

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА РАДИОФИЗИКИ

Ю.Ф. Сафронова

Лабораторная работа:

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
АНАЛОГОВЫХ И ДИСКРЕТНЫХ  
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
СИГНАЛОВ**

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург  
2018

*Печатается по решению Ученого совета физического факультета  
Санкт-Петербургского государственного университета*

**Рецензенты:**

**Валерий Андреевич Павлов, д. ф.-м. н., профессор Кафедры  
радиофизики**

**Андрей Николаевич Ключарев, д. ф.-м. н., профессор Кафедры  
оптики**

**Юлия Федоровна Сафронова, старший преподаватель Кафедры  
радиофизики**

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АНАЛОГОВЫХ И  
ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
СИГНАЛОВ**

Учебно-методическое пособие: лабораторная работа по курсу «Практикум по методам планирования и проведения инженерного эксперимента». – СПб., 2018

Настоящее учебно-методическое пособие представляет собой описание и методические указания к лабораторной работе, выполняемой в курсе «Практикум по методам планирования и проведения инженерного эксперимента» образовательной программы СПбГУ «Инженерно-ориентированная физика». В теоретической части рассматривается разложение периодического сигнала в ряд Фурье, дискретное преобразование Фурье, влияние дискретизации на спектр сигнала. Приводятся примеры аналитического и численного расчета в программе MATLAB. Пособие содержит описание экспериментальной установки, методику измерений, задания по выполнению практической части, вопросы для самоконтроля.

Пособие предназначено для студентов 2 курса СПбГУ, обучающихся по образовательной программе «Инженерно-ориентированная физика». Также пособие может использоваться в рамках курса «Практикум по физическим основам методов обработки и передачи информации» образовательной программы «Прикладные физика и математика».

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>1</b>	<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>2</b>	<b>ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ</b> .....	5
2.1	Ряд Фурье .....	5
2.2	Спектр аналитического периодического сигнала .....	6
2.3	Дискретное преобразование Фурье .....	9
2.4	Сравнение спектров аналогового и дискретного сигналов, теорема Котельникова .....	10
2.5	Применение MATLAB для расчета спектра дискретного сигнала .....	14
2.6	Растекание спектра .....	17
2.7	Увеличение разрешения спектра .....	19
2.8	Вопросы для самоконтроля .....	21
<b>3</b>	<b>ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ</b> .....	22
3.1	Описание лабораторной установки .....	22
3.2	Задания .....	23
<b>4</b>	<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	24

# 1 ВВЕДЕНИЕ

Когда упоминаются сигналы, то прежде всего имеется в виду то, что сигнал должен нести в себе некоторую информацию. Электрический сигнал имеет электрическую природу и представляет собой изменяющийся со временем ток или напряжение в электрической цепи. Электрические сигналы широко распространены. Они возникают при измерениях различных физических величин, т.к. подавляющее большинство датчиков преобразуют измеряемую величину (давление, температуру, яркость и др.) в электрическое напряжение. С помощью электрических сигналов сообщения (текст, видео и т.п.) кодируются и передаются на расстояния. Поэтому, извлечение полезной информации является основной задачей обработки сигналов. Информация может содержаться в амплитуде сигнала, частоте, фазе, спектральном составе.

Различают аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Аналоговым называют сигнал, который описывается непрерывной или кусочно-непрерывной функцией с конечными разрывами 1-го рода. Аналоговый сигнал определен на всем заданном промежутке и может принимать любые значения на некотором интервале (рис. 1 а). Дискретный сигнал может быть результатом измерения аналогового сигнала. Он представляет собой набор отсчетов в заданные моменты времени (рис. 1 б). Временной интервал между отсчетами называется периодом дискретизации  $T_s$  и, как правило, является постоянным. Величина, обратная периоду дискретизации, называется частотой квантования и измеряется в Герцах:

$$f_s = \frac{1}{T_s}, \quad (1.1)$$

Часто используется циклическая частота (измеряется в рад/с), определяемая как:

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}, \quad (1.2)$$

Это важный параметр дискретного сигнала, выбор которого может существенно повлиять на его характеристики.

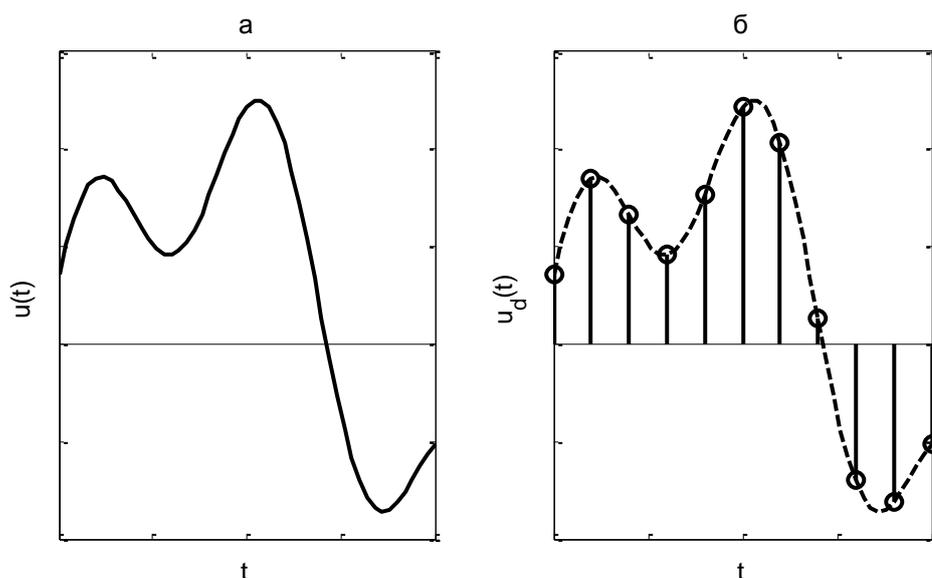


Рис. 1. Аналоговый  $u(t)$  (а) и дискретный  $u_d(t)$  (б) сигналы.

Если сигнал дискретен не только по времени, но и по уровню, то такой сигнал принято называть цифровым. Операция преобразования сигнала в цифровую форму производится с помощью аналого-цифрового преобразователя АЦП. Дискретизация сигнала по уровню связана с ограниченным числом двоичных разрядов АЦП. Например, при разрядности 14 бит на выходе АЦП будет  $2^{14} = 16384$  дискретных значений. При диапазоне измеряемых напряжений  $\pm 10$  В разрешение по напряжению будет  $20\text{В}/16384\text{дел.} = 1,22$  мВ/дел.

