САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики и математической физики

А. А. Багаев, Н. Г. Гельфрейх, Г. В. Филиппенко

УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ДЛЯ СТУДЕНТОВ БАЗОВОГО ПОТОКА ПЕРВОГО КУРСА II СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2020 г.

- Рецензенты: проф., д.ф.-м.н. Т. А. Суслина;
  проф., д.ф.-м.н. С. Л. Яковлев.
- Печатается по решению учебно-методической комиссии физического факультета СПбГУ.
- Рекомендовано Ученым советом физического факультета СПбГУ.

А. А. Багаев, Н. Г. Гельфрейх, Г. В. Филиппенко. УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ДЛЯ СТУДЕНТОВ БАЗОВОГО ПОТОКА ПЕРВОГО КУРСА. II СЕМЕСТР. — СПб.: СПбГУ, 2020. – 25 с.

Настоящее пособие содержит упражнения и задачи, предлагаемые студентам базового потока первого курса физического факультета СПбГУ на практических занятиях по дисциплине «Математический анализ» во втором семестре. Пособие может быть полезно преподавателям, ведущим практические занятия по курсу «Математический анализ» в группах базового потока, а также студентам, изучающим этот предмет.

Введение

Настоящее пособие содержит упражнения и задачи, предлагаемые студентам базового потока первого курса физического факультета СПбГУ на практических занятиях по дисциплине «Математический анализ» во втром семестре. Пособие может быть полезно преподавателям, ведущим практические занятия по курсу «Математический анализ» в группах базового потока, а также студентам, изучающим этот предмет.

Предлагаемые задания разбиты на 8 тем: систематическое интегрирование; определенный интеграл; несобственные интегралы; числовые ряды; функциональные последовательности и ряды; функции многих переменных: основные понятия; замена переменных в дифференциальных выражениях; функции нескольких переменных: приложения. Каждая тема рассчитана приблизительно на 1,5 – 2 занятия. В конце пособия приведены ответы на предложенные задания.

Пособие не содержит изложения основных понятий и формул, необходимых при решении задач (эти сведения содержатся, например, в [1]–[5]).

Большая часть предложенных заданий — элементарные упражнения, необходимые для тренировки навыков решения стандартных задач. Большинство упражнений и задач взяты авторами из [5]–[7] и используются в тексте без дополнительных ссылок. Менее элементарные упражнения и задачи также можно найти в [5]–[7].

Тема 1. Систематическое интегрирование

1. Вычислить интегралы:

1) $\int (x-3)\cos x\,dx$;

2) $\int x(1-x)^{10}dx$;

3) $\int \frac{x^4+2x-1}{x^2}dx$;

4) $\int \cos^4 x\,dx$;

5) $\int xe^{x^2}dx$;

6) $\int \sqrt[5]{4-5\sin 2x}\cos 2x\,dx$;

7) $\int \frac{\ln x}{x}$;

8) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$;

9) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

10) $\int xe^{2x}dx$;

11) $\int \operatorname{ctg} 2x\,dx$;

12) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

13) $\int x\operatorname{arctg} 2x\,dx$;

14) $\int \frac{4x^3+\cos x}{x^4+\sin x}dx$;

15) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$;

16) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

17) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

18) $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

2. Даны рациональные функции:

$$\frac{2x^2-1}{x^3+x-2}; \quad \frac{x-1}{x+1}; \quad \frac{3x^3-4x}{x+2}; \quad \frac{2x+1}{(x^3+x)^2};$$

$$\frac{x^3}{x^2-x+5}; \quad \frac{x^2+1}{x^2}; \quad \frac{1}{x^4+1}.$$

1) Какие из них представлены правильными, а какие неправильными дробями?
2) Для неправильных дробей выделить целую часть.
3) Разложить знаменатели дробей на множители.
4) Записать заданные рациональные функции в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами (коэффициенты определять не надо).

3. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a}$;

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}, \ n \neq 1$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$;

4) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$;

5) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2-a^2}$;

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}$;

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+1}$;

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$;

9) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2-4x+6}$.

4. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$. Системы уравнений на коэффициенты составить двумя способами: 1) приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, 2) полагая x равным некоторым числам.

5. Применяя метод Остроградского, вычислить

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

6. Вычислить интегралы:

$$1)\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}; \qquad 3)\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx;$$

$$2)\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x}}; \qquad 4)\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx.$$

7. Вычислить интегралы с помощью замены переменной $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$:

$$1)\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}; \qquad 2)\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}.$$

8. Вычислить интеграл от дифференциального бинома:

$$1)\int x\sqrt[4]{x-2}dx; \qquad 4)\int \sqrt[3]{x-x^3}dx;$$

$$2)\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}; \qquad 5)\int \frac{x^{1/3}}{\sqrt{x^{1/3}+1}}dx;$$

$$3)\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx; \qquad 6)\int \frac{(x^3+1)^{1/3}}{x^2}dx.$$

Тема 2. Определённый интеграл

1. Составить интегральную сумму S_n, $n \in \mathbb{N}$, для функции $f(x) = 1 + x$ на отрезке $[1; 9]$, деля этот отрезок на n равных частей и выбирая точки ξ_k, совпадающими с правыми концами отрезков $[x_{k-1}, x_k]$. Сделать рисунок, иллюстрирующий геометрический смысл S_n. Вычислить $\lim_{n\to\infty} S_n$.

2. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найти интегралы:

$$1)\int\limits_1^9 (1+x)\,dx; \quad 2)\int\limits_0^\pi \sin x\,dx; \quad 3)\int\limits_{-x}^x e^t dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Найти производные следующих функций:

$$1) f(x) = \int\limits_1^x \frac{\ln t}{t} dt; \qquad 4) f(x) = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos z^2 dz;$$

$$2) f(x) = \int\limits_x^0 \sqrt{1+y^4} dy; \qquad 5) f(x) = \int\limits_0^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt;$$

$$3) f(x) = \int\limits_x^{x^2} e^{-t^2} dt; \qquad 6) f(x) = \int\limits_{\cos x}^{\sin x} \frac{dt}{(t^2+1)^3}.$$

4. Вычислить интегралы, используя заданные замены переменных:

$$1)\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \quad 1+\sqrt{x}=t; \qquad 3)\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}, \quad e^x=t.$$

$$2)\int\limits_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx, \quad \sqrt{x}=t;$$

5. Вычислить интегралы, используя подходящие замены переменных:

$$1)\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx; \qquad 2)\int\limits_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}dx.$$

6. Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}.$$

7. Вычислить интегралы, пользуясь формулой интегрирования по частям:

$$1)\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin x dx; \qquad 2)\int\limits_1^x \ln t\, dt, \quad x>0.$$

8. Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом T: $f(x+T)=f(x)$. Известно, что $\int_0^T f(x)dx=a$. Можно ли определить, чему равны интегралы:

$$1)\int\limits_0^{2T} f(x)dx,\quad 3)\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)dx,\quad 5)\int\limits_{10-T}^{10} f(x)dx\ ?$$

$$2)\int\limits_0^{T/2} f(x)dx,\quad 4)\int\limits_{-T}^{T} f(x)dx,$$

9. Чему равны интегралы:

$$1)\int\limits_a^b dx,\quad 4)\int\limits_0^{2\pi}\sin x dx,\quad 7)\int\limits_0^{\pi}\cos 2x dx,$$

$$2)\int\limits_{-a}^{a}\sin x dx,\quad 5)\int\limits_{-\pi}^{3\pi}\sin x dx,\quad 8)\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x)dx,$$

$$3)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x dx,\quad 6)\int\limits_0^{2\pi}\cos x dx,\quad 9)\int\limits_{-1}^{1}\frac{\arcsin x}{x^6+\cos x}dx\ ?$$

10. Не вычисляя интегралов, определить их знак:

$$\int\limits_{-2}^{1} x^3dx,\quad \int\limits_0^{\pi} x\cos x dx,\quad \int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx.$$

11. Найти средние значения функций на указанных промежутках:

1) $f(x)=\sin x,\quad [0;\pi];$ 3) $f(x)=a+b\cos x,\quad [-\pi;\pi];$

2) $f(x)=x^2,\quad [0;1];$ 4) $f(x)=\sin 2x,\quad [0;\pi].$

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2/2,\ x = 1,\ x = 3,\ y = 0;$
2) $y = x^2 - 4x + 1,\ y = x + 1;$
3) $y = 6x - x^2 - 7,\ y = x - 3;$
4) $y = 2 - x^2,\ y^3 = x^2;$
5) $y^2 = x,\ 2 - y^2 = x;$
6) $\sqrt{\frac{x}{3}} + \sqrt{\frac{y}{2}} = 1,\ x = 0,\ y = 0.$

13. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярных координатах:

$$1)\ r^2 = a^2 \cos 2\varphi; \quad 2)\ r = \frac{1}{2} + \cos\varphi; \quad 3)\ r = a \sin 3\varphi.$$

15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией: $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

16. К эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $C = (\frac{a}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2})$ проведена касательная, которая пересекает ось абсцисс в точке B. Найти площадь криволинейного треугольника ABC, где A — точка с координатами $(a; 0)$.

17. Вычислить длину дуги кривой

1) $y^2 = x^3,\ 0 \le x \le 4;$
2) $y = 1 - \ln\sin x,\ \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2};$
3) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2},\ 1 \le x \le 2;$
4) $y = \ln(x^2 - 1),\ 2 \le x \le 3;$
5) $y = \arccos x + \sqrt{1 - x^2},\ 0 \le x \le \frac{8}{9};$
6) $y = \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

18. Найти длину дуги кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t); \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos t + t \sin t; \\ y = \sin t - t \cos t; \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t; \\ z = e^t; \\ t \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

19. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $0 \le x \le \pi$ вокруг оси Ox.

20. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$$1) \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1; \\ z = x; \\ z = 0 \ (z \ge 0); \end{cases} \qquad 3) \begin{cases} x^2 + y^2 = z; \\ x^2 + y^2 = 1; \\ z = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ y^2 + z^2 = 1; \end{cases} \qquad 4) \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1; \\ z = 4; \\ z = 0. \end{cases}$$

Тема 3. Несобственные интегралы

1. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

$$1) \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad 3) \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}; \quad 5) \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p};$$

$$2) \int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{x}; \quad 4) \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}; \quad 6) \int\limits_0^{+\infty} \sin x \, dx;$$

7) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx;$ 10) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x};$ 13) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x};$

8) $\int\limits_0^{1} \ln x\, dx;$ 11) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}dx;$ 14) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx;$

9) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x};$ 12) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x};$ 15) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$ при вращении вокруг оси 1) Ox; 2) Oy.

3. Исследовать интегралы на сходимость:

1) $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x - x}{x^4}dx;$ 7) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x};$

2) $\int\limits_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}dx;$ 8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}};$

3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x}{x^3+1}dx;$ 9) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};$

4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x}};$ 10) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}dx;$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3};$ 11) $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx;$

6) $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\ln x};$ 12) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3}}dx;$

13) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{x}dx}{\sin x}$;

14) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x}{e^x - 1}$;

15) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 - 1}}$;

16) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}dx$;

17) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2}dx$;

18) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+1}{x^3+x^2}}dx$.

4. Определить, при каких значениях параметра сходятся интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^{\alpha}}dx$;

2) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\sin x - x}{x^p}dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^p}dx$;

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-x}dx$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^{\alpha}}{\sin x}dx$;

6) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$;

7) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^p x}$;

8) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p dx}{\sqrt{x^3+1}}$;

9) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{(e^x-1)dx}{x^a(e^x+1)}$.

5. Вычислить интегралы в смысле главного значения:

1) $\displaystyle v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx$;

2) $\displaystyle v.p.\int\limits_0^{2} \frac{x}{x^2-1}dx$;

3) $\displaystyle v.p.\int\limits_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

4) $\displaystyle v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$.

Тема 4. Числовые ряды

1. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\tfrac{1}{n}; \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\tfrac{1}{n}; \qquad 7)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n-1}{n+1};$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\sin n}{n}; \qquad 5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n}{2n-1}; \qquad 8)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{n-1}{n+1}\right)^{n};$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \cos\tfrac{1}{n}; \qquad 6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.001}; \qquad 9)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}.$$

2. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Даламбера:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n}{3^n}; \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{3^n}{5^n+(-2)^n}; \qquad 5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(n!)^2}{(2n)!};$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n^n}{(n+1)!}; \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1000^n}{n!}; \qquad 6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(2n-1)!!}{3^n n!}.$$

3. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{n}{2n+1}\right)^{n}; \qquad 3)\ \sum_{n=3}^{\infty} \left(\tfrac{n}{n-2}\right)^{n^2};$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{n-1}{n+2}\right)^{n^2}; \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} e^{n/2}.$$

4. Использовать интегральный признак для исследования сходимости следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$;

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$.

5. Использовать I признак сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{\sqrt{n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{th}(\sin^2 n)}{n}\right)^2$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2-2n)}{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-\sin n}{2^n}$; 6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

6. Использовать II признак сравнения (заменяя члены ряда на эквивалентные):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{3n^2-n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^3 \frac{1}{\sqrt{n}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^3+2}-3n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} n$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2-1}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+1/n)}{n}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^{1/n}-1)$.

7. Исследовать на абсолютную сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n-n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2+4}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-1)^n 2^{2n}}{4^n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{\sqrt{n^3+1}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n+7}{5^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

8. Доказать условную сходимость рядов с помощью признака Лейбница:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2+4}}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-5}{n(n+1)}$.

Тема 5. Функциональные последовательности и ряды

1. Исследовать функциональную последовательность

$$f_n(x) = x^n$$

на равномерную сходимость на промежутках: 1) $[0, 1/2]$, 2) $[0, 1]$.

2. Исследовать на равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ и $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ на отрезке $[0, 1]$.

3. Доказать, что последовательность $f_n(x) = \frac{xe^{nx}}{1+e^{3nx}}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

4. Доказать, что последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, x \leq n, \\ 1, x > n \end{cases}$$

не сходится равномерно на $[0, +\infty)$.

5. Используя признак Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость рядов на указанных промежутках:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2} \text{ на } (-\infty; +\infty);$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \text{ на } (-\infty; +\infty);$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x+n)}{4^n}(5-x)^n \text{ на } [2; 3];$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sin \frac{x}{n}}{3^n}, \quad \text{на} \quad (-2; 2);$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{3^n}(x-1)^n, \quad \text{на} \quad [-1;3];$$

$$6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \cos nx, \quad \text{на} \quad [-2;1].$$

6. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{3n-4}(x+3)^n; \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}(x-3)^{2n+1};$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n}(x-1)^n; \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n3^n}.$$

7. Найти область сходимости ряда

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^{3x-x^2}}; \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n+1}.$$

8. Написать ряд Тейлора в нуле для следующих функций:

$$1)\ \ln\sqrt{1+x}; \qquad 3)\frac{1}{1-x}; \qquad 5)\frac{9}{20-x-x^2};$$

$$2) e^{2x}; \qquad 4)\ \sin^2 x; \qquad 6)\frac{x}{1+x^2};$$

7)$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; 8)$\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$; 9)$(3-e^{-x})^2$.

