УДК 517.521 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1
MSC 30B10

Степенные ряды одной переменной с условием логарифмической выпуклости коэффициентов

А. В. Железняк

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина),
Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5

Для цитирования: *Железняк А. В.* Степенные ряды одной переменной с условием логарифмической выпуклости коэффициентов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 28–38.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.103

В статье рассматривается обобщение теоремы Харди о степенных рядах, обратных к степенным рядам с положительными коэффициентами. А именно, доказывается, что достаточно требовать логарифмическую выпуклость коэффициентов, начиная с некоторого места. Такого рода результаты применяются в теории Неванлинны — Пика. В частности, это позволяет получить новые оценки на рост соответствующих аналитических функций в круге.

Ключевые слова: степенной ряд, ядра Неванлинны — Пика, логарифмическая выпуклость.

1. Введение. Давно известно, что у формального степенного ряда одной переменной с первым положительным коэффициентом и остальными отрицательными ряд, обратный исходному, будет иметь строго положительные коэффициенты (см. [1]). Однако обратное условие неверно, и в случае ряда Харди одной переменной было найдено простейшее достаточное условие того, что ряд, обратный формальному степенному ряду с положительными коэффициентами, будет иметь все отрицательные коэффициенты, кроме самого первого (см. [2]). Это условие впоследствии будет использовано в интерполяционной задаче Неванлинны — Пика, а именно при рассмотрении вопроса ее разрешимости (см. [3]). Особый интерес представляет случай формальных степенных рядов одной переменной.

Пусть дан формальный степенной ряд

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

с положительными коэффициентами. Рассмотрим формальный степенной ряд, обратный исходному,

$$g(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad f(x)g(x) = 1. \tag{2}$$

Мы хотим знать, при каких a_0, a_n коэффициенты b_0, b_n обратного ряда $g(x)$ удовлетворяют условиям

$$b_0 > 0, \quad b_n \leq 0, \quad n > 0. \tag{3}$$

Это условие естественным образом возникает в интерполяционной задаче Неванлинны — Пика. Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$, а $H^2(\mathbb{D})$ — пространство Харди в $\mathbb{D}$. Для данных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{D}$ и значений $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{D}$ мы хотим найти функцию $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ такую, что $\varphi(x_k) = w_k$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Известно, что задача Неванлинны — Пика разрешима тогда и только тогда, когда матрица $A = (\frac{1-w_k\overline{w_l}}{1-x_k\overline{x_l}})_{1\leq k,l\leq n}$ положительно определена. Другими словами, матрица

$$A = ((1 - w_k\overline{w_l})k(x_k, x_l))_{1\leq k,l\leq n} \quad \text{положительно определена,} \tag{4}$$

где $k(x, y) = \frac{1}{1-x\overline{y}}$ — воспроизводящее ядро пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$. Это условие впервые было получено Пиком в 1916 году. Более того, было доказано, что такое решение единственно и представимо в виде произведения Бляшке. А в 1919 году Неванлинна рассмотрел эту задачу независимо от Пика. Рассмотрим общую задачу Неванлинны — Пика. Пусть H — гильбертово пространство аналитических функций в $\mathbb{D}$ такое, что функционал значения в точке непрерывен. Для данных $x_1, x_2, \ldots, x_n, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{D}$ мы ищем мультипликатор пространства H такой, что $\varphi(x_k) = w_k, k = 1, 2, \ldots, n$, и $||\varphi|| \leq 1$. Известно (см. [1]), что условие положительной определенности матрицы $A = ((1 - w_k\overline{w_l})k(x_k, x_l))_{1\leq k,l\leq n}$ является необходимым и может быть достаточным, если матрица

$$K = (k(x_k, x_l))_{1\leq k,l\leq n} \quad \text{положительно определена,} \tag{5}$$

где $k(x, y) = \frac{\varphi(x)\overline{\varphi(y)}}{1-b(x,y)}$, причем

$$B = (b(x_k, x_l))_{1\leq k,l\leq n} \quad \text{положительно определена.} \tag{6}$$

Такие ядра называются ядрами Неванлинны — Пика. Рассмотрим ядра следующего вида: $k(x, y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x\overline{y})^n$ (воспроизводящее ядро пространства $H^2(\mathbb{D})$). Для выполнения условия (5) достаточно неотрицательности чисел, а для выполнения условия (6) достаточно, чтобы у степенного ряда $1/k(x, y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x\overline{y})^n$ все коэффициенты, кроме первого, были неположительны. Это условие в точности соответствует условию (3) (см. [1]). Для случая рядов одной переменной простейшее достаточное условие было получено Харди (см. [2]).

