МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.86
MSC 41A50

Экстремальные полиномы, связанные с полиномами Золотарёва

И. В. Агафонова, В. Н. Малозёмов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Агафонова И. В., Малозёмов В. Н.* Экстремальные полиномы, связанные с полиномами Золотарёва // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 3–14.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.101

Пусть на вещественной оси заданы две точки a и b, расположенные соответственно справа и слева от отрезка $[-1, 1]$. Ставится экстремальная задача: найти алгебраический полином n-й степени, который в точке a принимает значение A, на отрезке $[-1, 1]$ не превосходит по модулю величины M и принимает наибольшее возможное значение в точке b. Эта задача родственна второй задаче Золотарёва. В статье указывается множество значений параметра A, при которых данная задача имеет единственное решение, и дается альтернансная характеристика этого решения. Изучается поведение решения в зависимости от параметра A. Выясняется, что при некоторых A решение можно получить с помощью полинома Чебышёва, а при остальных допустимых A — с помощью полинома Золотарёва.

Ключевые слова: экстремальные свойства полиномов, альтернанс, полиномы Чебышёва, полиномы Золотарёва.

1. Формальная постановка задачи. Для алгебраического полинома степени не выше n, $n \geq 2$, будем использовать обозначение

$$P_n(x, t) = x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + x_2 t^{n-2} + \cdots + x_n.$$

При фиксированных вещественных параметрах

$$a > 1,\ b < -1,\ M > 0,\ A$$

поставим задачу: *максимизировать величину $P_n(x,b)$ при ограничениях*

$$|P_n(x,t)| \le M \quad \textit{при} \quad t \in [-1,1], \tag{1}$$

$$P_n(x,a) = A.$$

Другими словами, требуется найти полином, заключенный на интервале $[-1,\,1]$ в границы $[-M,\,M]$, проходящий через точку (a,A) и принимающий в точке b максимально возможное значение.

Отметим, что задача (1) может быть поставлена и решена и для случая $n=1$. Тогда при любом $b<-1$ из элементарных соображений сразу получается, что:

- при $A \notin [-aM, aM]$ задача не имеет решения;
- при $A \in [M, aM]$ задачу решает полином $\dfrac{A-M}{a-1}t + \dfrac{aM-A}{a-1}$;
- при $A \in [-aM, M]$ задачу решает полином $\dfrac{A-M}{a+1}t + \dfrac{aM+A}{a+1}$.

В частности, при $A=M$ оба оптимальных полинома обращаются в константу M.

Хорошо известна похожая экстремальная задача: найти полином, заключенный на интервале $[-1,\,1]$ в границы $[-M,\,M]$ и принимающий в точке $a>1$ максимально возможное значение. Решением этой задачи является полином $MT_n(t)$, где $T_n(t)$ — полином Чебышёва, допускающий на $[-1,\,1]$ представление $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$.

Отметим, что полином Чебышёва $T_n(t)$ имеет $(n+1)$-точечный альтернанс, а именно, принимает значения $(-1)^{n-j}$ в точках

$$\tau_j^{(n)} = \cos\frac{(n-j)\pi}{n}, \quad j \in 0:n, \tag{2}$$

расположенных на $[-1,\,1]$ по возрастанию от $\tau_0^{(n)} = -1$ до $\tau_n^{(n)} = 1$.

Решение задачи (1) имеет связь с полиномами Чебышёва и, как будет показано далее, еще более тесную связь с полиномами, решающими вторую задачу Золотарёва [1]. В статье исследуются свойства оптимальных полиномов задачи (1) и их вид в зависимости от значений параметров задачи. Теорема 2 дает альтернансную характеризацию этих полиномов.

Основные результаты данной работы были представлены в краткой заметке [2].

2. Существование решения. В доказательствах часто будет использоваться следующая лемма (частный случай леммы о числе нулей непрерывной функции, см. [3, с. 31–32]).

Лемма 1 (о нулях полинома)**.** *Пусть $Q(t)$ — нетривиальный алгебраический полином. Если существуют m точек $t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1}$, в которых*

$$\sigma(-1)^k Q(t_k) \ge 0, \quad k \in 0:m-1, \tag{3}$$

где $\sigma = \pm 1$, то $Q(t)$ имеет на $[t_0, t_{m-1}]$ не менее $m-1$ нулей с учетом их кратности. В частности, для полинома $Q(t)$ степени n выполнение неравенств (3) в $m = n+2$ точках означает, что $Q(t) \equiv 0$.

