САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

Н. Г. Гельфрейх, $\boxed{\text{А. Н. Попов}}$, В. А. Слоущ, Н. М. Шаркова

УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ДЛЯ СТУДЕНТОВ БАЗОВОГО ПОТОКА ПЕРВОГО КУРСА. I СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2016 г.

- Рецензенты: проф., д.ф.-м.н. Т. А. Суслина;
  проф., д.ф.-м.н. С. Л. Яковлев.
- Печатается по решению учебно-методической комиссии физического факультета СПбГУ.
- Рекомендовано Ученым советом физического факультета СПбГУ.

Н. Г. Гельфрейх, А. Н. Попов, В. А. Слоущ, Н. М. Шаркова. УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ДЛЯ СТУДЕНТОВ БАЗОВОГО ПОТОКА ПЕРВОГО КУРСА. I СЕМЕСТР. — СПб.: СПбГУ, 2016. – 15 с.

Настоящее пособие содержит упражнения и задачи, предлагаемые студентам базового потока первого курса физического факультета СПбГУ на практических занятиях по дисциплине «Математический анализ» в первом семестре. Пособие может быть полезно преподавателям, ведущим практические занятия по курсу «Математический анализ» в группах базового потока, а также студентам, изучающим этот предмет.

Введение

Настоящее пособие содержит упражнения и задачи, предлагаемые студентам базового потока первого курса физического факультета СПбГУ на практических занятиях по дисциплине «Математический анализ» в первом семестре. Пособие может быть полезно преподавателям, ведущим практические занятия по курсу «Математический анализ» в группах базового потока, а также студентам, изучающим этот предмет.

Предлагаемые задания разбиты на 10 тем: предел последовательности; предел функции; непрерывность функции; производная и дифференциал, геометрический смысл производной; производные старших порядков, производная параметрически заданной функции, правило Лопиталя; решение задач с помощью производных; построение графиков; символы O-большое и o-малое; формула Тейлора; неопределенный интеграл, простейшие методы интегрирования. Предложенные темы не могут служить жесткими планами занятий. Темы 1, 4, 5, 7, 9, 10 рассчитаны приблизительно на два занятия; тема 2 — на два-три занятия; темы 3, 6, 8 — на одно занятие.

Пособие не содержит изложения основных понятий и формул, необходимых при решении задач (эти сведения содержатся, например, в [?]–[?]).

Пособие предназначено для студентов со слабой математической подготовкой. Большинство предлагаемых заданий весьма просты. Более сложные задачи помечены звездочкой. Задачи из темы №6 могут быть предложены более сильным студентам. Большинство упражнений и задач взяты авторами из [?]–[?] и используются в тексте без дополнительных ссылок. Менее элементарные упражнения и задачи также можно найти в [?]–[?].

Обозначения

- $\lim x_n$ — предел последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$;
- $f'(x)$ — производная функции $f(x)$;
- $f^{(n)}(x)$ — производная порядка n функции $f(x)$;
- y'_x, y''_{xx}, y'''_{xxx} — производные первого, второго и третьего порядков от функции y по переменной x;
- df — дифференциал функции f;
- $d^n f$ — дифференциал порядка n функции f.

Тема №1. Предел последовательности

Упражнения.

1. Сформулировать определения:

$$1)\lim x_n = a; \quad 3)\lim x_n = +\infty;$$
$$2)\lim x_n = \infty; \quad 4)\lim x_n = -\infty.$$

2. Доказать по определению:

1) $\lim \frac{1}{n} = 0;$	5) $\lim \sqrt{n} = +\infty;$	9) $\lim \frac{2-n^2}{1+n^2} = -1;$
2) $\lim \frac{1}{n^2} = 0;$	6) $\lim n^p = +\infty,$ если $p > 0;$	10) $\lim \frac{n}{n+1} = 1;$
3) $\lim \frac{1}{n^p} = 0,$ если $p > 0;$	7) $\lim \cos(\pi n)\, n^{3/2} = \infty;$	11) $\lim \frac{3n-1}{n+1} = 3;$
4) $\lim \frac{1}{n!} = 0;$	8) $\lim \sqrt[3]{1-n^2} = -\infty;$	12) $\lim \frac{1+\sin n}{n} = 0;$

3. Доказать по определению:

$$1)\lim q^n = 0,\ \text{если } |q| < 1; \quad 2)\lim q^n = \infty,\ \text{если } |q| > 1.$$

4. * Доказать:

$$1)\lim \sqrt[n]{a} = 1,\ \text{если } a > 0; \quad 3)\lim \frac{a^n}{n!} = 0,\ \text{если } a \in \mathbb{R};$$
$$2)\lim \sqrt[n]{n} = 1; \quad 4)\lim \frac{n}{2^n} = 0.$$

5. * Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$1)x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right); \qquad 2)x_1 = \sqrt{2},\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}.$$

6. * Используя результаты упражнения **??**, теорему о сжатой последовательности, а также теорему о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими, показать:

$$1)\ \text{если } |x_n| \le a < 1,\ \text{то } \lim x_n^n = 0; \quad 2)\ \text{если } |x_n| \ge a > 1,\ \text{то } \lim x_n^n = \infty.$$