Теорема 1 (Харди). *Положим $f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ — формальный степенной ряд, рассмотрим $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ — формальный степенной ряд, обратный к $f(x)$. Если коэффициенты a_n удовлетворяют условию логарифмической выпуклости*

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}, \tag{7}$$

то все коэффициенты ряда $g(x)$ неположительны, за исключением нулевого.

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

Определение 1. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, K — натуральное число. Говорят, что *последовательность удовлетворяет условию K-Харди*, если при всех натуральных $n \geq K$ выполнено условие (7).

2. Основная часть.

Теорема 2. *Положим* $f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *— формальный степенной ряд, рассмотрим* $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *— формальный степенной ряд, обратный к* $f(x)$. *Тогда для любой последовательности чисел* $a_1, a_2, \ldots$, *удовлетворяющей условию K-Харди, существует число* a_0 *такое, что* $b_n < 0$ *при всех натуральных* n.

Рассмотрим коэффициент b_l как функцию от $a_0, a_1, \ldots, a_l$.

Лемма 1. *Коэффициент* b_l *имеет вид* $\frac{1}{a_0^{l+1}} P_l(a_0)$, *где* P_l *— многочлен степени* $(l-1)$ *от* a_0 *с коэффициентами, зависящими только от* $(a_1, \ldots, a_l)$, *причем старший коэффициент равен* $(-a_l)$.

Доказательство леммы 1. Индукция по l. База $l = 1$. Перемножив формальные степенные ряды $f(x)$ и $g(x)$ и приравняв коэффициенты при нулевой и первой степенях, получим, что $a_0 b_0 = 1$ и $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$, откуда $b_0 = \frac{1}{a_0}$ и $b_1 = \frac{-a_1}{a_0^2}$.

Переход. Пусть набор $b_1, \ldots, b_l$ удовлетворяет условию леммы 1. Докажем, что b_{l+1} тоже представляется в требуемом виде.

Поскольку $1 = f(x)g(x)$ и коэффициент при x^{l+1} равен 0, имеем

$$0 = a_0 b_{l+1} + a_1 b_l + \ldots + a_{l+1} b_0.$$

Следовательно, по предположению индукции получаем

$$\begin{aligned} b_{l+1} a_0 &= -a_1 b_l - a_2 b_{l-1} - \ldots - a_{l+1} b_0 = \\ &= -\left[\frac{a_1 P_l(a_0)}{a_0^{l+1}} + \frac{a_2 P_{l-1}(a_0)}{a_0^{l}} + \cdots + \frac{a_l P_1(a_0)}{a_0^{2}} + \frac{a_{l+1}}{a_0}\right] = \\ &= -\frac{1}{a_0^{l+1}} \left[a_1 P_l(a_0) + a_2 a_0 P_{l-1}(a_0) + a_3 a_0^2 P_{l-2}(a_0) + \ldots + a_l a_0^{l-1} P_1(a_0)\right] - \\ &\qquad - \frac{1}{a_0^{l+1}} a_{l+1} a_0^l = -\frac{1}{a_0^{l+1}} Q_l(a_0) - \frac{1}{a_0^{l+1}} a_{l+1} a_0^l, \end{aligned}$$

где $Q_l(a_0)$ — многочлен степени $(l-1)$ от a_0, $a_{l+1} a_0^l$ — многочлен степени l, старший коэффициент которого равен a_l.

Тем самым мы получили, что

$$b_{l+1} = \frac{1}{a_0^{l+2}} \left[-Q_l(a_0) - a_{l+1} a_0^l\right].$$

Лемма доказана.

Следующие два замечания показывают асимптотику коэффициентов b_l.

Замечание 1. $b_l \sim \frac{-a_l}{a_0^2}$ при достаточно больших a_0.

Замечание 2. Существует положительное число A такое, что при всех $a_0 > A$ выполнено

$$\left| b_s + \frac{a_s}{a_0^2} \right| < \frac{1}{2} \frac{a_s}{a_0^2} \quad \forall s = 1, 2, \ldots, N.$$

Следствие из замечания 2.

$$-\frac{3}{2} \frac{a_s}{a_0^2} < b_s < -\frac{1}{2} \frac{a_s}{a_0^2} \quad \text{при всех } s.$$

Доказательство теоремы 2. Отрицательность чисел b_n при $n \leq K$ вытекает из следствия. Докажем, что $b_n < 0$ при $n > K$. Проведем доказательство по индукции $n = K + l$, $l \geq 1$.