9. Написать ряд Тейлора в нуле для функции $f(x) = \dfrac{2-2x}{x^2-2x+2}$.

10. Написать ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ для функции $f(x) = \ln x$.

Тема 6. Функции многих переменных: основные понятия

1. Найти и изобразить области определения функций:

1)$f(x,y) = x + \sqrt{y}$; 3)$f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$;

2)$f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$; 4)$f(x,y) = \ln(x - xy)$.

2. Найти точки разрыва следующих функций:

$$1)\ f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}; \quad 2)\ f(x,y) = \frac{1}{x-y^2}.$$

3. Вычислить повторные пределы:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{3xy-y}{x^2+y^2}; \quad 2)\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{3xy-y}{x^2+y^2}.$$

4. Доказать, что не существует предел

$$\lim_{(x,y)\to(0;0)}\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

5. Доказать, что

$$\lim_{(x,y)\to(0;0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

6. Выяснить, существуют ли пределы

$$1)\ \lim_{(x,y)\to(0;0)} \tfrac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad 3)\ \lim_{(x,y)\to(0;0)} \tfrac{xy}{\sqrt{2x^2+y^2}};$$

$$2)\ \lim_{(x,y)\to(0;0)} \tfrac{2x^4+y^5}{(x^2+y^2)^2}; \quad 4)\ \lim_{(x,y)\to(0;0)} \tfrac{x^3}{x^2+2y^2}.$$

7. Вычислить все частные производные первого и второго порядков:

$$1)\ f(x,y,z) = x^4y - y^3z; \quad 3)\ f(x,y) = x^y.$$

$$2)\ f(x,y) = \ln(x+y^2);$$

8. Найти дифференциал функции

$$1)\ f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}; \qquad 2)\ f(x,y) = \operatorname{tg}(x^3y).$$

9. Найти d^2f:

$$1)\ f(x,y,z) = x^4y - y^3z; \quad 3)\ f(x,y) = x^y.$$

$$2)\ f(x,y) = \ln(x+y^2);$$

10. Найти d^3f для функции $f(x,y) = x^3 + x\sin y$.

11. Для функции $f(x,y)=e^{xy}$ вычислить значение $d^2 f$ в точке $(2;1)$.

Тема 7. Замена переменных в дифференциальных выражениях

1. Написать формулу для вычисления частной производной по x функции $u(x,y)=f(t(x,y),s(x,y),p(x,y))$.

2. Написать формулу для вычисления производной функции $u(t)=f(x(t),y(t),t)$

3. Написать формулы для вычисления производных $\frac{\partial}{\partial x}$; $\frac{\partial}{\partial y}$; $\frac{\partial}{\partial z}$ функции

$$g(x,y,z)=f\left(\frac{x}{y};\frac{yz^2}{x}\right).$$

4. Найти du и d^2u, если $u(x,y)=f(xy)$.

5. Найти du, если

$$1)\ u(x,y)=f\left(x,\frac{x}{y}\right);\quad 2)\ u(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

6. Найти dz и $\frac{\partial z}{\partial x}$ неявно заданной функции

1) $x+y+z=e^z$; 2) $z^3-3xyz=1$; 3) $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$.

7. Преобразовать уравнение

1) $x^4y'' + 2x^3y' - y = 0$, полагая $x = \frac{1}{t}$;

2) $x^2y'' + xy' + y = 0$, полагая $x = e^t$.

8. Преобразовать уравнение, приняв y за новую независимую переменную, а x — за новую функцию:

1) $y'' - xy'^3 = 0$; 3) $3y''^2 - y'y''' - y''y'^2 = 0$;

2) $y'y''' - 3y''^2 = x$; 4) $y'^2y^{IV} - 10y'y''y''' + 15y''^3 = 0$.

9. Преобразовать уравнение

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0,$$

приняв x за новую функцию и $t = xy$ — за новую независимую переменную.

10. Преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, следующие уравнения:

$$1)\ y' = \frac{x+y}{x-y}; \quad 2)\ (x^2+y^2)^2y'' = (x+yy')^3.$$

11. Кривизну плоской кривой

$$K = \frac{|y''|^2}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

выразить в полярных координатах r и φ.

12. Вводя новые независимые переменные ξ и η, решить следующие уравнения:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $\xi = x + y$ и $\eta = x - y$;

2) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $\xi = x$ и $\eta = x^2 + y^2$;

3) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $\xi = x$ и $\eta = \frac{y}{x}$.

Тема 8. Функции нескольких переменных: приложения

1. Вычислить $\mathrm{grad} f$, $\mathrm{grad} f(M)$ и производную функции f в точке M по направлению, заданному вектором $\vec{l}$, если

1) $f(x, y) = x \arcsin y$; $\quad M = (2; 0)$, $\quad \vec{l} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$;

2) $f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$; $\quad M = (0; 1; 2)$, $\quad \vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$;

3) $f(x, y, z) = x^{yz}$; $\quad M = (1; 1; 1)$, $\quad \vec{l} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$;

4) $f(x, y, z) = \mathrm{arctg}(xyz)$; $M = (1; -1; 1)$, $\vec{l} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

2. Вычислить производную функции $f(x,y,z)=\frac{xy^2}{z}$ в точке $(2;1;-2)$ по направлению к началу координат.

3. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к заданной поверхности в заданной точке:

$$1)\ z=x^2-2xy+y^2-x+2y;\quad M(1;1;1);$$

$$2)\ x^2+y^2+z^2=3;\quad M(-1;-1;1);$$

$$3)\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4;\quad M(4;1;1);$$

$$4)\ z=x^2+\frac{y^2}{2};\quad M(1;-2;3);$$

$$5)\ z=y+\ln\frac{x}{z};\quad M(1;1;1);$$

$$6)\ z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x};\quad M(1;1;\pi/4).$$

4. Написать формулу Тейлора второго порядка для заданной функции в заданной точке:

1) $f(x,y)=x^y$, $(2;3)$;

2) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x}$, $(2;-1)$;

3) $f(x,y,z)=\dfrac{xy}{z}$, $(1,1,1)$.

5. Написать формулу Тейлора третьего порядка для функции $f(x,y)=x^2\cos y$ в точке $(1,0)$.

6. Найти стационарные точки и определить их тип:

$$1)\ f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y;$$

2) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$;

3) $f(x, y) = x^2 - 4xy + 2y^3 + y^2$;

4) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$;

5) $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 + z^2 - 2z + 1$;

6) $f(x, y, z) = e^{xy+z^2}$.

7. Исследовать на экстремумы функцию:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

8. Методом множителей Лагранжа найти точки условных экстремумов и определить типы экстремумов для функций:

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$, если $x - y = 2$;

2) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$, если $x + 2y = 2$;

3) $f(x, y) = x + y$, если $x^2 + y^2 = 2$;

4) $f(x, y) = 2x + 3y$, если $2x^2 + 6xy + 5y^2 = 2$;

5) $f(x, y, z) = x + y + z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 3$;

6) $f(x, y, z) = x + 2y + 2z$,

если $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz = 3$;

7) $f(x,y,z)=x^2+z^2-4y-2z+1,$
если $x+y=0$ и $y+z=1$;

8) $f(x,y,z)=x^2-y^2-2y+z-1,$
если $x-y=1$ и $x^2+z=0$.

9. Найти производные функций:

1) $f(x)=\int\limits_1^x \frac{\sin(t+\ln x)}{t}dt$; 3) $f(x)=\int\limits_x^{x^2} e^{(t+\sin x)^2}dt$;

2) $f(x)=\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos(xt^2)dt$; 4) $f(x)=\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \frac{1}{x+\ln t}dt$.

Ответы и указания.

Тема 1. Систематическое интегрирование. (Константы в ответах опущены.)

1. 1) $(x-3)\sin x+\cos x$; 2) $-\frac{1}{11}(1-x)^{11}+\frac{1}{12}(1-x)^{12}$; 3) $\frac{x^3}{3}+2\ln x+\frac{1}{x}$; 4) $\frac{\sin 4x}{32}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3}{8}x$; 5) $\frac{1}{2}e^{x^2}$; 6) $-\frac{1}{12}(4-5\sin 2x)^{6/5}$; 7) $\frac{\ln^2 x}{2}$; 8) $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}$; 9) $-2\cos\sqrt{x}$; 10) $\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}$; 11) $\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|$; 12) $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}$; 13) $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x$; 14) $\ln|x^4+\sin x|$; 15) $\frac{1}{4}\arcsin x^4$; 16) $-\frac{1}{\ln x}$; 17) $\frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2}$; 18) $-\frac{x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$.

2. $\frac{2x^2-1}{x^3+x-2}=\frac{2x^2-1}{(x-1)(x^2+x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2}$; $\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$; $\frac{3x^3-4x}{x+2}=3x^2-6x+8-\frac{16}{x+2}$; $\frac{2x+1}{(x^3+x)^2}=\frac{2x+1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$; $\frac{x^3}{x^2-x+5}=x+1-\frac{4x+5}{x^2-x+5}$; $\frac{x^2+1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$.

3. 1) $\ln|x-a|$; 2) $-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$; 3) $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$; 4) $\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$; 5) $\frac{1}{2}\ln|x^2-a^2|$; 6) $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$; 7) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x$; 8)$\operatorname{arctg}(x+3)$; 9) $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+6)+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{2}}$.

4. $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1/4}{x-1}+\frac{-1/4}{x+1}+\frac{1/2}{(x+1)^2}$; $\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}$.

5. $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x$.

6. 1) $2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)$; 2) $\frac{1}{2}\ln(3\sqrt[3]{x^2}+1)$; 3) $\frac{6}{5}x^{5/6}-2x^{1/2}+6x^{1/6}-6\operatorname{arctg}x^{1/6}$; 4) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$.

7. 1) $\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1|$; 2) $-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}$.