7. Используя результаты упражнений **??**, **??**, **??**, теорему о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими и теоремы об арифметических операциях, вычислить пределы:

1) $\lim(5 + \sqrt[n]{3});$	5) $\lim n(-2)^n;$	9) $\lim \left(\frac{1}{2n}\right)^n;$
2) $\lim 2 \cdot 0{,}2^n;$	6) $\lim(n + 2^n);$	10) $\lim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^n;$
3) $\lim \frac{\sqrt[n]{3}}{5+0{,}2^n};$	7) $\lim((-2)^n n + (-1)^n n^2)$	11) $\lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n;$
4) $\lim \frac{\sin n}{n};$	8) $\lim \frac{3}{n^2+\cos n};$	12) $\lim \left(3 - \frac{1}{n}\right)^n.$

8. Вычислить предел, используя свойства бесконечно больших последовательностей:

$$1)\lim(\sqrt{n} - n); \quad 3)\lim((n+1)! - n!); \quad 5)\lim(3^n + (-2)^n);$$
$$2)\lim(n^3 - 3n); \quad 4)\lim(3^n - 2^n); \quad 6)\lim((-3)^n - 2^n).$$

9. Вычислить предел:

$$\begin{array}{lll}
1)\lim \frac{n}{n^2+1}; & 7)\lim \frac{4+2n}{1+3n}; & 13)\lim \frac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n};\\
2)\lim \frac{2-n^2}{1+n^2}; & 8)\lim \frac{3n+1}{n-1}; & 14)\lim \frac{3\cdot 2^n+(-1)^n}{2^{n+2}+4};\\
3)\lim \frac{n}{n+1}; & 9)\lim \frac{2-n-n^2}{1+n^2}; & 15)\lim \frac{5\cdot 3^n+4^{n+1}}{2^{2n-1}+(-2)^n};\\
4)\lim \frac{2n+3}{n+5}; & 10)\lim \frac{3n+\sqrt{n}}{n+1}; & 16)\lim \frac{3^{n+1}+5^n}{2^n+4^{n-2}};\\
5)\lim \frac{n^2+n}{n^2+1}; & 11)\lim \frac{n^2-n}{n+\sqrt{n}}; & 17)\lim \frac{(2n-3)!n^2}{(2n-2)!+(2n-1)!};\\
6)\lim \frac{3n-1}{n+1}; & 12)\lim \frac{\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}}; & 18)\lim \frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!(n-1)}.
\end{array}$$

10. Вычислить предел:

$$\begin{array}{ll}
1)\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}); & 3)\lim \sqrt{n}(\sqrt{2n+4}-\sqrt{2n-3});\\
2)\lim(\sqrt{n(n+5)}-n); & 4)\lim(\sqrt{(n+2)(n+3)}-n).
\end{array}$$

11. * Показать, что последовательность не имеет предела:

$$\begin{array}{lll}
1)x_n=(-1)^n; & 4)x_n=\cos\frac{\pi n}{3}; & 7)x_n=\frac{2^{n+1}+2^{2n}}{(-4)^n+3^n};\\
2)x_n=n^{(-1)^n}; & 5)x_n=2^{(-1)^n n}; & 8)x_n=\frac{3\cdot 2^n+5^{n+2}}{(-5)^n+(-4)^n};\\
3)x_n=\sin\frac{\pi n}{2}; & 6)x_n=n+(-1)^n n; & 9)x_n=\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^n.
\end{array}$$

12. Используя результаты упражнения **??**, вычислить предел:

$$1)\lim\left(\frac{1-3n}{1+4n}\right)^n; \quad 2)\lim\left(\frac{2n+1}{n-2}\right)^n.$$

13. Вычислить предел, используя равенство $\lim\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$:

$$\begin{array}{lll}
1)\lim\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n; & 3)\lim\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^n; & 5)\lim\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n^2};\\
2)\lim\left(\frac{n}{n-2}\right)^{3n}; & 4)\lim\left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{n^2}; & 6)\lim\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n}.
\end{array}$$

14. * Используя критерий Коши, доказать, что последовательность $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$ имеет конечный предел.

15. * Используя критерий Коши, доказать, что последовательность $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$ не имеет конечного предела.

Тема №2. Предел функции

Упражнения.