Введем обозначения: $m = \frac{a_{K+1}}{a_K}$; $M = \max\left[\frac{a_S}{a_{S-1}}\right]$, $S = 2, \ldots, K$, $T = \max a_S, S = 1, \ldots, K$; $\alpha = \frac{4(M+m)T}{m}$.

База $l = 1$. Перемножим ряды $f(x)$ и $g(x)$ и запишем коэффициенты при x^{K+1} и x^K, равные 0:

$$a_{K+1}b_0 + a_K b_1 + \ldots + a_1 b_K + a_0 b_{K+1} = 0, \tag{8}$$

$$a_K b_0 + a_{K-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{K-1} + a_0 b_k = 0. \tag{9}$$

Домножим (8) на a_K, а (9) на a_{K+1} и, вычитая одно из другого, получим

$$a_0 a_K b_{K+1} + b_k[a_1 a_K - a_0 a_{K+1}] + b_{K+1}[a_2 a_K - a_1 a_{K-1}] + \ldots + \\ + b_1[a_K a_K - a_{K-1} a_{K+1}] = 0. \tag{10}$$

Потребуем, чтобы $a_0 > \frac{a_K a_1}{a_{K+1}} = \frac{a_1}{m}$, тогда будет выполняться $(a_{K+1}a_0 - a_K a_1) > 0$.

Выражая из (10) b_{K+1}, имеем

$$a_0 a_K b_{K+1} = b_K[a_{K+1}a_0 - a_K a_1] + b_{K-1}[a_{K+1}a_1 - a_K a_2] + \ldots + b_1[a_{K+1}a_{K-1} - a_K^2].$$

Лемма 2. *Верно следующее неравенство:*

$$\frac{1}{2}|b_K|(a_{K+1}a_0 - a_K a_1) > \sum_{S=1}^{K-1} |b_S|(a_{K+1}a_S - a_K a_{S+1}).$$

Если это доказать, то так как числа b_K отрицательны, то последние $(K-1)$ слагаемые будут меньше в два раза, чем первое по модулю, следовательно их сумма будет иметь знак первого слагаемого, которое отрицательно.

Доказательство леммы 2. Оценим правую часть:

$$\sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}||(a_{K+1}a_S - a_K a_{S+1})| = a_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}|\,|a_S| \left|\left(\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_{S+1}}{a_S}\right)\right| < \\ < T a_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}| \left|\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_{S+1}}{a_S}\right| \ll (M+m)T \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}||a_K|.$$

Следовательно, получим

$$\frac{1}{2}|b_K|a_0 a_K \left(\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0}\right) > (M+m)T a_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}| = (M+m)T a_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_S|.$$

Поскольку выполнено условие $a_0 > \frac{2a_1}{m}$, то будет верно неравенство $\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0} > \frac{m}{2}$, откуда следует, что

$$\frac{1}{2}|b_K|a_0 a_K \left(\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0}\right) > \frac{m}{4}|b_K|a_0 a_K.$$

Доказали неравенство

$$\frac{m}{4}|b_K|a_0a_K > (M+m)\,Ta_K\sum_{S=1}^{K-1}|b_S|.$$

Очевидно, что при его выполнении лемма будет доказана. Сокращая на $\frac{m}{4}a_K$, получим

$$a_0|b_K| > \alpha\sum_{S=1}^{K-1}|b_S|. \tag{11}$$

Лемма 3. *В условиях теоремы при выполнении условия* $a_0 > \frac{3\alpha}{a_K}\sum\limits_{S=1}^{K-1}a_S$ *неравенство (11) верно.*

Доказательство леммы 3. В силу замечания 2 при всех $S=1,\ldots,K$ выполнены неравенства

$$\left|b_S+\frac{a_S}{a_0^2}\right| < \frac{1}{2}\frac{a_s}{a_0^2},\quad \frac{1}{2}\frac{a_s}{a_0^2} < |b_S| < \frac{3}{2}\frac{a_S}{a_0^2},$$

$$a_0|b_K| > \frac{1}{2}a_0\frac{a_K}{a_0^2} > \frac{3}{2}\frac{\alpha}{a_0^2}\sum_{S=1}^{K-1}a_S > \sum_{S=1}^{K-1}\alpha|b_S|.$$

Тем самым лемма 3 и лемма 2 доказаны и, следовательно, база в доказательстве теоремы 2 доказана.