Обозначим через Ω множество коэффициентов $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ полинома $P_n(x,t)$, удовлетворяющего ограничениям задачи (1). Элементы $x \in \Omega$ будем называть *планами*.

Положим $A_n = MT_n(a)$.

Лемма 2. *Множество планов Ω непусто тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $|A| \le A_n$.*

Доказательство. Допустим, вопреки утверждению, что при некотором $A > A_n$ существует полином $P_n(x,t)$, удовлетворяющий ограничениям задачи (1). Введем полином

$$Q(t) = MT_n(t) - (1-\varepsilon)P_n(x,t).$$

Имеем $Q(a) = A_n - (1-\varepsilon)A$. Выберем $\varepsilon \in (0,1)$ так, чтобы выполнялось неравенство $Q(a) < 0$.

В точках альтернанса (2) имеет место соотношение

$$T_n(\tau_k^{(n)}) = (-1)^{n-k}, \quad k \in 0:n, \tag{4}$$

так что

$$(-1)^{n-k} Q(\tau_k^{(n)}) = M - (-1)^{n-k}(1-\varepsilon)P_n(x,\tau_k^{(n)}).$$

Так как $\left|P_n(x,\tau_k^{(n)})\right| \le M$, то

$$(-1)^{n-k} Q(\tau_k^{(n)}) > 0, \quad k \in 0:n.$$

Теперь из леммы 1, примененной для $Q(t)$ и точек $t_k = \tau_k^{(n)}$, $k \in 0:n$, $t_{n+1} = a$, следует тождество $Q(t) \equiv 0$, что противоречит свойствам $Q(t)$.

Случай $A < -A_n$ рассматривается аналогично. Противоречие получается с помощью полинома

$$Q(t) = -MT_n(t) - (1-\varepsilon)P_n(x,t).$$

Теперь возьмем $A \in [-A_n, A_n]$ и представим A в виде

$$A = (1-2\alpha)A_n, \quad \alpha \in [0,1].$$

Полином $P_n(x,t) = (1-2\alpha)MT_n(t)$ удовлетворяет ограничениям задачи (1). Значит, при $A \in [-A_n, A_n]$ множество планов Ω непусто.

Лемма доказана. $\square$

Если принять во внимание, что множество Ω ограничено и замкнуто, то приходим к следующему заключению.

Теорема 1. *При $A \in [-A_n, A_n]$ решение задачи* (1) *существует.*

В частности, при $A = \pm A_n$ множество планов Ω состоит из единственного вектора, который и дает решение задачи. Покажем это.

Допустим, что при $A = A_n$ ограничениям задачи (1) наряду с $MT_n(t)$ удовлетворяет еще один полином $P_n(x,t)$. Рассмотрим разность

$$Q(t) = MT_n(t) - P_n(x,t).$$

Согласно (4) при $k \in 0:n$ имеем

$$(-1)^{n-k} Q(\tau_k^{(n)}) = M - (-1)^{n-k} P_n(x, \tau_k^{(n)}) \geq 0.$$

Из условия $Q(a) = 0$ следует, что $-Q(a) \geq 0$. Обозначая $\tau_{n+1}^{(n)} = a$, приходим к неравенствам

$$(-1)^{n-k} Q(\tau_k^{(n)}) \geq 0, \quad k \in 0:n+1.$$

Согласно лемме о нулях полинома имеем $Q(t) \equiv 0$, так что $P_n(x,t) \equiv MT_n(t)$. Установлено, что при $A = A_n$ множество Ω состоит из единственного элемента — вектора коэффициентов полинома $MT_n(t)$.

Аналогично показывается, что при $A = -A_n$ множество Ω состоит из единственного элемента — вектора коэффициентов полинома $-MT_n(t)$.

3. Альтернансные свойства решения. При $A \in [-A_n, A_n]$ решение задачи (1) допускает альтернансную характеризацию.

Теорема 2. *Для того чтобы план $x^* \in \Omega$ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы полином $P_n(x^*, t)$ обладал n-точечным альтернансом, точнее, чтобы нашлись n точек $-1 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq 1$, в которых*

$$P_n(x^*, t_k) = (-1)^{k-1} M, \quad k \in 1:n. \tag{5}$$

Доказательству предпошлем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть $A \in (-A_n, A_n)$ и $x \in \Omega$. Тогда множество*

$$R(x) = \Big\{ t \in [-1,1] \mid \big|P_n(x,t)\big| = M \Big\}$$

содержит не более n точек.