1. Сформулировать определение на языке «ε–δ» и на языке последовательностей:

$$\begin{array}{lll}
1)\lim_{x\to x_0} f(x)=a; & 9)\lim_{x\to x_0-0} f(x)=a; & 17)\lim_{x\to -\infty} f(x)=a;\\
2)\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty; & 10)\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty; & 18)\lim_{x\to -\infty} f(x)=\infty;\\
3)\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty; & 11)\lim_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty; & 19)\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty;\\
4)\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty; & 12)\lim_{x\to x_0-0} f(x)=-\infty; & 20)\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty;\\
5)\lim_{x\to x_0+0} f(x)=a; & 13)\lim_{x\to +\infty} f(x)=a; & 21)\lim_{x\to \infty} f(x)=a;\\
6)\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty; & 14)\lim_{x\to +\infty} f(x)=\infty; & 22)\lim_{x\to \infty} f(x)=\infty;\\
7)\lim_{x\to x_0+0} f(x)=+\infty; & 15)\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; & 23)\lim_{x\to \infty} f(x)=+\infty;\\
8)\lim_{x\to x_0+0} f(x)=-\infty; & 16)\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty; & 24)\lim_{x\to \infty} f(x)=-\infty.
\end{array}$$

2. Вычислить пределы:

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$;
2) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{x-x^2}$;
3) $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$;
4) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin x}{3x-\cos 2x}$;
5) $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$;
6) $\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{4x^2+7}+2x)$;
7) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^x$;
8) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^x$.

3. Вычислить пределы:

1) $\lim_{x\to-1} \frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$;
2) $\lim_{x\to1} \left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{5}{x^5-1}\right)$;
3) $\lim_{x\to-1} \frac{x^3-5x^2-4x+2}{x^2+2x+1}$;
4) $\lim_{x\to0} \frac{x^4}{x-5x^3}$;
5) $\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$;
6) $\lim_{x\to1} \frac{x^3-5x+4}{x^3-1}$;
7) $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-1)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x-4)^{50}}$;
8) $\lim_{x\to1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

4. Вычислить пределы:

1) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x}$;
2) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$;
3) $\lim_{x\to0} \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x}}$;
4) $\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{3-x}-2}$;
5) $\lim_{x\to7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;
6) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;
7) $\lim_{x\to1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;
8) $\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;
9) $\lim_{x\to-8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;
10) $\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;
11) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x}}$;
12) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{4-x}-2}$.

5. Выписать «замечательные» пределы:

1) $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}$;
2) $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}$;
3) $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x}$;
4) $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}$;
5) $\lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x}$, $a>0$;
6) $\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^\mu-1}{x}$, $\mu\in\mathbb{R}$.

6. Используя результаты упражнения **??**, вычислить пределы:

1) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;
2) $\lim_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x}$;
3) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$;
4) $\lim_{x\to0} x\operatorname{ctg} x$;
5) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}$;
6) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$;
7) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}$;
8) $\lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{x}$;
9) $\lim_{x\to0} \frac{e^{-x}-1}{x}$;
10) $\lim_{x\to1/2} \frac{\ln(2x)}{2x-1}$;
11) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[7]{x}-1}{x-1}$;
12) $\lim_{x\to32} \frac{\sqrt[5]{x}-2}{x-32}$;
13) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;
14) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{e^{2x^2}-1}$;
15) $\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{x+x^2}$;
16) $\lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$;
17) $\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[4]{x+3}-1}{\operatorname{tg}(3x+6)}$;
18) $\lim_{x\to0} \frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$;
19) $\lim_{x\to1} \frac{\sin\pi x^2}{\sin\pi x^3}$;
20) $\lim_{x\to-1} \frac{\ln(5x+6)}{\operatorname{tg}(4x+4)}$;
21) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x}$;
22) $\lim_{x\to0} \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^{1/x}$;
23) $\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x+1}\right)^{1/x}$;
24) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x-5}{3x+1}\right)^{2x}$;
25) $\lim_{x\to4} \frac{\arcsin(-2x+8)}{\ln(-3x+13)}$;
26) $\lim_{x\to4} \frac{\ln(3x-11)}{\sin(4-x)}$;
27) $\lim_{x\to0} \frac{(e^{\sqrt{2x}}-1)(1-\cos 2x)}{\sqrt{x}\sin x^2}$;
28) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x+2\sin x-\sin^3 x+3x^4}{\operatorname{tg}^3 x-6\sin^2 x+x-5x^3}$;
29) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[7]{x^7+2x^6}-\sqrt[7]{x^7-x^6})$;
30) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[5]{x^{10}+3x^8}-\sqrt[5]{x^{10}-x^8})$.

Тема №3. Непрерывность функции

Упражнения.

1. Найти пределы

1) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x$;
2) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$;
3) $\lim_{x\to+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;
4) $\lim_{x\to-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;
5) $\lim_{x\to+\infty} 2^x$;
6) $\lim_{x\to-\infty} 2^x$;
7) $\lim_{x\to+0} 2^{1/x}$;
8) $\lim_{x\to-0} 2^{1/x}$;
9) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x$;
10) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x$;
11) $\lim_{x\to+0} \operatorname{cth} x$;
12) $\lim_{x\to-0} \operatorname{cth} x$.

2. Исследовать функцию на непрерывность. Найти односторонние пределы в точках разрыва и определить типы разрывов.

1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$; 8) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$; 15) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;
2) $f(x) = \frac{|x+2|}{x^2-4}$; 9) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$; 16) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$;
3) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x^2-x|}$; 10) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{1}{x}$; 17) $f(x) = e^{-\operatorname{ctg} x^2}$;
4) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2-x}$; 11) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; 18) $f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$;
5) $f(x) = \frac{x}{\sin \pi x}$; 12) $f(x) = |\cos x| \operatorname{tg} x$; 19) $f(x) = \frac{1}{1-e^{\operatorname{tg} x}}$;
6) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; 13) $f(x) = \operatorname{th}\frac{1}{x}$; 20) $f(x) = \frac{x^2}{1-\cos x}$;
7) $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$; 14) $f(x) = \frac{\ln|2x|}{2x-1}$; 21) $f(x) = \frac{x}{1-e^{\sin x}}$.

Тема №4. Производная и дифференциал. Геометрический смысл производной

Упражнения.

1. Вычислить производные функций:

1) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}$;
2) $f(x) = \frac{1}{3x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{8}{\sqrt[4]{x^3}}$;
3) $f(x) = 3^x + \log_2 x$;
4) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
5) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$;
6) $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$;
7) $f(x) = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$;
8) $f(x) = \operatorname{th} x + \operatorname{cth} x$;
9) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;
10) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}$;
11) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4\arccos(2x^2)}$;
12) $f(x) = \log_x 2$;
13) $f(x) = 3x^2 \sin x$;
14) $f(x) = (x^2+1)\arcsin x$;
15) $f(x) = x^2 \ln x \cos x$;
16) $f(x) = \sqrt{x} e^x \operatorname{arctg} x$;
17) $f(x) = x\sqrt{1+2x}\sin x$;
18) $f(x) = \frac{\ln 3 \sin x + \cos x}{x + 3^x}$;
19) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;
20) $f(x) = x^x$;
21) $f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$;
22) $f(x) = (\ln x)^{\sin x}$;
23) $f(x) = \ln\sin x$;
24) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$;
25) $f(x) = \arcsin\frac{x}{2}$;
26) $f(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$;
27) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$.

2. * Исходя из определения производной, найти $f'(0)$. Является ли функция $f'(x)$ непрерывной в точке $x = 0$?

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \qquad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln\cos x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

3. Определить промежутки возрастания и убывания, а также точки экстремумов функции:

1) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$; 4) $f(x) = (2x+1)^2(2x-1)^2$; 7) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
2) $f(x) = 3x - x^3$; 5) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$; 8) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$;
3) $f(x) = 2 - 3x^2 - x^3$; 6) $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$; 9) $f(x) = xe^{-x^2}$.

4. Определить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = 3x - x^3,\quad x \in [-\tfrac{1}{2}; 3]; & 4) f(x) = x + \tfrac{1}{x},\quad x \in [\tfrac{1}{2}; 2]; \\ 2) f(x) = \sqrt[3]{x^2},\quad x \in [-1; 2]; & 5) f(x) = xe^{-x^2},\quad x \in [0; 10]; \\ 3) f(x) = \operatorname{ch} x,\quad x \in [-1; 2]; & 6) f(x) = \sqrt[3]{2x^2(x-3)},\quad x \in [-1; 6]. \end{array}$$

5. Найти дифференциал функции:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = x^2 - 3x; & 4) f(x) = \sin x; \\ 2) f(x) = x^3; & 5) f(x) = \ln x; \\ 3) f(x) = \sqrt{1+x^2}; & 6) f(x) = \operatorname{arctg} x. \end{array}$$

6. Найти дифференциал функции в заданной точке:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = x^2 - 3x,\ x_0 = 1; & 4) f(x) = \sin x,\ x_0 = \tfrac{\pi}{4}; \\ 2) f(x) = x^3,\ x_0 = 0; & 5) f(x) = \ln x,\ x_0 = 1; \\ 3) f(x) = \sqrt{1+x^2},\ x_0 = -1; & 6) f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1. \end{array}$$

7. Написать уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$, если

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = x^2 - 3x,\ x_0 = 1; & 6) f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1; \\ 2) f(x) = x^3,\ x_0 = 0; & 7) f(x) = \arcsin x,\ x_0 = 0; \\ 3) f(x) = \sin x,\ x_0 = \tfrac{\pi}{4}; & 8) f(x) = \tfrac{1}{1+x^2},\ x_0 = 1; \\ 4) f(x) = \sqrt{1+x^2},\ x_0 = -1; & 9) f(x) = \tfrac{4x-x^2}{2},\ x_0 = 2; \\ 5) f(x) = \ln x,\ x_0 = 1; & 10) f(x) = e^x,\ x_0 = 0. \end{array}$$

8. Найти угол между кривыми в точках их пересечения:

$$1)\, y = \sin x,\ y = \cos x; \qquad 2)\, y = x^2,\ y = \sqrt{x}.$$

9. * Найти угол между левой и правой касательными к кривой $y = |x^2 - 1|$ в точке $x = 1$.

10. * Найти угол между левой и правой касательными к кривой $y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$ в точке $x = 0$.

Тема №5. Производные старших порядков. Производная параметрически заданной функции. Правило Лопиталя

Упражнения.

1. Точка движется по прямой по закону $x(t) = t + \sin t$. Найти положение точки, её мгновенную скорость и ускорение в момент времени $t = \pi/2$.

2. Найти $f''(x)$ и дифференциал второго порядка функции:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = \operatorname{tg} x; & 3) f(x) = \arcsin x; & 5) f(x) = x\sqrt{1+x^2}; \\ 2) f(x) = x \ln x; & 4) f(x) = \tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}; & 6) f(x) = e^{-x^2}. \end{array}$$

3. Найти производную параметрически заданной функции:

$$\begin{array}{ll} 1) x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}},\ y=\sqrt{1-t^2}; & 4) x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t);\\ 2) x=\sin^2 t,\ y=\cos^2 t; & 5) x=e^{2t}\cos^2 t,\ y=e^{2t}\sin^2 t;\\ 3) x=a\cos t,\ y=b\sin t; & 6) x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{array}$$

4. Написать уравнение касательной к кривой, заданной параметрически, в точке $t=t_0$:

$$\begin{array}{ll} 1) x=1-\sqrt{t},\ y=\sqrt{2-t^2},\ t_0=1; & 3) x=t^2-t,\ y=\cos t,\ t_0=\pi;\\ 2) x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t_0=\frac{\pi}{4}; & 4) x=e^{2t}\cos^2 t,\ y=e^{2t}\sin^2 t,\ t_0=\frac{\pi}{4}. \end{array}$$

5. * Написать уравнение касательной к кривой, заданной параметрически: $x=\frac{2t+t^3}{1+t^3}$, $y=\frac{2t-t^3}{1+t^3}$, в точке $t=\infty$.

6. Найти y'_x, y''_{xx}, y'''_{xxx} для функции, заданной параметрически:

$$\begin{array}{ll} 1)\ x=2t-t^2, & y=3t-t^3;\\ 2)\ x=\cos t, & y=\sin t;\\ 3)\ x=e^t\cos t, & y=e^t\sin t. \end{array}$$

7. Найти $f^{(n)}(x)$, если $f(x)=\ln x$; $f(x)=x^\mu$, $\mu\in\mathbb{R}$; $f(x)=\sin x$; $f(x)=\cos x$; $f(x)=\operatorname{sh} x$; $f(x)=\operatorname{ch} x$; $f(x)=e^{ax}$, $a\in\mathbb{R}$.

8. Вычислить производные указанных порядков:

$$\begin{array}{lll} 1) (x^2\cos 2x)^{(10)}; & 4) (e^{x/2}\sin 2x)^{(4)}; & 7) (x\operatorname{ch} x)^{(20)};\\ 2) (x^2e^{-x})^{(12)}; & 5) \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(5)}; & 8) (x^2\operatorname{sh} 2x)^{(9)};\\ 3) (x\ln x)^{(15)}; & 6)\ \left(\frac{\ln x}{x^5}\right)'''; & 9) ((x^2-x)e^{2x})^{(5)}. \end{array}$$

9. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислить пределы:

$$\begin{array}{lll} 1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}; & 4)\ \lim_{x\to 2}(\cos\pi x)^{1/(\sin\pi x)^2}; & 7)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x};\\ 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}; & 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-x}{\sin x^2}; & 8)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{-3x}}{3\operatorname{arctg} x-x^3};\\ 3)\ \lim_{x\to 0}x\ln x; & 6)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}; & 9)\ \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}. \end{array}$$

Тема №6. Решение задач с помощью производных

Задачи.

1. На графике функции $y=\frac{6x-2}{x+8}$ взяты точки A и B такие, что касательные к графику в этих точках параллельны. Найти наименьшее возможное значение, которое может принимать расстояние между этими точками.

2. В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, имеющий наибольшую площадь.

3. В шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объёма.

4. В шар радиуса R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

5. Найти на гиперболе $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ точку, ближайшую к точке с координатами $(3;0)$.

6. Тело массой 3000 кг падает с высоты 2000 м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности 100 кг/с. Считая начальную скорость $v_0 = 0$ м/с, ускорение $g = 10$ м/c^2, и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.
7. Определить промежутки выпуклости для функции $f(x) = \ln x$ и проверить неравенство $f(x) < x - 1$.
8. Показать, что $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$; $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, $x > 0$.
9. Написать уравнение окружности, имеющей касание второго порядка с кривой $y = e^x$ в точке $(0; 1)$.
10. Определить порядок касания кривых $y = 1 - \cos x$ и $y = x^2$ в точке $(0; 0)$.

Тема №7. Построение графиков

1. Провести исследование и построить графики элементарных функций: x^a, a^x, $\ln x$, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$.
2. Провести полное исследование функции (найти область определения, область значений; исследовать на непрерывность, периодичность и четность; найти точки пересечения с осями; найти промежутки возрастания и убывания; найти промежутки выпуклости и вогнутости; найти асимптоты) и построить график функции:

$$\begin{array}{lll}
1) f(x) = 3x - x^3; & 5) f(x) = \sqrt[3]{x(x-3)^2}; & 9) f(x) = x + \operatorname{arctg} x; \\
2) f(x) = x \ln x; & 6) f(x) = \ln(\sin x + \cos x); & 10) f(x) = 2\sin 2x + \sin 4x; \\
3) f(x) = xe^x; & 7) f(x) = \ln \frac{x}{x+5}; & 11) f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}; \\
4) f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}; & 8) f(x) = \frac{x}{\ln x}; & 12) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}.
\end{array}$$

3. * Провести полное исследование и построить график функции, заданной параметрически:

$$\begin{array}{ll}
1) x = t^2 - 2t,\ y = t^2 + 2t; & 3) x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t); \\
2) x = t^3 - 3t,\ y = t^2; & 4) x = t^2 e^{-t},\ y = t^2 e^{-2t}.
\end{array}$$

Тема №8. Символы O-большое и o-малое

1. Доказать, что

$$\begin{array}{ll}
1) x^2 = o(x),\ x \to 0; & 4) x^p = o(e^x),\ x \to +\infty, p > 0; \\
2) \ln x = o(1/x),\ x \to +0; & 5) \ln x = o(x^p),\ x \to +\infty, p > 0; \\
3) 1 - \cos x = o(x),\ x \to 0; & 6) e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^p}\right),\ x \to +\infty, p > 0.
\end{array}$$

2. Если существует конечный предел $\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}$, то $f(x)=O(g(x))$ при $x\to A$. Используя это утверждение, доказать, что

$$
\begin{array}{ll}
1)\sin x - x = O(x^3),\ x\to 0; & 7) x\sin x = O(x^2),\ x\to 0;\\
2) x^2+x = O(x),\ x\to 0; & 8) x^2\operatorname{arctg} x = O(x^2),\ x\to\infty;\\
3) x^2+x = O(x^2),\ x\to\infty; & 9) x^2\operatorname{arctg} x = O(x^3),\ x\to 0;\\
4) x+\sin x = O(x),\ x\to\infty; & 10) \frac{x}{x^2+1} = O(x),\ x\to 0;\\
5)\sin x = O(x-\pi),\ x\to\pi; & 11) \frac{x}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to\infty;\\
6)\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to\infty; & 12)\operatorname{th} x = O(1),\ x\to\infty.
\end{array}
$$

3. Доказать:

$$
\begin{array}{ll}
1) x\sin x = O(x),\ x\to\infty; & 4) \frac{e^{\cos x}}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to\infty;\\
2) x\cos x^2 = O(x),\ x\to\infty; & 5)\sin^2 x\cos\frac{1}{x^2} = O(x^2),\ x\to 0;\\
3)\sin x\sin\frac{1}{x} = O(x),\ x\to 0; & 6)\ x e^{x+\cos\frac{1}{x}} = O(x),\ x\to 0.
\end{array}
$$

4. Доказать, что при $x\to x_0$ справедливы равенства:

$$
\begin{array}{ll}
1)\ f(x) = O(f(x)); & 7)\ O(f(x))\cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x));\\
2)\ f(x)\cdot O(g(x)) = O(f(x)g(x)); & 8)\ o(f(x))\cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x));\\
3)\ f(x)\cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x)); & 9)\ O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x));\\
4)\ O(Cf(x)) = O(f(x)); & 10)\ O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x));\\
5)\ o(Cf(x)) = o(f(x)); & 11)\ o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x)).\\
6)\ O(f(x))\cdot O(g(x)) = O(f(x)g(x)); &
\end{array}
$$

5. Доказать, что если $f(x)=O(g(x))$ и $g(x)=O(h(x))$, то $f(x)=O(h(x))$.
6. Доказать, что если $f(x)=O(g(x))$ и $g(x)=o(h(x))$, то $f(x)=o(h(x))$.
7. Доказать, что если $f(x)=o(g(x))$ и $g(x)=O(h(x))$, то $f(x)=o(h(x))$.
8. Доказать, что если $f(x)=o(g(x))$ и $g(x)=o(h(x))$, то $f(x)=o(h(x))$.

Тема №9. Формула Тейлора

Упражнения.

1. Выбрав подходящее значение x_0, приближенно вычислить функцию f в точке x с помощью формулы

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

$$
\begin{array}{ll}
1) f(x)=\sqrt[3]{x},\quad x=7{,}76; & 8) f(x)=\ln x,\quad x=1{,}02;\\
2) f(x)=\sqrt[3]{x^3+7x},\quad x=1{,}012; & 9) f(x)=\operatorname{arctg} x,\quad x=0{,}03;\\
3) f(x)=\left(x+\sqrt{5-x^2}\right)/2,\quad x=0{,}98; & 10) f(x)=\arcsin x,\quad x=0{,}08;\\
4) f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+5},\quad x=0{,}97; & 11) f(x)=\cos x,\quad x=0{,}05;\\
5) f(x)=\sqrt{x^2+x+3},\quad x=1{,}97; & 12) f(x)=\sin x,\quad x=0{,}13;\\
6) f(x)=x^{11},\quad x=1{,}021; & 13) f(x)=x^{80}-x^{40}+x^{20},\quad x=1{,}005;\\
7) f(x)=\sqrt[3]{x^2},\quad x=1{,}03; & 14) f(x)=\sqrt{1+x+\sin x},\quad x=0{,}01.
\end{array}
$$

2. Выбрав подходящее значение x_0, приближенно вычислить функцию f в точке x с помощью формулы

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

1)$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8{,}1;$	8)$f(x) = \operatorname{ch} x, \quad x = 0{,}2;$
2)$f(x) = \ln x, \quad x = 1{,}2;$	9)$f(x) = \operatorname{sh} x, \quad x = 0{,}1;$
3)$f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 4{,}1;$	10)$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x = -0{,}1;$
4)$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7{,}8;$	11)$f(x) = \sin x, \quad x = 0{,}3;$
5)$f(x) = \arcsin x, \quad x = 0{,}2;$	12)$f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad x = 16{,}1;$
6)$f(x) = e^x, \quad x = 0{,}1;$	13)$f(x) = \sqrt[3]{1 + x}, \quad x = -0{,}2;$
7)$f(x) = \cos x, \quad x = -0{,}2;$	14)$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x = 0{,}9.$

3. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора до члена второго порядка:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3), \quad x \to x_0.$$

1)$f(x) = \ln^2 x, \quad x_0 = 1;$	6)$f(x) = \operatorname{ch} x, \quad x_0 = 1;$
2)$f(x) = \sqrt{1 + \ln x}, \quad x_0 = 1;$	7)$f(x) = \operatorname{sh} x, \quad x_0 = 0;$
3)$f(x) = \sqrt{1 + x}, \quad x_0 = 3;$	8)$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 0;$
4)$f(x) = \sin^2 x, \quad x_0 = 0;$	9)$f(x) = -(x + 1)e^{x+1}, \quad x_0 = -1;$
5)$f(x) = \arcsin x, \quad x_0 = 0;$	10)$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = 0.$

4. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора до члена третьего порядка:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \\ + O((x - x_0)^4), \quad x \to x_0.$$

1)$f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2, \quad x_0 = 1;$	3)$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 1;$
2)$f(x) = \arcsin x, \quad x_0 = 0;$	4)$f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad x_0 = 2.$

5. Найти первый ненулевой член в формуле Тейлора для указанной функции в заданной точке:

1)$f(x) = 4x + x^2 - 2e^{x+1}, \quad x_0 = -1;$
2)$f(x) = x^2 + 4x + \cos^2(x + 2), \quad x_0 = -2;$
3)$f(x) = x^2 + 2\ln(x + 2), \quad x_0 = -1;$
4)$f(x) = 2\ln x + x^2 - 4x + 3, \quad x_0 = 1;$
5)$f(x) = \sin x + \operatorname{sh} x - 2x, \quad x_0 = 0.$

6. Выпмсать стандартные разложения для функций $f(x) = \ln(1 + x)$; $f(x) = (1 + x)^\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$; $f(x) = \sin x$; $f(x) = \cos x$; $f(x) = \operatorname{sh} x$; $f(x) = \operatorname{ch} x$; $f(x) = e^x$.

7. Используя результаты упражнения **??**, разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + O((x - x_0)^{n+1}), \quad x \to x_0,$$

до члена указанного порядка:

1) $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}, \quad x_0 = 0, \quad n = 2;$
2) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x_0 = 0, \quad n = 2;$
3) $f(x) = \ln\frac{1+x^2}{1-x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 3;$
4) $f(x) = \sin^2 x, \quad x_0 = 0, \quad n = 8;$
5) $f(x) = \ln\frac{\sin x}{x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 6;$
6) $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3)}, \quad x_0 = 0, \quad n = 13;$
7) $f(x) = e^x - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x_0 = 0, \quad n = 3;$
8) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1-x}}, \quad x_0 = 0, \quad n = 3;$
9) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4;$
10) $f(x) = e^{2x-x^2}, \quad x_0 = 0, \quad n = 5;$
11) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = 0, \quad n = 5;$
12) $f(x) = \frac{x}{e^x-1}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4.$

8. Вычислить предел вида $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$, разлагая функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до члена порядка n:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4};$
2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3};$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{x^7};$
4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5};$
5) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3};$
6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\sqrt[4]{1+x}}{x^3}.$

9. * Вычислить предел:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{2x}+\sin x) - 3\arcsin x + 5x^2/2}{\sqrt[3]{8+x^3}-2};$
2) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{x-x^2} - x\sqrt[3]{1-3x/2})}{\operatorname{tg}^3 x};$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}\sin x + \ln(\cos x) - x}{\sqrt[3]{1-x^3}-1};$
4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x} + \ln(1-x) - 1}{\arcsin x - \sin x};$
5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\sqrt{1+2x} - x - \cos x}.$

10. * Убедиться в том, что при вычислении значений функции e^x при $0 < x < 1$ по приближенной формуле

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

допускаемая погрешность менее $0,01$. Пользуясь этим, найти $\sqrt{e}$ с тремя верными знаками.

11. Пользуясь формулой $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, найти $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$. Оценить погрешность.

12. Пользуясь формулой $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, найти $\ln 1{,}5$. Оценить погрешность.

13. * С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить:

1) $\sqrt[3]{30}$;
2) $\sqrt{e}$;
3) $\sin 18^\circ$;
4) $\ln 1{,}2$;
5) $\operatorname{arctg} 0{,}8$;
6) $\cos 9^\circ$.