8. 1) $x-2=t^4$, $\frac{4}{9}(x-2)^{9/4}+\frac{8}{5}(x-2)^{5/4}$; 2) $\frac{1}{x^4}+1=t^4$, $-\int\frac{t^2}{t^4-1}dt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^4+1}+x}{\sqrt[4]{x^4+1}-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}$; 3) $1+\sqrt[3]{x^2}=t^2$, $\frac{3}{5}t^5-2t^3+30t$; 4) $\frac{1}{x^2}-1=t^3$, $\frac{t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{6}\ln|t+1|+\frac{1}{12}\ln(t^2-t+1)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$; 5) $x^{1/3}+1=t^2$, $\frac{6}{7}t^7-\frac{18}{5}t^5+6t^3-6t$; 6) $1+\frac{1}{x^3}=t^3$, $-\int\frac{t^3}{t^3-1}=-t-\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$.

Тема 2. Определённый интеграл.

1. $\xi_k=1+\frac{8}{n}k$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{8}{n}k\right)\frac{8}{n}$, $\lim_{n\to\infty}S_n=48$.

2. 1) 48; 2) 2; 3) $2\operatorname{sh}x$.

3. 1) $\frac{\ln x}{x}$; 2) $-\sqrt{1+x^4}$; 3) $2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$; 5) $\frac{3\sin x^3}{x}$; 6) $\frac{\cos x}{(\sin^2x+1)^3}+\frac{\sin x}{(\cos^2x+1)^3}$.

4. 1) $\int_1^3\frac{2(t-1)}{t}dt=4-2\ln 3$; 2) $\int_1^2 2e^tdt=2e^2-2e$; 3) $\int_1^e\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$.

5. 1) $2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

6. $\int\frac{dx}{3+2\cos x}=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}$, $\int_0^{2\pi}=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}=\frac{2}{\sqrt{5}}\pi$.

7. 1) 2; 2) $x\ln x-x+1$.

8. 1) $2a$; 2) нет; 3) a; 4) $2a$; 5) a.

9. 1) $b-a$; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 0; 7) 0; 8) 2π; 9) 0.

10. $\int_{-2}^{1}x^3\,dx<0$, $\int_0^{\pi}x\cos x\,dx<0$, $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx>0$.

11. 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) a; 4) 0.

12. 1) $\frac{13}{3}$; 2) $\frac{125}{6}$; 3) 4,5; 4) $\frac{32}{15}$; 5) $\frac{8}{3}$; 6) 1.

13. πab.

14. 1) a^2; 2) $\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{8}$; 3) $\frac{\pi a^2}{4}$.

15. 1 (перейти к полярным координатам).

16. $ab\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$.

17. 1) $\frac{8}{27}(10^{3/2}-1)$; 2) $\frac{1}{2}\ln 3$; 3) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$; 4) $1+\ln 2-\ln 3$; 5) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; 6) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

18. 1) $8a$; 2) $2\pi^2$; 3) $\sqrt{3}$.

19. $\frac{\pi^2}{2}$.

20. 1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 8π.

Тема 3. Несобственные интегралы.

1. 1) 2; 2) расх.; 3) $\frac{1}{1-p}$ при $p<1$; расх. при $p\geq 1$; 4) расх.; 5) $\frac{1}{p-1}$ при $p>1$; расх. при $p\leq 1$; 6) расх.; 7) 1; 8) -1; 9) расх.; 10) $\frac{1}{\ln 2}$; 11) $\frac{1}{2}$; 12) расх.; 13) $\frac{1}{\ln 2}$; 14) $\frac{3}{32}\pi^2$; 15) $\frac{\pi}{2}$.

2. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2π.

3. 1) расх.; 2) сх.; 3) сх.; 4) расх.; 5) сх.; 6) расх.; 7) расх.; 8) сх.; 9) сх.; 10) расх.; 11) сх.; 12) сх.; 13) сх.; 14) расх.; 15) сх.; 16) сх.; 17) сх.; 18) расх.

4. 1) $\alpha>2$; 2) $p<4$; 3) $p<3$; 4) $p>-1$; 5) $\alpha>0$; 6) $1<n<2$; 7) $\varnothing$; 8) $-1<p<\frac{1}{2}$; 9) $1<a<2$.

5. 1) π; 2) $\frac{1}{2}\ln 3$; 3) $-\frac{1}{2}\ln 3$; 4) 0.

Тема 4. Числовые ряды.

2. $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}$: 1) $\frac{1}{3}$; 2) e; 3) $\frac{3}{5}$; 4) 0; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{2}{3}$.

3. $\lim\sqrt[n]{a_n}$: 1) $\frac{1}{2}$; 2) e^{-3}; 3) e^2; 4) $e^{-1/2}$.

4. 1) при $p>1$ сх., при $p\leq 1$ расх.; 2) расх.; 3) сх.; 4) расх.; 5) сх.; 6) сх.

5. 1) сх.; 2) сх.; 3) расх.; 4) сх.; 5) сх.; 6) расх.

6. $a_n\sim$: 1) $\frac{1}{n}$; 2) $\frac{1}{n}$; 3) $\frac{1}{n^{3/2}}$; 4) $\frac{1}{n^{1/2}}$; 5) $\frac{1}{n}$; 6) $\frac{1}{n^{3/2}}$; 7) $\frac{1}{n^{3/2}}$; 8) $\frac{1}{n^{1/2}}$; 9) $\left(\frac{3}{5}\right)^n$; 10) $\frac{1}{n^2}$; 11) $\frac{1}{n^2}$; 12) $\frac{1}{n}$.