Доказательство леммы. Предположим, что $R(x)$ содержит $n+1$ точек. Так как значения полинома $P_n(x,t)$ при $t \in [-1,1]$ не выходят за пределы коридора от $-M$ до M, то каждая внутренняя точка отрезка $[-1,1]$, принадлежащая $R(x)$, является нулем производной $P_n'(x,t)$. Таковых не может быть больше $n-1$. Отсюда, в частности, следует, что точки $t=-1$ и $t=1$ входят в $R(x)$.

Точки из $R(x)$ упорядочим по возрастанию и заметим, что в соседних точках полином $P_n(x,t)$ принимает значения разных знаков (иначе между этими точками появился бы еще один нуль производной).

Допустим, что $P_n(x,1) = M$. В точках из $R(x)$, в которых $P_n(x,t) = M$, в том числе в точке $t=1$, для разности $Q(t) = P_n(x,t) - MT_n(t)$ будут выполняться неравенства $Q(t) \geq 0$, а в точках из $R(x)$, в которых $P_n(x,t) = -M$, — неравенства $Q(t) \leq 0$. Так как $A < A_n$, то к указанным $n+1$ неравенствам нужно добавить неравенство $Q(a) < 0$. В соответствии с леммой о нулях полинома получаем $Q(t) \equiv 0$, что противоречит неравенству $Q(a) < 0$.

В случае $P_n(x,1) = -M$ к противоречию придем с помощью полинома $Q(t) = P_n(x,t) + MT_n(t)$, если учесть, что $A > -A_n$.

Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы. В случаях $A = A_n$ и $A = -A_n$ в конце п. 2 были предъявлены полиномы $\pm MT_n(t)$, каждый из которых был единственным, удовлетворявшим соответствующим ограничениям, и тем самым — единственным решением задачи. Эти полиномы имеют n-точечный (и даже $(n+1)$-точечный) альтернанс, так что для этих случаев теорема уже доказана. Проведем рассуждения при $A \in (-A_n, A_n)$.

Необходимость. Пусть x^* — оптимальный план. По лемме 3 множество $R(x^*)$ содержит не более n точек. Обозначим их $t_1 < t_2 < \ldots < t_r$, $r \leq n$.

Вектор x^* является решением следующей экстремальной задачи:

$$\begin{gathered} -P_n(x,b) \to \min, \\ P_n(x,t) \leq M,\ t \in [-1,1]; \\ -P_n(x,t) \leq M,\ t \in [-1,1]; \\ P_n(x,a) = A. \end{gathered} \tag{6}$$

Мы хотим воспользоваться необходимым условием минимума, но для этого следует проверить регулярность ограничений задачи (6) в точке x^*. Имеется достаточный признак регулярности [4, с. 344–345], согласно которому ограничения задачи (6) в точке x^* будут регулярными, если найдется вектор $\hat{x}$ со свойствами

$$\begin{gathered} P_n(\hat{x},t) < 0, \quad \text{когда} \quad P_n(x^*,t) = M; \\ P_n(\hat{x},t) > 0, \quad \text{когда} \quad P_n(x^*,t) = -M; \\ P_n(\hat{x},a) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим систему линейных уравнений на точках t_k из $R(x^*)$ и a:

$$\begin{aligned} &P_n(x,t_k) = -P_n(x^*,t_k),\ k \in 1:r; \\ &P_n(x,a) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $r \leq n$, эта система имеет решение. Обозначим его $\hat{x}$. Очевидно, что $\hat{x}$ удовлетворяет соотношениям (7). Это гарантирует регулярность ограничений задачи (6) в точке x^*.

Введем вектор-функцию $U(t) = (t^n, t^{n-1}, \ldots, 1)$. С ее помощью полином $P_n(x,t)$ можно представить в виде скалярного произведения

$$P_n(x,t) = \langle U(t), x \rangle.$$

Согласно необходимому условию минимума [4, с. 349–350], оптимальному плану x^* соответствуют неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ и вещественное γ такие, что

$$-U(b) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_k U(t_k) + \gamma U(a) = \mathbb{O}, \tag{8}$$

где $\xi_k = \operatorname{sign} P_n(x^*, t_k)$. При $r < n$ равенство (8) противоречит линейной независимости векторов $U(b), U(t_1), \ldots, U(t_r), U(a)$. Значит, $r = n$, все коэффициенты λ_k положительны и $\gamma \neq 0$.