Оценить погрешность.

14. * Выписать формулу Тейлора n-го порядка при $x_0 = -1$ для функции $f(x) = 1/x$.

15. * Выписать формулу Тейлора n-го порядка при $x_0 = 0$ для функции $f(x) = xe^x$.

16. * Выписать формулу Тейлора n-го порядка при $x_0 = 4$ для функции $f(x) = \sqrt{x}$.
17. * Выписать формулу Тейлора $2n$-го порядка при $x_0 = 0$ для функции $f(x) = \operatorname{ch} x$.
18. * Выписать формулу Тейлора n-го порядка при $x_0 = 1$ для функции $f(x) = x^3 \ln x$.
19. * Выписать формулу Тейлора $(2n+1)$-го порядка при $x_0 = 0$ для функции $f(x) = \operatorname{sh} x$.

Тема №10. Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования

Упражнения.

1. Вычислить интеграл, используя указанную замену переменной:

1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}, \quad t = x+1;$
2) $\int x(3-x)^{10}\,dx, \quad s = 3-x;$
3) $\int x\cos(x^2-2)\,dx, \quad u = x^2-2;$
4) $\int \frac{dx}{x^2+25}, \quad p = x/5;$
5) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx, \quad 1+\sqrt[4]{x} = z^3.$

2. Представить заданное выражение в виде дифференциала некоторой функции («внести под знак дифференциала»). Например, $x\,dx = \frac{1}{2}\,dx^2$ или $x\,dx = d\frac{1}{2}x^2$.

$$c\,dx, \quad x^2\,dx, \quad x^n\,dx, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \frac{1}{x}\,dx, \quad e^x\,dx, \quad a^x\,dx,$$

$$\sin x\,dx, \quad \cos x\,dx, \quad \operatorname{sh} x\,dx, \quad \operatorname{ch} x\,dx,$$

$$\frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \frac{1}{\sin^2 x}\,dx, \quad \frac{1}{\cos^2 x}\,dx.$$

3. Вычислить интеграл, внося подходящую функцию под знак дифференциала (используйте результаты предыдущего задания):

1) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx;$
2) $\int \operatorname{sh}(\ln x)\frac{dx}{x};$
3) $\int \sin x \sin(\cos x)\,dx;$
4) $\int xe^{x^2}\,dx;$
5) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx;$
6) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

4. Вычислить интегралы, используя метод интегрирования по частям:

1) $\int \ln x\,dx;$
2) $\int \arcsin x\,dx;$
3) $\int \operatorname{arctg} x\,dx;$
4) $\int xe^{-x}\,dx;$
5) $\int x^2 \sin 2x\,dx;$
6) $\int x^2 \ln x\,dx.$

5. Вычислить «возвратные» интегралы: $\int e^x \sin x\,dx$, $\int \cos(\ln x)\,dx$.

6. Вычислить интегралы:

1) $\int \operatorname{tg} x\,dx$;	6) $\int \sin^2 x\,dx$;	11) $\int x \operatorname{sh} x\,dx$;	16) $\int \operatorname{ch} 3x\,dx$;
2) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$;	7) $\int \sin^3 x\,dx$;	12) $\int \sqrt{1-2x}\,dx$;	17) $\int x^2(1+x)^9\,dx$;
3) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$;	8) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$;	13) $\int x \arcsin x\,dx$;	18) $\int \frac{dx}{x^2-2x+10}\,dx$;
4) $\int \frac{\cos \ln x}{x}\,dx$;	9) $\int \frac{dx}{(3-2x)^2}$;	14) $\int x \cos 3x\,dx$;	19) $\int \sin(x+1)\sin(3x-1)\,dx$;
5) $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$;	10) $\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$;	15) $\int \frac{x+\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$;	20) $\int \operatorname{cth}^3 x\,dx$.

Список литературы

[1] В. Л. Олейник, Н. В. Смирнов, М. Д. Фаддеев, Методические указания к решению задач по математическому анализу. I курс, Л.: ЛГУ, 1987.

[2] В. Ф. Лазуткин, Е. Е. Лемехов, Н. В. Смирнов, Д. П. Коузов, Методические указания к практическим занятиям по курсу «Высшая математика». Анализ. I семестр, Л.: ЛГУ, 1980.

[3] В. Ф. Лазуткин, Е. Е. Лемехов, Н. В. Смирнов, Д. П. Коузов, Методические указания к практическим занятиям по курсу «Высшая математика». Анализ. II семестр, Л.: ЛГУ, 1981.

[4] А. С. Благовещенский, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов, Математический анализ. Задачи для самостоятельной работы студентов I курса, СПб.: «Соло», 2007.

[5] Б. П. Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М.: Изд.-во «Астрель», 2003. – 558 с.

[6] Л. А. Кузнецов, Сборник заданий по высшей математике, «Лань», 2008. – 240 с.

[7] Г. Н. Берман, Сборник задач по курсу математического анализа, «Транспортная компания», 2015. – 432 с.