Замечание 4. В дальнейшем нам потребуется модификация неравенства (11), а именно

$$Ca_0|b_K| > \alpha\sum_{S=1}^{K-1}|b_S|.$$

Очевидно, что если число a_0 удовлетворяет условию

$$a_0 > \frac{3\alpha}{Ca_K}\sum_{S=1}^{K-1}a_S,$$

то требуемое неравенство следует из леммы 3.

В дальнейшем нам потребуются оценки коэффициента b_{K+1}.

Выразив b_{K+1} из (3), имеем

$$|b_{K+1}| = \left|\frac{1}{a_0a_K}\left[\sum_{S=1}^{K-1}b_S(a_{K+1}a_S - a_Ka_{S+1}) + b_K(a_{K+1}a_0 - a_1a_K)\right]\right| >$$

$$> \frac{1}{a_0a_K}\left[|b_K|(a_{K+1}a_0 - a_1a_K) - \sum_{S=1}^{K-1}|b_S||(a_{K+1}a_S - a_Ka_{S+1})|\right] >$$

$$> \frac{1}{2}|b_K|\left(\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0}\right) > \frac{m}{4}|b_K|,$$

то есть

$$|b_{K+1}| > \frac{m}{4}|b_K| \tag{12}$$

или

$$|b_K| < \frac{4}{m}|b_{K+1}|. \tag{13}$$

Доказательство перехода в теореме 2. Предположим, что $b_{K+1}, \ldots, b_{K+l-1}$ отрицательны. Докажем, что b_{K+l} будет меньше 0.

Перемножив ряды $f(x)$ и $g(x)$ и посмотрев на коэффициенты при x^{K+l} и x^{K+l-1}, равные 0, получим

$$a_{K+l}b_0 + a_{K+l-1}b_1 + \ldots + a_1 b_{K+l-1} + a_0 b_{K+l} = 0, \tag{14}$$

$$a_{K+l-1}b_0 + a_{K+l-2}b_1 + \ldots + a_1 b_{K+l-2} + a_0 b_{K+l-1} = 0. \tag{15}$$

Домножим (14) на a_{K+l-1}, (15) на a_{K+l}. Выразим b_{K+l}, вычитая (7) из (8). Получим

$$\begin{multline} b_{K+l}a_{K+l-1}a_0 = b_{K+l-1}(a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1) + b_{K+l-2}(a_{K+l}a_1 - a_{K+l-1}a_2) + \ldots + \\ + b_l(a_{K+l}a_{K-1} - a_{K+l-1}a_K) + b_{l-1}(a_{K+l}a_K - a_{K+l-1}a_{K+1} + \ldots + \\ + b_1(a_{K+l}a_{K+l-2} - a^2_{K+l-1})). \tag{16} \end{multline}$$

Заметим, что коэффициенты при $b_1, b_2, \ldots, b_{l-1}$ положительны ввиду выполнения условия K-Харди $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ при $n \geq K$.

Если $\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} \geq M$, то коэффициенты при $b_l, b_{l+1}, \ldots, b_{K+l-1}$ будут больше или равны 0, так как $M = \max \frac{a_S}{a_{S-1}}$, $S = 2, \ldots, K$, поэтому будем считать, что $\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} \leq M$.

Коэффициент при b_{K+l-1} больше 0, так как

$$a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1 = a_{K+l-1}a_0\left(\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_1}{a_0}\right) \geq a_{K+l-1}a_0\left(\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0}\right) > 0.$$

Лемма 4. *Докажем, что можно подобрать число a_0 так, чтобы выполнялись следующие неравенства:*

$$\frac{1}{2}|b_{K+l-1}|(a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1) > \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_s||a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S}| \tag{17}$$

и

$$|b_{K+l}| > \frac{m}{4}|b_{K+l-1}|.$$

Заметим, что выполнение неравенства (17) из леммы 4 гарантирует отрицательность суммы первых K слагаемых в правой части выражения (16), а поскольку в правой части выражения (16) последние $l-1$ слагаемые отрицательны, то вся правая часть будет отрицательна, и, следовательно, теорема доказана.

Доказательство леммы 4. Индукция. База $l = 1$ — доказано ранее (леммы 2 и 3, неравенство (12)). Переход:

$$\begin{multline} \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S||a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S}| = \\ = a_{K+l-1}\sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S||a_{K+l-1-S}|\left|\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_{K+l-S}}{a_{K+l-1-S}}\right| = (*). \end{multline}$$

Число $K+l-1-S$ при $S \in [l; K+l-2]$ принадлежит $[1; K-1]$, поэтому

$$|a_{K+l-1-S}| \leq T, \quad \left| \frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_{K+l-S}}{a_{K+l-1-S}} \right| \leq M,$$

так как оба числа $\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}}$ и $\frac{a_{K+l-S}}{a_{K+l-1-S}}$ больше 0 и не больше M по предположению. Тогда

$$(*) \leq a_{K+l-1} T \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| M < a_{K+l-1} T (M+m) \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Тем самым осталось доказать, что

$$\frac{1}{2} |b_{K+l-1}| (a_{K+l} a_0 - a_{K+l-1} a_1) \geq a_{K+l-1} T (M+m) \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Разделив на a_{K+L-1}, получим, что осталось доказать истину цепочки неравенств

$$\frac{1}{2} a_0 |b_{K+l-1}| \left(\frac{a_{K+l}}{a_{K+L-1}} - \frac{a_1}{a_0} \right) \geq \frac{m}{4} a_0 |b_{K+l-1}| \geq T (M+m) \sum_{S=l}^{K+L-2} |b_S|.$$

Первое верно по выводу a_0. Если доказать второе неравенство, первая часть леммы 4 будет доказана. Поделив на $\frac{m}{4}$, получим

$$a_0 |b_{K+l-1}| \geq \alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Лемма 5. *В условиях теоремы можно подобрать число a_0, чтобы выполнялось неравенство*

$$a_0 |b_{K+l-1}| \geq \alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Доказательсво леммы 5.

Случай 1. Пусть $l > K-1$, тогда по индукционному предположению (неравенство (13))

$$|b_{K+l-1}| \geq \frac{m}{4} |b_{K+l-2}| \geq \left(\frac{m}{4} \right)^2 |b_{K+l-3}| \geq \ldots \geq \left(\frac{m}{4} \right)^{K-1} |b_l|,$$

следовательно,

$$\alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| \leq \alpha |b_{K+l-1}| \left(\frac{4}{m} + \left(\frac{4}{m} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{m} \right)^{K-1} \right) \leq a_0 |b_{K+l-1}|.$$

Значит, a_0 должно удовлетворять следующему неравенству:

$$a_0 \geq \alpha \left(\frac{4}{m} + \left(\frac{4}{m} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{m} \right)^{K-1} \right).$$

Случай 2. Пусть $l \le K-1$, тогда, применяя замечание 4, получим

$$\alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| = \alpha \sum_{S=l}^{K-1} |b_S| + \alpha \sum_{S=K}^{K+l-2} |b_S| \le \alpha \sum_{S=1}^{K-1} |b_S| + \alpha \sum_{S=K}^{K+l-2} |b_S| \le$$

$$\le Ca_0 |b_K| + \alpha \sum_{S=K}^{K+l-2} |b_S| \le$$

$$\le Ca_0 |b_K| + \alpha \left(\frac{4}{m} + \left(\frac{4}{m}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{m}\right)^{l-1} \right) |b_{K+l-1}| \le$$

$$\le \left(Ca_0 \left(\frac{4}{m}\right)^{l-1} + \alpha \left(\frac{4}{m} + \left(\frac{4}{m}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{m}\right)^{l-1} \right) \right) |b_{K+l-1}|.$$

Если доказать следующее неравенство, то лемма 5 будет доказана:

$$\left(Ca_0 \left(\frac{4}{m}\right)^{l-1} + \alpha \left(\frac{4}{m} + \left(\frac{4}{m}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{m}\right)^{l-1} \right) \right) |b_{K+l-1}| \le a_0 |b_{K+l-1}|.$$

Для его истинности a_0 должно удовлетворять неравенству

$$Ca_0 \left(\frac{4}{m}\right)^{l-1} + \alpha \sum_{S=1}^{l-1} \left(\frac{4}{m}\right)^S \le a_0 \quad \text{для всех} \quad l = 1, \ldots, K-1$$

или, усилив предыдущее,

$$Ca_0 \left(\frac{4}{m}\right)^{l-1} + \alpha \sum_{S=1}^{K-1} \left(\frac{4}{m}\right)^{S-1} \le a_0.$$

Константа C в замечании 4 подбирается по правилу

$$C = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{при} \quad \frac{4}{m} \le 1, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{m}\right)^{K-1}, & \text{при} \quad \frac{4}{m} > 1. \end{cases}$$

Тем самым $C\left(\frac{4}{m}\right)^{l-1} \le \frac{1}{2}$, следовательно, a_0 подобрать можно:

$$2\alpha \sum_{S=1}^{K-1} \left(\frac{4}{m}\right)^{S-1} \le a_0.$$

Лемма 5 доказана.

Докажем теперь вторую часть леммы 4, т. е. неравенство $|b_{K+l}| > \frac{m}{4}|b_{K+l-1}|$. Перепишем выражение (16):

$$|b_{K+l}a_{K+l-1}a_0| = |b_{K+l-1}(a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1) + b_{K+l-2}(a_{K+l}a_1 - a_{K+l-1}a_2) + \ldots +$$
$$+ b_l(a_{K+l}a_{K-1} - a_{K+l-1}a_K) +$$
$$+ b_{l-1}(a_{K+l}a_K - a_{K+l-1}a_{K+1} + \ldots + b_1(a_{K+l}a_{K+l-1} - a_{K+l-1}^2)|.$$

Из доказанного (17) следует, что

$$b_{K+l-1}(a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1) + \ldots + b_l(a_{K+l}a_{K-1} - a_{K+l-1}a_K) < 0.$$

Из условия K-Харди следует, что

$$\sum_{S=1}^{l-1} b_S(a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S}) < 0.$$

Поэтому, используя неравенство 10 из леммы 4, имеем

$$|b_{K+l}a_{K+l-1}a_0| = \left|\sum_{S=1}^{l-1} b_S(a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S})\right| +$$
$$+\left|\sum_{S=l}^{K+l-1} b_S(a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S})\right| \geq$$
$$\geq \left|\sum_{S=l}^{K+l-1} b_S(a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S})\right| \geq \frac{1}{2}|b_{K+l-1}|(a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1),$$

$$|b_{K+l}| \geq \frac{1}{2}|b_{K+l-1}|\left(\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_1}{a_0}\right) \geq \frac{m}{4}|b_{K+l-1}|.$$

Лемма 4 доказана.

3. Заключение. Предположим, что функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют ненулевой радиус сходимости представляющих их степенных рядов, скажем $R > 0$. Тогда условие Харди влечет ограничение на поведение функции $g(z)$ при приближении к граничной окружности. Пусть $0 < r < R$, $g(re^{i\theta}) = \frac{1}{f(re^{i\theta})} = b_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta}$, где $b_0 > 0$, $b_n \leq 0$, $n > 0$. Имеем, что при $0 < \alpha < 1$ все коэффициенты $c_n(\alpha)$ ряда $(1-z)^{-\alpha} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha) z^n$ положительны. Взяв $0 < \rho < 1$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})(1-\rho e^{-i\theta})^{-\alpha} d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta}\right)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha)\rho^n e^{-in\theta}\right) d\theta =$$
$$= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n(\alpha) r^n \rho^n < b_0. \quad (18)$$

Далее,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})(1-\rho e^{i\theta})^{-\alpha} d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta}\right)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha)\rho^n e^{in\theta}\right) d\theta = b_0. \quad (19)$$

Тогда (18) и (19) влекут

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\mathrm{Re}(1-\rho e^{i\theta})^{-\alpha}d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})((1-\rho e^{-i\theta})^{-\alpha}+(1-\rho e^{i\theta})^{-\alpha})d\theta < b_0. \quad (20)$$

Переходя в (20) к пределу при $\rho \to 1-0$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\mathrm{Re}(1-e^{i\theta})^{-\alpha}d\theta < b_0. \quad (21)$$