Обозначим

$$t_{n+1} = a, \quad \xi_{n+1} = \operatorname{sign} \gamma, \quad \lambda_{n+1} = |\gamma|$$

и перепишем равенство (8) в виде

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \xi_k U(t_k) = U(b).$$

По формуле Крамера имеем

$$\lambda_k \xi_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k \in 1:n+1,$$

где Δ — определитель со столбцами $U(t_1), \ldots, U(t_{n+1})$ и Δ_k — аналогичный определитель, в котором k-й столбец $U(t_k)$ заменен на столбец $U(b)$. Нетрудно понять, что $\operatorname{sign}(\lambda_k \xi_k) = (-1)^{k-1}$, откуда в силу положительности λ_k следует равенство $\xi_k = (-1)^{k-1}$. Умножив это равенство на $\big|P_n(x^*, t_k)\big| = M$, придем к (5). Значение $\xi_{n+1} = (-1)^n$ не используется.

Достаточность. Предположим, что x^* принадлежит Ω и выполняются соотношения (5), однако существует другой вектор $\hat{x} \in \Omega$, на котором $P_n(\hat{x}, b) > P_n(x^*, b)$. Рассмотрим разность $Q(t) = P_n(x^*, t) - P_n(\hat{x}, t)$. Для нее верно

$$(-1)^{k-1} Q(t_k) \geq 0, \quad k \in 0:n+1,$$

где положено $t_0 = b$, $t_{n+1} = a$. По лемме о нулях полинома получаем $Q(t) \equiv 0$, что противоречит неравенству $Q(b) < 0$.

Теорема доказана. □

Теорема 3. *Решение задачи* (1) *единственно.*

Доказательство. Допустим, что существуют два решения x^* и $\check{x}$. В частности, $P_n(x^*, b) = P_n(\check{x}, b)$. Рассмотрим разность

$$Q(t) = P_n(x^*, t) - P_n(\check{x}, t).$$

Согласно (5) имеем $(-1)^{k-1} Q(t_k) \geq 0$, $k \in 0:n+1$, где, как и раньше, положено $t_0 = b$, $t_{n+1} = a$. По лемме о нулях полинома $Q(t) \equiv 0$, так что $P_n(x^*, t) \equiv P_n(\check{x}, t)$.

Теорема доказана. □

Заметим, что если $P_n(x^*, t)$ — решение задачи (1) при некотором значении параметра b, то тот же полином остается решением задачи (1) при любом другом значении $b < -1$.

4. Монотонность двух характеристик экстремального полинома. Чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1) от параметра A, будем обозначать его $x^*(A)$. Положим также

$$B(A) = P_n\big(x^*(A), b\big).$$

Теорема 4. *Максимальное значение $B(A)$ целевой функции в задаче* (1) *при четном n монотонно возрастает на интервале $[-A_n, A_n]$, а при нечетном n — монотонно убывает.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай четного n. Нужно проверить, что $B(A^{(1)}) < B(A^{(2)})$ при $A^{(1)} < A^{(2)}$. Допустим противное: $B(A^{(1)}) \geq B(A^{(2)})$. Полином

$$Q(t) = P_n\big(x^*(A^{(2)}), t\big) - P_n\big(x^*(A^{(1)}), t\big) \tag{9}$$

в точках альтернанса $t_k(A^{(2)})$ удовлетворяет неравенствам

$$(-1)^{k-1} Q\big(t_k(A^{(2)})\big) \geq 0, \quad k \in 1 : n. \tag{10}$$

В частности, $-Q\big(t_n(A^{(2)})\big) \geq 0$ в силу четности n. К этому нужно добавить, что $Q(a) = A^{(2)} - A^{(1)} > 0$ и $Q(b) = B(A^{(2)}) - B(A^{(1)}) \leq 0$. Мы находимся в условиях леммы о нулях полинома, согласно которой $Q(t) \equiv 0$. Это противоречит неравенству $Q(a) > 0$.

При нечетном n нужно проверить, что $B(A^{(1)}) > B(A^{(2)})$ при $A^{(1)} < A^{(2)}$. Доказательство аналогично предыдущему, только вместо неравенств (10) следует воспользоваться неравенствами

$$(-1)^{k} Q\big(t_k(A^{(1)})\big) \geq 0, \quad k \in 1 : n. \tag{11}$$

Детали мы опускаем. □

Теорема 5. *При всех значениях n старший коэффициент $x_0^*(A)$ экстремального полинома $P_n\big(x^*(A), t\big)$ монотонно возрастает на интервале $[-A_n, A_n]$.*

Доказательство. Нужно проверить, что $x_0^*(A^{(1)}) < x_0^*(A^{(2)})$ при $A^{(1)} < A^{(2)}$. Допустим противное. Тогда старший коэффициент q_0 полинома $Q(t)$ вида (9) равен нулю или меньше нуля. Независимо от четности n так же, как в теореме 4, строится набор из $n+1$ точек $t_1, \ldots, t_n, t_{n+1} = a$, в которых

$$(-1)^{n+1-k} Q(t_k) \geq 0, \quad k \in 1 : n+1. \tag{12}$$

При этом $Q(t_{n+1}) > 0$. Если $q_0 = 0$, то полином $Q(t)$ имеет степень не выше $n-1$. В этом случае неравенства (12) и лемма о нулях полинома гарантируют, что $Q(t) \equiv 0$. Но это противоречит условию $Q(t_{n+1}) > 0$.

При $q_0 < 0$ полином $Q(t)$ имеет степень n и стремится к $-\infty$ при $t \to +\infty$. Так как $Q(t_{n+1}) > 0$, то найдется точка $t_{n+2} > t_{n+1}$, в которой $Q(t_{n+2}) < 0$. Дополнив ею неравенства (12), на основании леммы о нулях полинома получим $Q(t) \equiv 0$. Это противоречит условию $Q(t_{n+1}) > 0$.

Теорема доказана. □

5. Случаи представления экстремальных полиномов через полином Чебышёва. Как отмечалось в п. 2, при $A = A_n$ и $A = -A_n$ решение задачи (1) можно записать в явном виде. Существуют и другие значения параметра A, при которых можно указать явное решение задачи (1).

Теорема 6. *Справедливы формулы*

$$P_n\big(x^*(-A_{n-1}), t\big) = -MT_{n-1}(t) \quad \textit{при четном} \quad n;$$
$$P_n\big(x^*(A_{n-1}), t\big) = MT_{n-1}(t) \quad \textit{при нечетном} \quad n.$$

Здесь $A_{n-1} = MT_{n-1}(a)$.

Доказательство. Достаточно проверить, что предъявленные полиномы обладают требуемым альтернансом.

Согласно (4) имеем

$$T_{n-1}(\tau_{k-1}^{(n-1)}) = (-1)^{n-k}, \quad k \in 1:n.$$

При четном n получаем равенства

$$-MT_{n-1}(\tau_{k-1}^{(n-1)}) = (-1)^{k-1}M, \quad k \in 1:n,$$

при нечетном n — равенства

$$MT_{n-1}(\tau_{k-1}^{(n-1)}) = (-1)^{k-1}M, \quad k \in 1:n.$$

Остается сослаться на теоремы 2 и 3. $\square$

На основании теорем 5 и 6 приходим к следующему выводу:

при четном n старший коэффициент $x_0^*(A)$ экстремального полинома $P_n\big(x^*(A),t\big)$ отрицателен при $A \in [-A_n, -A_{n-1})$, равен нулю при $A = -A_{n-1}$ и положителен при $A \in (-A_{n-1}, A_n]$;

при нечетном n старший коэффициент $x_0^*(A)$ экстремального полинома $P_n\big(x^*(A),t\big)$ отрицателен при $A \in [-A_n, A_{n-1})$, равен нулю при $A = A_{n-1}$ и положителен при $A \in (A_{n-1}, A_n]$.

Укажем еще два случая, когда решение задачи (1) можно записать в явном виде.