В современном мире область применения цифровых сигналов неизменно увеличивается. Переход от аналоговых методов обработки к цифровым позволяет улучшить качество передачи информации, реализовать недоступные ранее алгоритмы, например, сжатие сигнала и его последующее восстановление. Из всего многообразия методов цифровой обработки сигналов в настоящем пособии мы познакомимся с основами спектрального анализа. Ограничимся рассмотрением периодических и детерминированных сигналов (т.е. таких, значение которых можно точно предсказать в любой момент времени, в отличие от случайных сигналов). В первую очередь нас будут интересовать различия между спектрами аналоговых сигналов и их дискретными реализациями и искажения, которые может вносить в спектр процесс дискретизации. Причиной этих искажений могут быть неверно выбранная частота дискретизации или длительность записи сигнала. Искажения в дискретном спектре могут проявляться в виде дополнительных гармоник небольшой амплитуды – растекание спектра – или, что более существенно, потерей важных и появлением кажущихся гармоник при невыполнении теоремы Котельникова.

Теоретический материал в пособии приведен достаточно кратко и касается только рассматриваемых вопросов. Для более подробной информации рекомендуется обратиться к конспекту лекций по дисциплине «Методы планирования и проведения инженерного эксперимента» и дополнительной литературе, приведенной в конце пособия. В конце главы «Теоретические сведения» приводятся вопросы для самоконтроля, на которые рекомендуется ответить самостоятельно при подготовке к лабораторной работе.

## 2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

### 2.1 Ряд Фурье

Рассмотрим аналоговый сигнал в виде бесконечной периодической функции времени  $u(t)$  с периодом  $T$ . Эта функция может быть представлена в виде суммы тригонометрических функций, т.е. разложена в ряд Фурье, если она удовлетворяет следующим условиям:

- она непрерывна (или имеет конечное число точек разрыва первого рода на периоде) и она кусочно-монотонна на периоде.

Для реальных электрических сигналов эти условия всегда выполняются.

Ряд Фурье можно записать разными способами. Тригонометрическая форма ряда Фурье представляет собой разложение по базису синусов и косинусов кратной частоты:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k \sin(\omega_0 kt)], \quad (2.1.1)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$  – целое число (слагаемое  $a_0/2$  для  $k = 0$  вынесено из-под знака суммы),  $\omega_0 = 2\pi/T$  – основная частота (циклическая частота первой гармоники),

определяемая периодом исходной функции, коэффициенты разложения  $a_0$ ,  $a_k$  и  $b_k$  можно рассчитать, как:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(\omega_0 kt) dt, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(\omega_0 kt) dt, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Ряд (2.1.1) можно представить в виде (вещественная форма):

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_0 kt + \varphi_k), \quad (2.1.3)$$

где введены новые коэффициенты  $A_k$  и  $\varphi_k$ :  $a_k = A_k \cos \varphi_k$ ,  $a_0 = 2A_0 \cos \varphi_0$  и  $b_k = -A_k \sin \varphi_k$ .

Комплексная форма ряда Фурье чаще используется в физике и является разложением по базису комплексных экспонент:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega_0 kt}, \quad (2.1.4)$$

где  $k = -\infty \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \infty$ ,  $i$  – комплексная единица, коэффициенты разложения  $c_k$  комплексные и находятся как:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-i\omega_0 kt} dt \quad (2.1.5)$$

Коэффициенты вещественной, тригонометрической и комплексной формы связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2} \\ a_k &= c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \\ \frac{A_k}{2} &= |c_k|, \quad \varphi_k = \arg(c_k) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Видно, что  $c_k$  и  $c_{-k}$  – комплексно сопряженные. Набор коэффициентов (вещественных или комплексных) ряда Фурье называется спектром сигнала.

Разложение в ряд Фурье является однозначной операцией. Это означает, что вещественные коэффициенты  $A_k$  и  $\varphi_k$ , или комплексные коэффициенты  $c_k$  несут полную информацию о периодической функции с известным периодом  $T$ . Можно представлять сигнал, как мы привыкли, в виде функции времени, а можно, что для нас менее привычно, – в виде спектра. Оба эти представления являются равнозначными.

## 2.2 Спектр аналитического периодического сигнала

Удобнее всего ввести понятие спектра периодической функции на примере ряда (2.1.3), в этом случае интерпретация будет наиболее наглядной. Каждый член ряда представляет собой гармоническое колебание с амплитудой  $A_k$ , начальной фазой  $\varphi_k$  и частотой  $\omega_0 k$ . Будем называть набор коэффициентов  $A_k$  и  $\varphi_k$  вещественным спектром сигнала. Коэффициенты  $A_k$  несут в себе информацию о том, из каких по амплитуде гармонических сигналов (они также называются гармониками) с частотами  $\omega_0 k$  состоит исходный сигнал, поэтому набор  $A_k$  называется амплитудным спектром. Коэффициенты  $\varphi_k$  определяют фазы отдельных гармоник, их совокупность называется фазовым спектром.

В результате использования комплексной формы ряда (2.1.4) получают комплексный спектр сигнала – набор комплексных коэффициентов  $c_k$ . В отличие от вещественного спектра, комплексный спектр содержит как положительные, так и

отрицательные гармоники. Это может вызвать затруднения в интерпретации, т.к. часто об отрицательных коэффициентах комплексного ряда говорят, как о гармониках с отрицательными частотами. Вспомнив формулы Эйлера:

$$\sin(\omega_0 kt) = \frac{e^{i\omega_0 kt} - e^{-i\omega_0 kt}}{2i}, \quad \cos(\omega_0 kt) = \frac{e^{i\omega_0 kt} + e^{-i\omega_0 kt}}{2} \quad (2.2.1)$$

нетрудно показать, что каждую  $k$ -ю функцию синуса или косинуса в тригонометрическом ряде Фурье можно представить в виде суммы двух комплексных экспонент с номерами  $+k$  и  $-k$ , которые и являются положительной и отрицательной  $k$ -ми гармониками для комплексного спектра. Таким образом, одна гармоника вещественного спектра представлена двумя (с половинной амплитудой) в комплексном спектре. Можно считать, что отрицательная часть комплексного спектра дублирует положительную и не несет дополнительной полезной информации.

Как и для вещественного спектра, модули комплексных коэффициентов  $c_k$  определяют амплитуды гармоник и называются амплитудным спектром, а аргументы определяют начальные фазы гармоник – фазовый спектр. Исходя из того, что  $c_k$  и  $c_{-k}$  – комплексно сопряженные, следует свойство четности для амплитудного комплексного спектра и нечетности для фазового.

Спектр периодического сигнала принимает значения только для определенных частот  $\omega_0 k$ , поэтому, его называют дискретным или линейчатым. Расстояние между гармониками равно основной частоте  $\omega_0 = 2\pi/T$  и обратно пропорционально периоду сигнала  $T$ . Таким образом, если увеличить период сигнала, то гармоники в спектре станут располагаться ближе друг к другу.

#### Пример 1:

Рассмотрим последовательность прямоугольных импульсов амплитудой  $U_0$  и периодом  $T$ , длительность каждого импульса –  $\tau$ , скважность –  $T/\tau$  (рис. 2 а). Коэффициенты комплексного ряда Фурье (2.1.5) рассчитываются как:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^\tau U_0 e^{-i\omega_0 kt} dt = \frac{U_0}{-i\omega_0 kT} (e^{-i\omega_0 k\tau} - 1) = \\ &= \frac{U_0 \tau}{T} \left( \frac{e^{i\frac{\omega_0 k\tau}{2}} - e^{-i\frac{\omega_0 k\tau}{2}}}{\frac{\omega_0 k\tau}{2}} \right) e^{-i\frac{\omega_0 k\tau}{2}} = \frac{U_0 \tau}{T} \left( \frac{\sin\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right)}{\frac{\omega_0 k\tau}{2}} \right) e^{-i\frac{\omega_0 k\tau}{2}} = \\ &= \frac{U_0 \tau}{T} \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right)}{\frac{\pi k\tau}{T}} \right) e^{-i\frac{\pi k\tau}{T}} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Интегрирование по периоду заменяем интегрированием по длительности импульса  $\tau$ , т.к. остальную часть периода импульс равен нулю. Выражение (2.2.2) приведено к зависимости вида  $\sin(x)/x$ , где переменная  $x = \omega_0 k\tau/2$  пропорциональна частоте  $\omega_0 k$ . Амплитудный спектр с точностью до множителя будет выглядеть как функция  $|\sin(x)/x|$ . Вид этой функции хорошо известен (рис. 2 б пунктир): при  $x = 0$  она равна единице (замечательный предел), а ее нули определяются нулями  $\sin(x)$ . В единицах частоты  $\omega_0 k$  нули будут  $2\pi m/\tau$ , где  $m$  – целое число. Можно заметить, что ширина первого лепестка амплитудного спектра зависит от скважности  $2\pi m/\tau = \omega_0 mT/\tau$ . Например, для меандра скважность равна 2, нули будут  $2\omega_0 m$ , т.е. все четные гармоники будут нулевыми. Это поясняется на рис. 2: на рис. а показан вид сигнала  $u(t)$ , ниже, на рис. б-в, приведены амплитудный и фазовый спектры этого сигнала. Спектр дискретный, пунктиром показана его огибающая. Видно, что амплитудный спектр четный и каждая четная гармоника нулевая. Фазовый спектр нечетный, он

представляет собой кусочно-линейную функцию в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ . Показатель комплексной экспоненты в (2.2.2) определяет вид фазовой функции. Рассмотрим фазу  $-\omega_0 k t / 2$  на участке  $0 \leq k \leq 2$  эта функция линейно убывает от 0 до  $-\pi$ . При  $k = 2$  функция  $\sin(x)/x$  меняет знак, т.е. ее фаза меняется на  $\pi$ . Таким образом, в точке  $k = 2$  общая фаза выражения (2.2.2) скачком становится равной нулю, а с ростом  $k$  убывание возобновляется до следующего нуля функции  $\sin(x)/x$ .

Часто под спектром сигнала понимается только амплитудный спектр, т.к. если сместить сигнал по оси времени, то амплитудный спектр останется прежним, а фазовый спектр изменится.

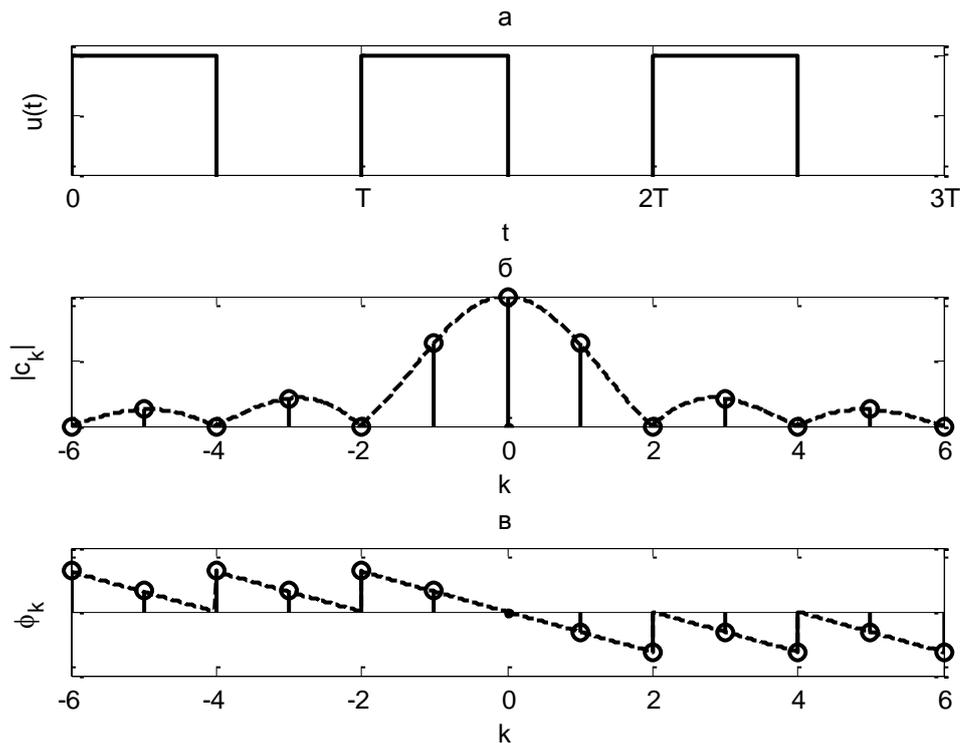


Рис. 2. График сигнала (меандр) (а), его амплитудный спектр (б) и фазовый спектр (в).

В таблице 1 перечислим основные особенности спектра аналитического периодического сигнала.

Таблица 1. Основные особенности спектра периодического сигнала:

<i>сигнал</i>	<i>спектр</i>
периодический	дискретный
аналоговый	не периодический
период сигнала $T$	период дискретизации спектра (расстояние между гармониками) $\omega_0 = 2\pi/T$

## 2.3 Дискретное преобразование Фурье

Рассмотрим дискретный сигнал  $u_n$  (рис. 3 а) длительностью  $T$  с периодом дискретизации  $T_s$ . Сигнал представляет собой  $N$  отсчетов через равные промежутки времени  $0, T_s, 2T_s, \dots, (N-1)T_s$ . Будем нумеровать эти отсчеты индексами  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Тогда длительность сигнала можно записать как  $T = NT_s$ , а моменты времени, в которые определен сигнал,  $t_n = nT_s$ .

Для дискретного сигнала можно определить операцию разложения в ряд по набору  $N$  дискретных комплексных экспонент. Эта операция называется обратное дискретное преобразование Фурье:

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \quad (2.3.1)$$

Индексами  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  нумеруются гармоники дискретного спектра  $U_k$ , (рис. 3 б) которые можно найти с помощью прямого дискретного преобразования Фурье:

$$U_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \quad (2.3.2)$$

Коэффициенты  $U_k$  комплексные. Размерность векторов  $u_n$  и  $U_k$  одинакова и равна  $N$ .

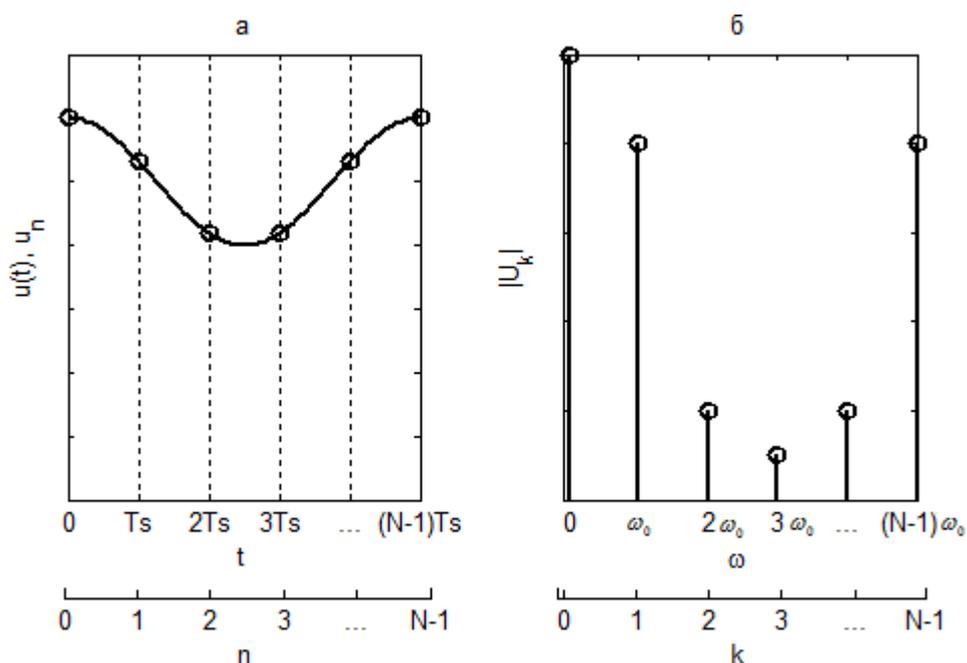


Рис. 3. Нумерация отсчетов дискретного сигнала (а) и гармоник амплитудного спектра этого сигнала (б).

Таким образом, дискретное преобразование Фурье – линейное преобразование, которое ставит в соответствие вектору временных отсчетов вектор отсчетов по частоте той же длины. В самом преобразовании нет никакой информации о частоте дискретизации сигнала и о частотах, которым соответствуют гармоники. Эту дополнительную информацию нужно восстанавливать самостоятельно, исходя из выбранной частоты дискретизации и знаний о спектре дискретного сигнала. Приведем здесь без доказательства теоретические сведения, а соотношение между спектрами дискретного и аналогового сигналов рассмотрим в следующем параграфе.

- Гармоника с номером  $k = 0$  соответствует нулевой частоте,
- для нечетного  $N$  гармоники от 1 до  $(N-1)/2$  соответствуют положительным частотам,
- гармоники от  $(N+1)/2$  до  $N-1$  в обратном порядке соответствуют отрицательным частотам,
- для четного  $N$  в спектре не будет последней положительной гармоники (т.е. для выражений из предыдущих пунктов нужно сделать округление в меньшую сторону),
- гармоники соответствуют дискретным частотам  $\omega_k = \omega_0 k$ , где  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/NT_s$ ,
- по частотам спектр лежит в пределах от 0 до частоты дискретизации  $\omega_s = 2\pi/T_s$ ,
- чтобы получить соответствие амплитуд гармоник дискретного преобразования и ряда Фурье, нужно комплексную амплитуду гармоники с номером  $k$  поделить на число отсчетов дискретного сигнала  $c_k = U_k/N$ .

На рис. 4 показана перестановка отсчетов спектра для нечетного  $N$ .

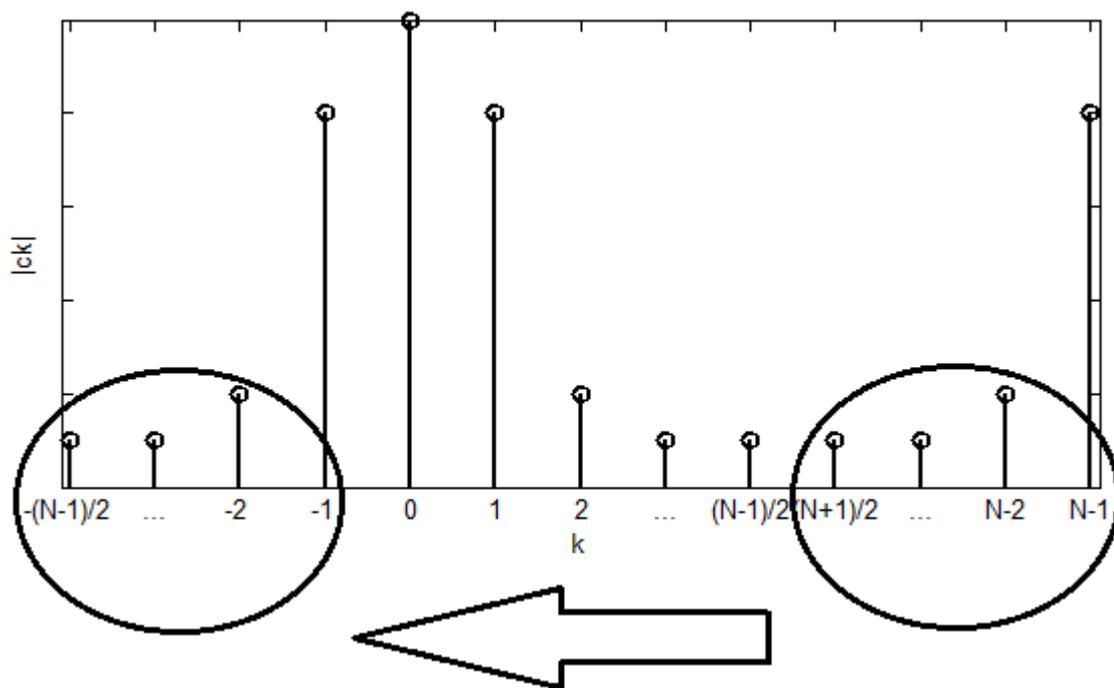


Рис. 4. Перестановка отсчетов спектра дискретного сигнала для сопоставления со спектром аналогового сигнала.

## 2.4 Сравнение спектров аналогового и дискретного сигналов, теорема Котельникова

Сопоставим спектр аналогового и соответствующего ему дискретного сигнала. Поскольку дискретный сигнал определен не во все моменты времени, то он не полностью соответствует аналоговому, следовательно, их спектры будут иметь как сходные признаки, так и отличия. Важный вопрос, на который отвечает теорема Котельникова, звучит так: при каких условиях можно по дискретному сигналу восстановить аналоговый.

Для того чтобы воспользоваться математическим инструментарием разложения в ряд Фурье для дискретных сигналов, нужно им сопоставить аналитические периодические функции. В курсе лекций было показано, что это можно сделать, продолжив дискретный сигнал конечной длительности  $T$  вперед и назад по временной оси до бесконечности и представив его как произведение аналогового сигнала на последовательность периодически повторяющихся (с периодом равным периоду дискретизации  $T_s$ ) дельта-функций. Такой сигнал называется дискретизированным: он равен нулю везде, кроме моментов времени, когда были взяты отсчеты дискретного сигнала. Заметим, что новый сигнал будет периодическим с периодом  $T$ , равным длительности исходного дискретного сигнала. Вспомним, что спектр периодического сигнала дискретный:

*периодический сигнал (период  $T$ )  $\Rightarrow$  дискретный спектр (расстояние между гармониками равно  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/NT_s$ ).*

Преобразование Фурье обладает свойством частотно-временной дуальности (двойственности). Из сравнения выражений (2.3.1) и (2.3.2) можно заключить, что с точностью до константы и знака экспоненты они совпадают, только частотные зависимости заменяются временными. Из этого следует, что для всех свойств преобразования Фурье частотные и временные зависимости можно менять местами:

*дискретный сигнал (расстояние между отсчетами  $T_s$ )  $\Rightarrow$  периодический спектр (период  $\omega_s = 2\pi/T_s$ )*

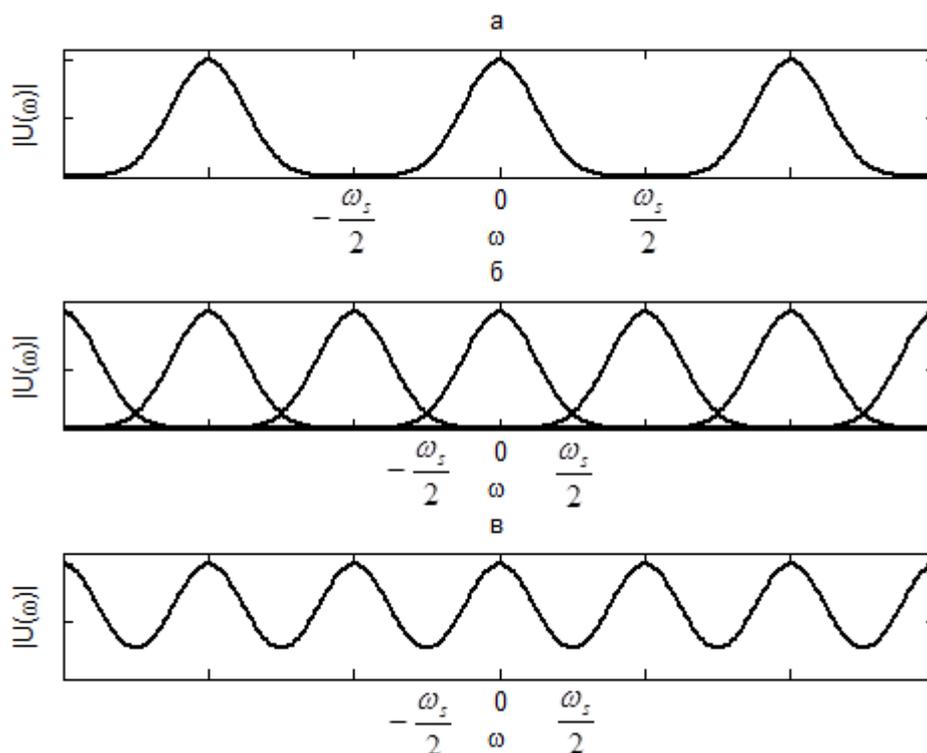


Рис. 5. Спектр дискретного сигнала для разной частоты дискретизации: (а) выполняется теорема Котельникова, (б-в) не выполняется теорема Котельникова.

Новый сигнал будет дискретным и периодическим, следовательно, его спектр также будет дискретным и периодическим. Можно рассчитать число гармоник, помещающихся в периоде спектра  $\frac{2\pi/T_s}{2\pi/NT_s} = N$ . То есть в периоде спектра, так же как в периоде сигнала, будет содержаться  $N$  отсчетов.

Известно, что спектр дискретного сигнала периодический и представляет собой бесконечную последовательность копий спектра исходного аналогового сигнала, сдвинутых друг относительно друга на частоту дискретизации  $\omega_s$ . Рис. 5 демонстрирует как изменяется спектр дискретного гауссова импульса для разной частоты дискретизации. На рис. 5 а частота  $\omega_s$  выбрана достаточно большой, чтобы смещенные спектры аналогового сигнала не перекрывались. Из этого спектра можно выделить часть  $-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$ , которая будет полностью совпадать с соответствующей частью спектра аналогового сигнала. На рис. 5 б  $\omega_s$  меньше, и мы видим, что смещенные спектры аналогового сигнала перекрываются. При суммировании (комплексных величин) перекрывающиеся участки (рис. 5 в) будут отличаться от соответствующих участков исходного спектра, и здесь уже нельзя выделить диапазон частот на котором спектр дискретного сигнала будет соответствовать спектру исходного аналогового сигнала.

Таким образом, точное восстановление аналогового сигнала из его дискретных отсчетов возможно, если сдвинутые копии спектра не перекрываются. Это утверждает теорема Котельникова:

*чтобы аналоговый сигнал можно было восстановить по его дискретным отсчетам, необходимо, чтобы частота дискретизации была выбрана больше удвоенной максимальной частоты в спектре сигнала  $\omega_s > 2\omega_{max}$ .*

Таблица 2. Основные особенности спектра дискретного периодического сигнала:

сигнал	спектр
периодический	дискретный
дискретный	периодический
период сигнала $T = NT_s$	период дискретизации спектра $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/NT_s$
период дискретизации сигнала $T_s$	период спектра $\omega_s = 2\pi/T_s$

Для спектра дискретного сигнала сохраняется свойство симметрии  $U_k = U_{-k}$ , где звездочка обозначает комплексное сопряжение, т.е. амплитудный спектр четный и фазовый – нечетный. Учитывая это можно заключить, что спектр полностью определяется значениями на промежутке  $0 < \omega < \omega_s/2$ .

Очевидно, что для выполнения условия теоремы Котельникова сигнал должен иметь максимальную частоту, т.е. обладать конечным спектром, что на практике не встречается. Если сигнал обладает бесконечным спектром, то нужно решить какую частоту дискретизации выбрать, чтобы минимально его исказить. Для сигналов с бесконечным спектром ошибки будут всегда и они будут сказываться на всем

спектре: кроме того что при дискретизации мы не учитываем в спектре частоты большие  $\omega_s / 2$ , эти высокие частоты в сигнале, как мы видели, накладываясь на основную часть спектра  $0 < \omega < \omega_s/2$ , будут вносить в нее дополнительные искажения. Поэтому, перед дискретизацией сигнала, рекомендуют ограничить его спектр, пропустив сигнал через фильтр низких частот с граничной частотой  $\omega_{max}$ . Фильтрация, в свою очередь, также вносит искажения в спектр сигнала. Но для практических приложений и конкретных сигналов, в зависимости от решаемых задач, всегда можно выбрать фильтр или частоту дискретизации, удовлетворяющие заданной точности.

### Пример 2:

Рассмотрим влияние частоты дискретизации на спектр меандра из примера 1. Амплитудный спектр аналогового сигнала известен (рис. 2 б), он состоит из бесконечного числа убывающих по амплитуде гармоник. Спектр не ограничен, выберем частоту  $\omega_{max}$  и посмотрим, как это отразится на спектре дискретного сигнала. Сравним два случая:

- 1)  $\omega_{max1} = 2\omega_0$  – первый ноль спектра меандра,
- 2)  $\omega_{max2} = 4\omega_0$  – второй ноль спектра меандра.

Тогда по теореме Котельникова минимальная частота дискретизации должна быть равна  $\omega_s = 2\omega_{max}$ , период дискретизации  $T_s = 2\pi/\omega_s = \pi/\omega_{max}$ .

На рис. 6 а пунктиром изображен один период последовательности прямоугольных импульсов. Звездочками отмечены 4 отсчета на период для случая 1, кружочками – 8 отсчетов для случая 2 (некоторые отсчеты совпадают). Обратим внимание, что в точках разрыва сигнал равен среднему значению пределов справа и слева (значения, к которым сходится ряд Фурье в точках разрыва первого рода). Отсчет при  $t = T$  считается первым для следующего периода и не учитывается.

Дискретное преобразование Фурье по 4 отсчетам даст 4 гармоники спектра, по 8 отсчетам – 8 гармоник. На рис. 6 б-в отложены гармоники дискретного сигнала в зависимости от частоты  $k\omega_0$ , где  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Пунктиром показана огибающая спектра аналогового сигнала. Расстояние между гармониками для двух случаев одинаковое и равно расстоянию между гармониками для аналогового сигнала (т.к. период не изменяется), а область частот, которую занимает дискретный спектр, с увеличением частоты дискретизации увеличивается. Вспомним, что спектр дискретного сигнала периодический и только период  $-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$  соответствует спектру аналогового сигнала. Если скопировать изображенные гармоники вправо и влево по оси частот до бесконечности, то получится периодическая дискретная функция. Применяя перестановку гармоник, показанную на рис. 4 можно увидеть, что для 1-го случая 4 гармоники соответствуют по порядку: 0-й, 1-й, 2-й и -1-й гармоникам аналогового сигнала, для 2-го случая 8 гармоник соответствуют: 0-й, 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и -1-й, -2-й, -3-й гармоникам аналогового сигнала. Т.е. для рис. 6 б будем сравнивать соответствие амплитуд гармоник с пунктирной линией до первого нуля по частотам, для рис. 6 в – до второго нуля. Видно, что небольшие различия есть в обоих случаях: для 1-го случая – первая гармоника чуть меньше по амплитуде, чем пунктирная линия, для второго случая точность больше, различие во втором лепестке спектра для 3-й гармоники. Это различие объясняется наложением сдвинутых на частоту дискретизации копий спектров.

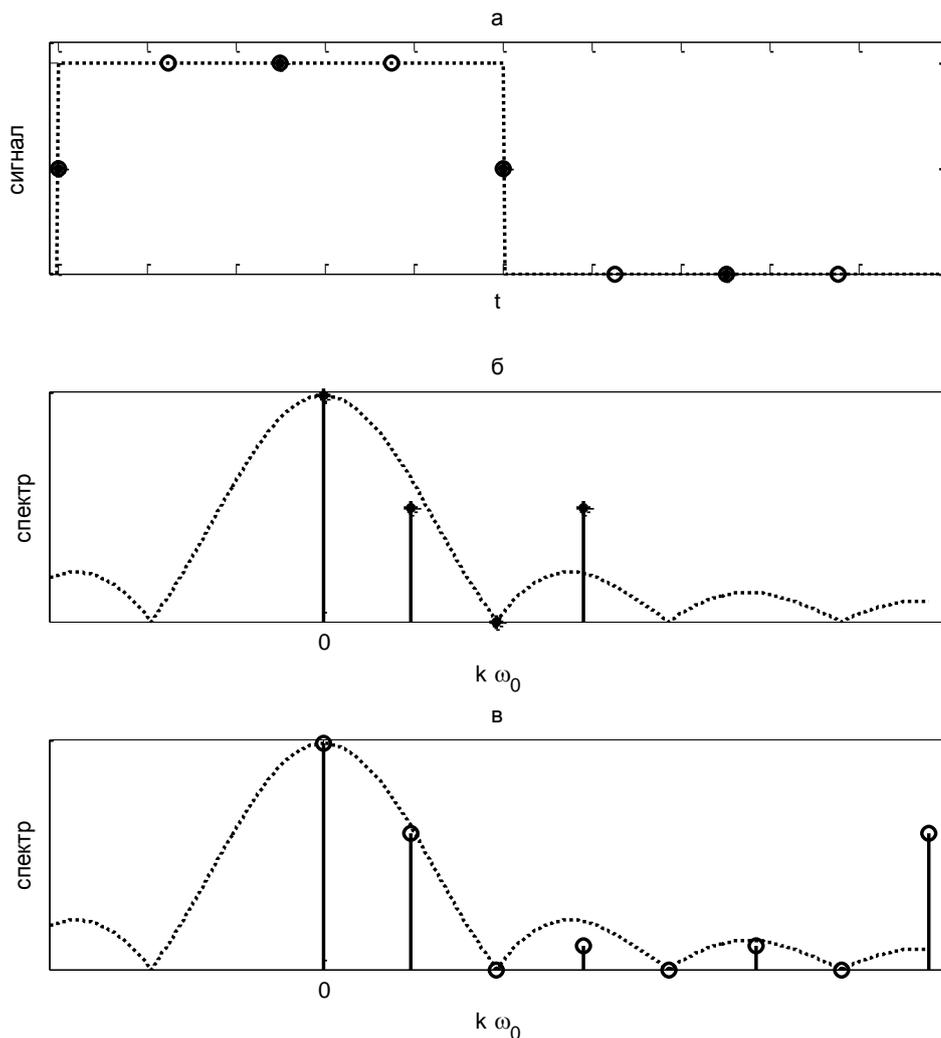


Рис. 6. Влияние частоты дискретизации на спектр меандра.

## 2.5 Применение MATLAB для расчета спектра дискретного сигнала

В MATLAB дискретное преобразование Фурье выполняется с помощью команды `fft` (Fast Fourier Transform), и обратное преобразование – с помощью команды `ifft` (Inverse Fast Fourier Transform), которые производят вычисления по специальному алгоритму быстрого преобразования. Синтаксис команд:

$$y = \text{fft}(x)$$

$$x = \text{ifft}(y)$$

$x$  – вектор с отсчетами сигнала  $u_n$ ;

$y$  – вектор с отсчетами спектра  $U_k$ ;

Как показано в предыдущем параграфе для дискретного преобразования Фурье, команда `fft` возвращает массив, значения которого соответствуют амплитудам гармоник дискретного сигнала в диапазоне частот  $[0, \omega_s]$ , а не  $[-\omega_s/2, \omega_s/2]$ , более привычном для восприятия. Для того чтобы переставить местами вторую и первую часть элементов вектора используется команда `fftshift`.

Массивы  $x$  и  $y$  не содержат информации о моментах времени для дискретного сигнала и о частотах спектра. Чтобы построить графики зависимости сигнала от времени и гармоник спектра по частотам нужно самостоятельно восстановить вектора времени и частот, зная частоту дискретизации и особенности спектра дискретного сигнала. Для определения частот, которым будут соответствовать гармоники после применения команды `fftshift`, можно воспользоваться формулой:

– для четного количества отсчетов

$$w = (-N/2:N/2-1) * w_s / (N-1);$$

– для нечетного количества отсчетов

$$w = (\text{ceil}(N/2)-N:\text{ceil}(N/2)-1) * w_s / (N-1);$$

где команда `ceil` производит округление в большую сторону.

`ceil(N/2)-N:ceil(N/2)-1` дает номера отрицательных и положительных гармоник  $k$ ,  $w_s/(N-1)$  – расстояние между гармониками (можно заменить на  $\omega_0 = 2\pi/T$ ).

*Пример 3:*

Рассмотрим второй случай из примера 2: меандр с частотой дискретизации равной частоте второго нуля спектра  $\omega_s = 8\omega_0$ . Для наглядности выберем период сигнала  $T = 2\pi$ , тогда  $\omega_0 = 1$  и  $\omega_0 k$  соответствует номеру гармоники. После применения `fft` получается комплексный спектр, амплитуду и фазу которого можно найти с помощью команд `abs` и `angle` соответственно. Чтобы сравнить амплитудные спектры аналогового и комплексного сигналов, нужно амплитуду гармоник дискретного спектра уменьшить в  $N$  раз.

Прямоугольный импульс задается с помощью логических операций: когда одновременно выполняются условия  $t \geq 0$  и  $t \leq \tau$ , результатом будет логическая единица. Если условия выполняются не одновременно, то логический ноль.

*Программа в MATLAB:*

---

```
% параметры и переменные задачи:
T=2*pi; % период сигнала
tau=T/2; % длительность импульса
u=@(t) t>=0 & t<=tau; % функция сигнала
w0=2*pi/T; % основная частота
wmax=4*w0; % максимальная частота
ws=2*wmax; % частота дискретизации
Ts=2*pi/ws; % период дискретизации
tn=0:Ts:T; % отсчеты времени
N=length(tn); % длина массивов времени и спектра
Uk=fft(u(tn)); % комплексный спектр дискретного сигнала
k=0:N-1; % номера гармоник
wk=w0*k; % дискретные частоты
% дискретные частоты после перестановки:
wk_sym=(ceil(N/2)-N:ceil(N/2)-1)*ws/(N-1);
```

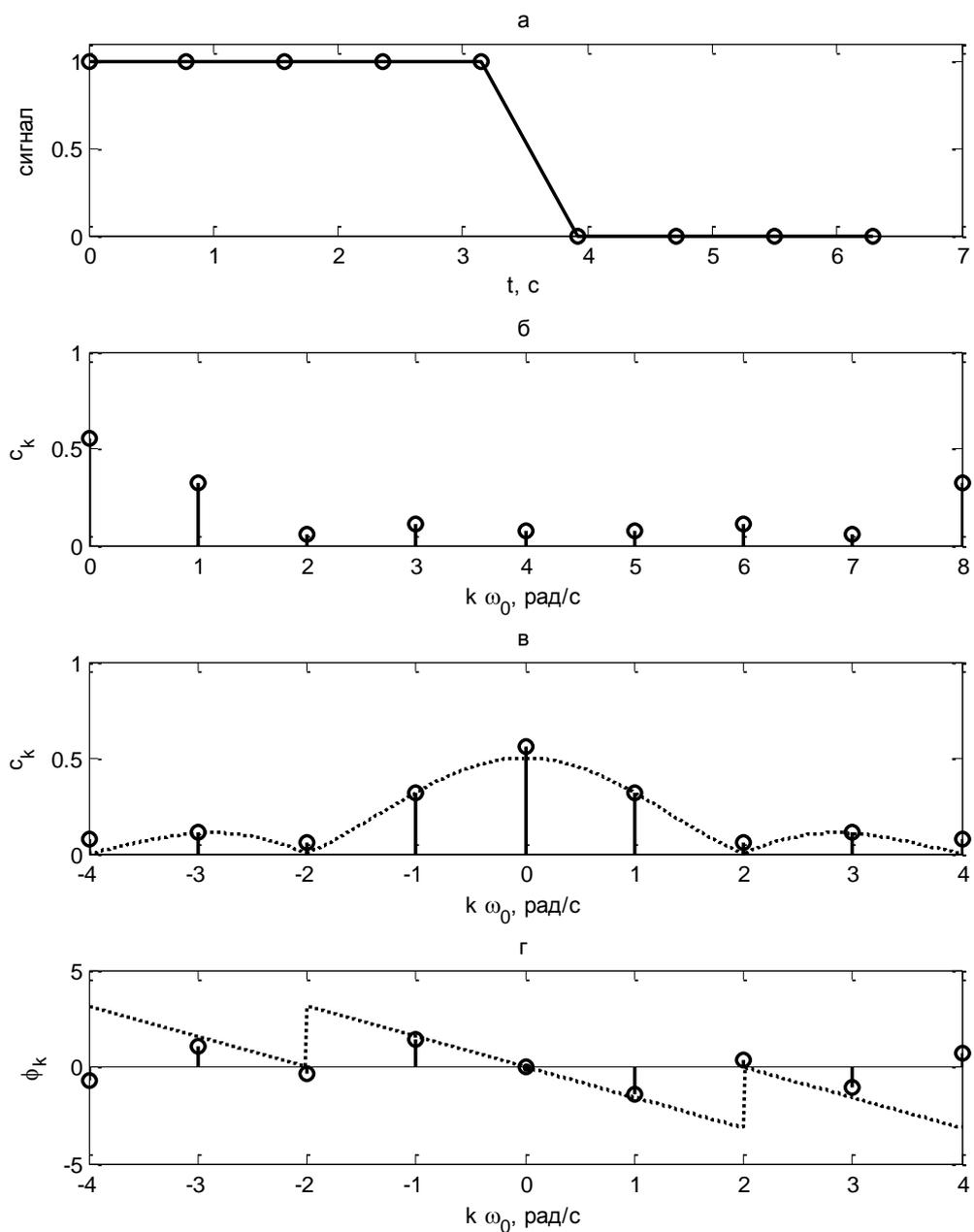


Рис. 7. Дискретный сигнал (а), его амплитудный спектр (б), амплитудный спектр после перестановки гармоник (в), фазовый спектр после перестановки гармоник (г).

```
% комплексный спектр аналогового сигнала:
ск=@(k) tau/T*sin(w0*k*tau/2)./(w0*k*tau/2)...
.*exp(-1i*w0*k*tau/2);
```

```
% вывод графиков
subplot(4,1,1)
plot(tn,u(tn),'ko-')
title('a')
```

```

xlabel('t, c');ylabel('сигнал')

subplot(4,1,2)
stem(wk,abs(Uk)/N,'k')
title('б')
xlabel('k \omega_0, рад/с');ylabel('c_k')

subplot(4,1,3)
stem(wk_sym,fftshift(abs(Uk))/N,'k')
title('в')
xlabel('k \omega_0, рад/с');ylabel('c_k')
hold on
plot(-4:1e-2:4,abs(ck(-4:1e-2:4)),'k:')

subplot(4,1,4)
stem(wk_sym,fftshift(angle(Uk)),'k')
hold on
plot(-4:1e-2:4,angle(ck(-4:1e-2:4)),'k:')
title('г')
xlabel('k \omega_0, рад/с');ylabel('\phi_k')

```

---

На рис. 7 показан результат выполнения программы. Как было показано в примере 2, небольшие отличия спектров дискретного и аналогового сигналов происходят из-за наложения на основную часть спектра высоких гармоник сигнала. Но в данном примере несовпадение для амплитуды нулевой гармоники (т.е. среднего значения сигнала) объясняется неточной оцифровкой сигнала: в точках разрыва функция должна быть равна 0,5 и последний отсчет не должен учитываться. С увеличением числа отсчетов вклад этой неточности будет уменьшаться. На практике имеют дело с сигналами сложной формы с большим количеством отсчетов, часто с присутствием шумов, поэтому подобной неточностью оцифровки пренебрегают.

## 2.6 Растекание спектра

Кроме частоты дискретизации, на спектр дискретного сигнала также оказывает влияние выбор длительности записи. Один из эффектов, связанных с длительностью записи сигнала, называется растеканием спектра.

Предположим, что с помощью АЦП регистрируется периодический сигнал. Как правило, для реальных сигналов сложной формы трудно выбрать время записи так, чтобы длительность записанного сигнала была точно равна его периоду или целому количеству периодов. Рассмотрим какие изменения произойдут в спектре дискретного сигнала, длительность которого не равна целому числу периодов исходного сигнала.

Как мы помним, набор отсчетов сигнала  $u_n$  для дискретного преобразования Фурье – это ровно один период дискретного сигнала, т.е. в данном случае зарегистрированный отрезок должен быть периодически продолжен, при этом периодом повторения должна быть длительность всей записи сигнала  $T$ . Если длительность записи отлична от периода аналогового сигнала, то при периодическом повторении записи произойдет искажение формы сигнала и в целом это будет уже другой сигнал и, соответственно, исказится его спектр.

Например, регистрировался гармонический сигнал  $\cos(2\pi t/T_0)$  с периодом  $T_0$ , а длительность записи равна  $T$ , причём  $T \neq mT_0$ , где  $m$  – целое число. При периодическом повторении записи сигнала (рис. 8) появятся разрывы первого рода, т.к. значения сигнала в начале и конце записи не совпадают. Эти разрывы приведут к появлению дополнительных гармоник в спектре дискретного сигнала, т.е. спектр станет шире, как будто растечется.

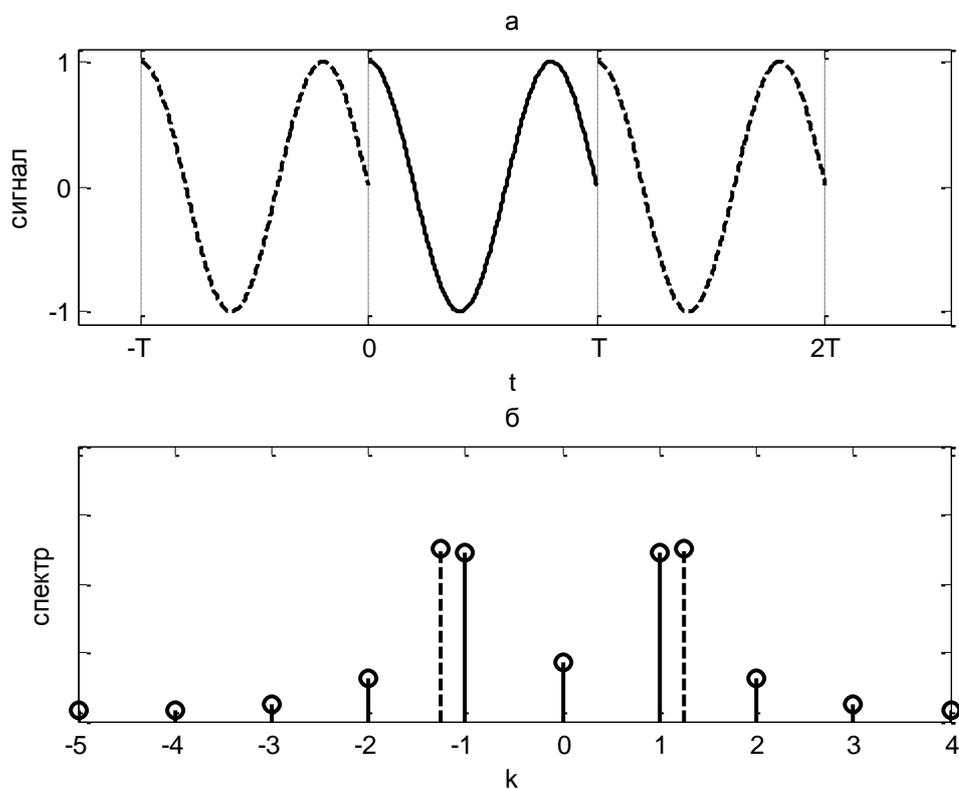


Рис. 8. Периодически повторяющийся отрезок дискретного сигнала, содержащий нецелое число периодов аналогового сигнала (а) и его спектр (б). Пунктиром показан спектр аналогового сигнала.

Известно, что спектр исходного аналогового сигнала состоит из двух гармоник на частотах  $\omega = \pm 2\pi/T_0$ . На рис. 8 а показан периодически продолженный дискретный сигнал, сплошной линией отмечен отрезок записанного сигнала, а штрихованной линией его периодическое продолжение. На рис. 8. б приведен спектр сигнала для десяти отсчетов. Пунктиром показано положение гармоник (на шкале частот) аналогового сигнала. Видно, что в спектре дискретного сигнала появились дополнительные ненулевые гармоники и гармоника при  $k = 0$  не равна нулю, т.е. периодически продолженный сигнал с разрывом имеет ненулевое среднее значение.

Растекание спектра приводит к ухудшению его разрешения. Например, рассмотрим биения – периодические колебания с плавно изменяющейся амплитудой, возникающие при сложении близких по частоте гармонических колебаний. