44 (2019).

7. Khartov A. A., Zani M., "Approximation complexity of sums of random processes", *J. Complexity* **54**, 101399 (2019).

8. Brown J. L., "Mean Square truncation error in series expansions of random functions", *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **8**(1), 28–32 (1960).

9. Ritter K., *Average-case Analysis of Numerical Problems*, in Ser. *Lecture Notes in Math.*, no. 1733 (Springer, Berlin, 2000).

Received: March 22, 2019
Revised: June 8, 2019
Accepted: September 19, 2019

Authors' information:

Marguerite Zani — marguerite.zani@univ-orleans.fr
Alexey A. Khartov — alexeykhartov@gmail.com