Обозначим $\tau^* = \tau_{n-1}^{(n)} = -\tau_1^{(n)} = \cos\frac{\pi}{n}$ и рассмотрим при $\tau \in [\tau^*, 1)$ два полинома

$$U_n(\tau,t) = MT_n\Big(\frac{1+\tau}{2}t + \frac{1-\tau}{2}\Big), \tag{13}$$

$$V_n(\tau,t) = MT_n\Big(\frac{1+\tau}{2}t - \frac{1-\tau}{2}\Big). \tag{14}$$

При $t \in [-1,1]$ полином $U_n(\tau,t)$ использует значения полинома Чебышёва на отрезке $[-\tau,1]$, а полином $V_n(\tau,t)$ — на отрезке $[-1,\tau]$. Ясно, что $\big|U_n(\tau,t)\big| \le M$ и $\big|V_n(\tau,t)\big| \le M$ при $t \in [-1,1]$. При этом в точках

$$u_k = \frac{2}{1+\tau}\tau_k^{(n)} - \frac{1-\tau}{1+\tau},$$
$$v_k = \frac{2}{1+\tau}\tau_{k-1}^{(n)} + \frac{1-\tau}{1+\tau},$$

удовлетворяющих условиям

$$-1 \le u_1 < u_2 < \ldots < u_n = 1,$$
$$-1 = v_1 < v_2 < \ldots < v_n \le 1,$$

выполняются соотношения

$$U_n(\tau,u_k) = MT_n\big(\tau_k^{(n)}\big) = (-1)^{n-k}M, \quad k \in 1:n; \tag{15}$$

$$V_n(\tau,v_k) = MT_n\big(\tau_{k-1}^{(n)}\big) = (-1)^{n-k+1}M, \quad k \in 1:n. \tag{16}$$

Вычислим

$$G_n = U_n(\tau^*,a), \quad H_n = V_n(\tau^*,a).$$

Теорема 7. *Пусть n — четное число.*

Если $A \in [H_n, A_n)$, то решение задачи (1) *можно представить в виде $V_n(\tau, t)$, где τ — единственный на промежутке $[\tau^*, 1)$ корень уравнения $V_n(\tau, a) = A$.*

Если $A \in (-A_n, -G_n]$, то решение задачи (1) *можно представить в виде $-U_n(\tau, t)$, где τ — единственный на промежутке $[\tau^*, 1)$ корень уравнения $-U_n(\tau, a) = A$.*

Доказательство. Согласно (15) и (16) полиномы $V_n(\tau, t)$ и $-U_n(\tau, t)$ при четном n и всех $\tau \in [\tau^*, 1)$ обладают требуемым альтернансом. Остается разобраться с их значениями при $t = a$.

При $\tau \in [\tau^*, 1)$ имеем

$$1 < \frac{1+\tau}{2}a + \frac{1-\tau}{2} < a,$$
$$\tau^* < \frac{1+\tau}{2}a - \frac{1-\tau}{2} < a.$$

При $t > \tau^*$ полином Чебышёва монотонно возрастает, поэтому, когда τ пробегает промежуток $[\tau^*, 1)$, значения $U_n(\tau, a)$, монотонно возрастая, заполняют промежуток $[G_n, A_n)$, а значения $V_n(\tau, a)$, монотонно возрастая, заполняют промежуток $[H_n, A_n)$. Значит, при $A \in [H_n, A_n)$ найдется единственное $\tau_A \in [\tau^*, 1)$, при котором $V_n(\tau_A, a) = A$. Полином $V_n(\tau_A, t)$ будет решением задачи (1) при выбранном A.

Если $A \in (-A_n, -G_n]$, то $-A \in [G_n, A_n)$. В этом случае найдется единственное $\tau_{-A} \in [\tau^*, 1)$, при котором $U_n(\tau_{-A}, a) = -A$. Значит, $-U_n(\tau_{-A}, a) = A$. Полином $-U_n(\tau_{-A}, t)$ будет решением задачи (1) при выбранном A.

Теорема доказана. □

Теорема 8. *Пусть n — нечетное число.*

Если $A \in [G_n, A_n)$, то решение задачи (1) *можно представить в виде $U_n(\tau, t)$, где τ — единственный на промежутке $[\tau^*, 1)$ корень уравнения $U_n(\tau, a) = A$.*

Если $A \in (-A_n, -H_n]$, то решение задачи (1) *можно представить в виде $-V_n(\tau, t)$, где τ — единственный на промежутке $[\tau^*, 1)$ корень уравнения $-V_n(\tau, a) = A$.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

6. Завершение описания альтернансной картины для экстремального полинома. Дополним теоремы 7 и 8 следующим результатом.