При $0<\alpha<1$, $0<\theta<\pi$ имеем, что

$$\mathrm{Re}(1-e^{i\theta})^{-\alpha} = \mathrm{Re}\left(e^{\frac{-i\theta\alpha}{2}}\left(e^{\frac{-i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)^{-\alpha}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\frac{-i\theta\alpha}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-\alpha}\right) =$$
$$= 2^{-\alpha}\mathrm{Re}\left(e^{\frac{-i\theta\alpha}{2}}e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-\alpha}\right) = 2^{-\alpha}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-\alpha}\mathrm{Re}\left(e^{\frac{i(\pi-\theta)\alpha}{2}}\right) =$$
$$= 2^{-\alpha}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-\alpha}\cos\left(\frac{(\pi-\theta)\alpha}{2}\right).$$

Аналогично, при $0<\alpha<1$, $-\pi<\theta<0$ имеем, что

$$\mathrm{Re}(1-e^{i\theta})^{-\alpha} = 2^{-\alpha}\left(\sin\left(\frac{|\theta|}{2}\right)\right)^{-\alpha}\cos\left(\frac{(\pi-|\theta|)\alpha}{2}\right).$$

Поэтому из (21) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\mathrm{Re}(1-e^{i\theta})^{-\alpha}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\frac{\cos\left(\frac{(\pi-|\theta|)\alpha}{2}\right)}{2^{\alpha}\left(\sin\left(\frac{|\theta|}{2}\right)\right)^{\alpha}}d\theta < b_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{f(0)}. \quad (22)$$

Поскольку интеграл в (22) вещественный, то окончательно получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{1}{f(re^{i\theta})}\right)\frac{\cos\left(\frac{(\pi-|\theta|)\alpha}{2}\right)}{\left(\sin\left(\frac{|\theta|}{2}\right)\right)^{\alpha}}d\theta < \frac{2^{\alpha}}{f(0)}. \quad (23)$$

Литература

1. *Agler J., McCarthy J. E.* Pick interpolation and Hilbert function spaces. In Ser.: Graduate Studies in Mathematics. Vol. 44. Providence: American Mathematician Society, 2002.

2. *Hardy G. H.* Divergent Series. Oxford: Clarendon Press, 1949.

3. *Полиа З. Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978.

Статья поступила в редакцию 30 мая 2019 г.;
после доработки 12 июня 2019 г.;
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Железняк Александр Владимирович — ст. преп.; ferrum2001@mail.ru

Power series of one variable with condition of logarithmical convexity

A. V. Zheleznyak

St. Petersburg Electrotechnical University "LETI", ul. Professora Popova, 5,
197376, St. Petersburg, Russian Federation

For citation: Zheleznyak A. V. Power series of one variable with condition of logarithmical convexity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 28–38. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.103 (In Russian)

We obtain a new version of Hardy theorem about power series reciprocal to the power series with positive coefficients. We prove that if the sequence $\{a_n\}$, $n \geq K$ is logarithmically convex, then reciprocal power series has only negative coefficients b_n, $n > 0$ for any K if the first coefficient a_0 is sufficiently large. The classical Hardy theorem corresponds to the case $K = 0$. Such results are useful in Nevanlinna — Pick theory. For example, if function $k(x, y)$ can be represented as power series $\sum_{n\geq 0} a_n(x\bar{y})^n$, $a_n > 0$, and reciprocal function $\frac{1}{k(x,y)}$ can be represented as power series $\sum_{n\geq 0} b_n(x\bar{y})^n$ such that $b_n < 0$, $n > 0$, then $k(x, y)$ is a reproducing kernel function for some Hilbert space of analytic functions in the unit disc $\mathbb{D}$ with Nevanlinna — Pick property. The reproducing kernel $\frac{1}{1-x\bar{y}}$ of the classical Hardy space $H^2(\mathbb{D})$ is a prime example for our theorems. In addition, we get new estimates on growth of analytic functions reciprocal to analytic functions with positive Taylor coefficients.

Keywords: power series, Nevanlinna — Pick kernels, logarithmical convexity.

References

1. Agler J., McCarthy J. E., *Pick interpolation and Hilbert function spaces*, in Ser. *Graduate Studies in Mathematics* **44** (American Mathematician Society, Providence, 2002).
2. Hardy G. H., *Divergent Series* (Clarendon Press, Oxford, 1949).
3. Polia Z. G., Sege G., *Problems and theorems of analysis* (Nauka Publ., Moscow, 1978).

Received: May 30, 2019
Revised: June 12, 2019
Accepted: September 19, 2019

Author's information:

Alexandr V. Zheleznyak — ferrum2001@mail.ru