7. 1) есть; 2) есть; 3) нет; 4) есть; 5) нет; 6) есть.

Тема 5. Функциональные последовательности и ряды.

6. $R=1$, $x=-2;4$ расх.; 2) $R=\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{2}$ расх., $x=\frac{3}{2}$ сх. усл.; 3) $R=1$; $x=2;4$ сх. усл.; 4) $R=\sqrt[3]{3}$; $x=-\sqrt[3]{3}$ сх. усл.; $x=\sqrt[3]{3}$ расх.

7. 1) $x>0$ сх. абс.; $x=0$ сх. усл.; 2) $(1;2)$ сх. абс.; 3) $(-1;1)$ сх. абс.

8. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}x^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$;
5) $\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x-4}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)x^n$;

6) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$; 7) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}x^n$;
8) $\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!5^n}{n!2^{3n+1}}x^{n+2}$; 9) $4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^n-6)}{n!}x^n$.
9. $\frac{1}{1+i-x}+\frac{1}{1-i-x}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{1-n}{2}}\cos\frac{\pi(n+1)}{4}x^n$.
10. $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x-2)^n$.

Тема 6. Функции многих переменных: основные понятия.

3. 1) 0; 2) ∞.

6. 1) $\nexists$; 2) $\nexists$; 3) 0; 4) 0.

7. 1) $f'_x=4x^3y$, $f'_y=x^4-3y^2z$, $f'_z=-y^3$; $f''_{xx}=12x^2y$, $f''_{yy}=-6yz$, $f''_{zz}=0$, $f''_{xy}=4x^3$, $f''_{yz}=-3y^2$, $f''_{xz}=0$; 2) $f'_x=\frac{1}{x+y^2}$, $f'_y=\frac{2y}{x+y^2}$; $f''_{xx}=-\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $f''_{yy}=\frac{2x-2y^2}{(x+y^2)^2}$, $f''_{xy}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}$; 3) $f'_x=yx^{y-1}$, $f'_y=x^y\ln x$; $f''_{xx}=y(y-1)x^{y-2}$, $f''_{yy}=x^y\ln^2 x$, $f''_{xy}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$.

8. 1) $\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$; 2) $\frac{3x^2y\,dx+x^3dy}{\cos^2(x^3y)}$.

9. 1) $12x^2y\,dx^2-6yz\,dy^2+8x^3dxdy-6y^2dydz$;
2) $-\frac{1}{(x+y^2)^2}dx^2-\frac{4y}{(x+y^2)^2}dxdy+\frac{2x-2y^2}{(x+y^2)^2}dy^2$;
3) $y(y-1)x^{y-2}dx^2+2(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x)dxdy+x^y\ln^2 x dy^2$.

10. $6\,dx^3-3\sin y\,dx\,dy^2-x\cos y dy^3$.

11. $e^2(dx^2+4dy^2+6dxdy)$.

Тема 7. Замена переменных в дифференциальных выражениях.

1. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$.
2. $u'(t)=f'_x(x(t),y(t),t)x'(t)+f'_y(x(t),y(t),t)y'(t)+f'_t(x(t),y(t),t)$.
3. $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{y}f'_I-\frac{yz^2}{x^2}f'_{II}$; $\frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'_I+\frac{z^2}{x}f'_{II}$; $\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{2yz}{x}f'_{II}$.
4. $du=f'(xy)(y\,dx+x\,dy)$; $d^2u=f''(xy)y^2dx^2+f''(xy)x^2dy^2+2(xyf''(xy)+f'(xy))dx\,dy$.
5. 1) $du=(f'_I+\frac{1}{y}f'_{II})dx-\frac{x}{y^2}f'_{II}dy$;
2) $du=\frac{f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dx+y\,dy)$.
6. 1) $dz=\frac{dx+dy}{e^z-1}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{e^z-1}$; 2) $dz=\frac{1}{z^2-xy}(yz\,dx+xz\,dy)$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}$; 3) $dz=-dx-dy$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.
7. 1) $y''-y=0$; 2) $y''+y=0$.
8. 1) $x''+x=0$; 2) $x'''+xx'^5=0$; 3) $x'''+x''=0$; 4) $x^{IV}=0$ $\left(y'=\frac{1}{x'};\ y''=-\frac{x''}{x'^3};\ y'''=-\frac{x'''}{x'^4}+\frac{3x''^2}{x'^5};\ y^{IV}=-\frac{x^{IV}}{x'^5}+\frac{10x'''x''}{x'^6}-\frac{15x''^3}{x'^7}\right)$.
9. $x''-tx'^3=0$ $\left(y'=\frac{1}{xx'}-\frac{t}{x^2};\quad y''=-\frac{x''}{xx'3}-\frac{2}{x^2x'}+\frac{2t}{x^3}\right)$.
10. 1) $r'-r=0$; 2) $r''r^2+r'^3-2r'^2r-r^3=0$.

$\left(y' = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}; \quad y'' = \frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3}\right)$

11. $\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$.

12. 1) $z(x,y) = \varphi(x+y)$; 2) $z(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$; 3) $z(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})$.