Теорема 9. *При $A \in (-G_n, H_n)$ в случае четного n и при $A \in (-H_n, G_n)$ в случае нечетного n оба конца отрезка $[-1, 1]$ являются точками альтернанса.*

Доказательство. Начнем со случая четного n. Допустим, что у экстремального полинома $P_n(x^*, t)$ при некотором $A \in (-G_n, H_n)$ точка $t = 1$ не будет точкой альтернанса, то есть $t_n < 1$. Рассмотрим разность

$$Q(t) = P_n(x^*, t) - V_n(\tau^*, t).$$

В точках альтернанса t_k полинома $P_n(x^*, t)$ имеем $(-1)^{k+1}Q(t_k) \geq 0$, $k \in 1 : n$. В частности, $-Q(t_n) \geq 0$. Кроме того,

$$Q(1) = P_n(x^*, 1) - MT_n(\tau^*) > 0,$$
$$Q(a) = A - H_n < 0.$$

Мы находимся в условиях леммы о нулях полинома, согласно которой $Q(t) \equiv 0$. Это противоречит неравенству $Q(a) < 0$.

Если допустить, что $t = -1$ не является точкой альтернанса полинома $P_n(x^*, t)$, то противоречие получим с помощью суммы

$$Q(t) = P_n(x^*, t) + U_n(\tau^*, t),$$

для которой выполняются неравенства

$$\begin{gathered} Q(-1) = P_n(x^*, -1) + MT_n(-\tau^*) < 0; \\ (-1)^{k+1} Q(t_k) \geq 0,\ k \in 1:n; \\ Q(a) = A + G_n > 0. \end{gathered}$$

В случае нечетного n доказательство аналогично. Противоречие получается с помощью полинома

$$Q(t) = \begin{cases} P_n(x^*, t) + V_n(\tau^*, t), & \text{если допустить, что } t_n < 1; \\ P_n(x^*, t) - U_n(\tau^*, t), & \text{если допустить, что } t_1 > -1. \end{cases}$$

Теорема доказана. □

7. Связь с полиномами Золотарёва. Решение задачи (1) связано с полиномами Золотарёва. Напомним постановку второй задачи Золотарёва [1]: *среди всех алгебраических полиномов вида*

$$F_n(p, t) = t^n + p_1 t^{n-1} + \ldots + p_n,$$

удовлетворяющих условию $F_n(p, a) = A$, найти полином, у которого величина

$$\varphi(p) = \max_{t \in [-1,1]} \big| F_n(p, t) \big|$$

принимает наименьшее значение.

Решение этой задачи существует и единственно. Обозначим его p^*. Полином $F_n^*(t) = F_n(p^*, t)$ называется полиномом Золотарёва с параметрами $a > 1$, A.

Теорема 10. *Пусть $P_n(x^*, t)$ — решение задачи (1) с параметрами $a > 1$, $b < -1$, $A \in (-A_n, A_n)$, $M > 0$. Тогда при $A \neq -A_{n-1}$ в случае четного n и при $A \neq A_{n-1}$ в случае нечетного n справедливо тождество*

$$\frac{1}{x_0^*} P_n(x^*, t) \equiv F_n^*(t), \tag{17}$$

где x_0^* — старший коэффициент полинома $P_n(x^*, t)$ и $F_n^*(t)$ — полином Золотарёва с параметрами a, A/x_0^*.

Доказательство. У полинома $\frac{1}{x_0^*}P_n(x^*,t)$ старший коэффициент равен единице, и он удовлетворяет ограничениям второй задачи Золотарёва с параметрами a, A/x_0^*. Поэтому

$$\max_{t\in[-1,1]}\bigl|F_n^*(t)\bigr| \le \max_{t\in[-1,1]}\Bigl|\frac{1}{x_0^*}P_n(x^*,t)\Bigr| = \frac{1}{|x_0^*|}M. \tag{18}$$

Введем полином $(n-1)$-й степени

$$Q(t)=\frac{1}{x_0^*}P_n(x^*,t)-F_n^*(t).$$

В точках альтернанаса t_k полинома $P_n(x^*,t)$ в силу (5) имеем

$$Q(t_k)=\frac{1}{x_0^*}(-1)^{k-1}M-F_n^*(t_k),\quad k\in 1:n.$$

Обозначим $\sigma=-\operatorname{sign}x_0^*$. Из последнего равенства следует, что

$$\sigma(-1)^kQ(t_k)=\frac{1}{|x_0^*|}M-\sigma(-1)^kF_n^*(t_k)\ge\frac{1}{|x_0^*|}M-\max_{t\in[-1,1]}\bigl|F_n^*(t)\bigr|.$$

На основании (18) получаем

$$\sigma(-1)^kQ(t_k)\ge 0,\quad k\in 1:n.$$

К этим неравенствам нужно добавить условие $Q(a)=0$. Напомним, что $Q(t)$ — полином $(n-1)$-й степени. По лемме о нулях полинома имеем $Q(t)\equiv 0$. Это равносильно тождеству (17). Теорема доказана. □

В работе [5] приведено явное решение задачи (1) при $n=3$ для всех допустимых значений параметра A.

Литература

1. *Золотарёв Е. И.* Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля // В кн.: Золотарёв Е. И. Полное собрание сочинений. Выпуск второй. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 1–59.
2. *Агафонова И. В., Малозёмов В. Н.* Экстремальные полиномы, связанные с полиномами Золотарёва // Докл. Академии наук. 2016. Т. 5. Вып. 467. С. 255–256.
3. *Мысовских И. П.* Лекции по методам вычислений. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998.
4. *Даугавет В. А., Малозёмов В. Н.* Нелинейные задачи аппроксимации // В кн.: Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979. С. 336–363.
5. *Малозёмов В. Н., Тамасян Г. Ш.* Этюд на тему полиномиальной фильтровой задачи ($n=3$) // В кн.: Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть вторая. СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. С. 305–315. URL: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps15.shtml#0312 (дата обращения: 26.05.2019).

Статья поступила в редакцию 5 июня 2019 г.;
после доработки 11 августа 2019 г.;
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Агафонова Ирина Витальевна — канд. физ.-мат. наук; ivagafonovaspb@gmail.com
Малозёмов Василий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.malozemov@spbu.ru

Extremal polynomials connected with Zolotarev polynomials

I. V. Agafonova, V. N. Malozemov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Agafonova I. V., Malozemov V. N. Extremal polynomials connected with Zolotarev polynomials. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 3–14. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.101 (In Russian)

Let two points a and b be given on the real axis, located to the right and left of the segment $[-1, 1]$ respectively. The extremal problem is posed: find an algebraic polynomial of n-th degree, which at the point a takes value A, on the segment $[-1, 1]$ does not exceed M in modulus and takes the largest possible value at b. This problem is related to the second problem of Zolotarev. In the article the set of values of the parameter A for which this problem has a unique solution is indicated, and an alternance characteristic of this solution is given. The behavior of the solution with respect to the parameter A is studied. It turns out that for some A the solution can be obtained with the help of the Chebyshev polynomial, while for all other admissible A — with the help of the Zolotarev polynomial.

Keywords: extremal properties of polynomials, alternance, Chebyshev polynomials, Zolotarev polynomials.

References

1. Zolotarev E. I., *Application of elliptic functions to questions of functions deviating least and most from zero*, In: *Collected works* **2**, 1–59 (Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1932). (In Russian)

2. Agafonova I. V., Malozemov V. N., "Extremal polynomials connected with Zolotarev polynomials", *Dokl. Akad. Nauk* **467**(5), 255–256 (2016). (In Russian)

3. Mysovskih I. P., *Lectures on Numerical Methods* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 1998). (In Russian)

4. Daugavet V. A., Malozemov V. N., *Nonlinear approximation problems*, in: *The State-of-the-Art of Operations Research Theory*, 336–363 (N. N. Moiseev (ed.), Nauka Publ., Moscow, 1979). (In Russian)

5. Malozemov V. N., Tamasyan G. Sh., *An etude on the polynomial filter problem (n = 3)*, In: *Selected Lectures on Extremal Problems. Part II*, 305–315 (VVM Publ., St. Petersburg, 2017). Available at: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps15.shtml#0312 (accessed: May 26, 2019). (In Russian)

Received: June 5, 2019
Revised: August 11, 2019
Accepted: September 19, 2019

Authors' information:

Irina V. Agafonova — ivagafonovaspb@gmail.com
Vassili N. Malozemov — v.malozemov@spbu.ru