Тема 8. Функии нескольких переменных: приложения.

1. 1) $\mathrm{grad} f(x,y) = \arcsin y\,\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\vec{j}$, $\mathrm{grad} f(2,0) = 2\vec{j}$, $\frac{\partial f}{\partial l} = -\frac{8}{5}$;

2) $\mathrm{grad} f(x,y,z) = \frac{y}{z}\vec{i} + \frac{x}{z}\vec{j} - \frac{xy}{z^2}\vec{k}$, $\mathrm{grad} f(0,1,2) = \frac{1}{2}\vec{i}$, $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{6}}$;

3) $\mathrm{grad} f(x,y,z) = yzx^{yz-1}\vec{i} + zx^{yz}\ln x\vec{j} + yx^{yz}\ln x\vec{k}$, $\mathrm{grad} f(1,1,1) = \vec{i}$, $\frac{\partial f}{\partial l} = 0$;

4) $\mathrm{grad} f(x,y,z) = \frac{yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}}{(xyz)^2+1}$, $\mathrm{grad} f(1,-1,1) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$, $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{1}{2}$.

2. $\frac{2}{3}$.

3. 1) $x - 2y + z = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$; 2) $x + y - z + 3 = 0$, $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$; 3) $x + 4y + 4z - 12 = 0$, $\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{4}$; 4) $2x - 2y - 3z + 3 = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{-3}$; 5) $x + y - 2z = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$; 6) $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\pi/4}{2}$.

4. 1) $x^y = 8 + 12(x-2) + 8\ln 2(y-3) + \frac{1}{2}(12(x-2)^2 + 8\ln^2 2(y-3)^2 + 2(4+12\ln 2)(x-2)(y-3)) + O(((x-2)^2+(y-3)^2)^{3/2})$; 2) $\frac{y^2}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) - (y+1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4}(x-2)^2 + (y+1)^2 + (x-2)(y+1)) + O(((x-2)^2 + (y+1)^2)^{3/2})$; 3) $\frac{xy}{z} = 1 + (x-1) + (y-1) - (z-1) + \frac{1}{2}(2(z-1)^2 + 2(x-1)(y-1) - 2(x-1)(z-1) - 2(y-1)(z-1)) + O(((x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2)^{3/2})$.

5. $x^2\cos y = 1 + 2(x-1) + \frac{1}{2}(2(x-1)^2 - y^2) - \frac{1}{3}(x-1)y^2 + O(((x-1)^2 + y^2)^2)$.

6. 1) $(0;3)$ — min; 2) $(0;0)$ — седло, $(5;5)$ — min; 3) $(0;0)$ — седло, $(2;1)$ — min; 4) $(0;0)$ — седло, $(-4;-2)$ — max; 5) $(0;0;1)$ — min; 6) $(0;0;0)$ — седло.

7. $(0;0)$ — min, $x^2+y^2=1$ — max.

8. 1) $(1,-1)$ — min; 2) $(0;1)$ — min; 3) $(1;1)$ — max, $(-1;-1)$ — min; 4) $(1;0)$ — max, $(-1;0)$ — min; 5) $(1;1;1)$ — max, $(-1;-1;-1)$ — min; 6) $(1;0;1)$ — max, $(-1;0;-1)$ — min; 7) $(-1;1;0)$ — min; 8) $(0;-1;0)$ — max.

9. 1) $\frac{\sin(x+\ln x)}{x} + \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\cos(t+\ln x)}{t}dt$; 2) $\frac{\cos x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos(1/x)}{x^2} - \int_{1/x}^{\sqrt{x}} t^2\sin(xt^2)dt$; 3) $2xe^{(x^2+\sin x)^2} - e^{(x+\sin x)^2} + 2\cos x\int_x^{x^2}(t+\sin x)e^{(t+\sin x)^2}dt$; 4) $-\frac{1}{x+\ln\cos x}\sin x - \frac{1}{x+\ln\sin x}\cos x - \int_{\sin x}^{\cos x}\frac{1}{(x+\ln t)^2}dt$.

Список литературы

[1] В. Л. Олейник, Н. В. Смирнов, М. Д. Фаддеев, Методические указания к решению задач по математическому анализу. I курс, Л.: ЛГУ, 1987.

[2] В. Ф. Лазуткин, Е. Е. Лемехов, Н. В. Смирнов, Д. П. Коузов, Методические указания к практическим занятиям по курсу «Высшая математика». Анализ. I семестр, Л.: ЛГУ, 1980.

[3] В. Ф. Лазуткин, Е. Е. Лемехов, Н. В. Смирнов, Д. П. Коузов, Методические указания к практическим занятиям по курсу «Высшая математика». Анализ. II семестр, Л.: ЛГУ, 1981.

[4] А. С. Благовещенский, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов, Математический анализ. Задачи для самостоятельной работы студентов I курса, СПб.: «Соло», 2007.

[5] Б. П. Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М.: Изд.-во «Астрель», 2003. – 558 с.

[6] Л. А. Кузнецов, Сборник заданий по высшей математике, «Лань», 2008. – 240 с.

[7] Г. Н. Берман, Сборник задач по курсу математического анализа, «Транспортная компания», 2015. – 432 с.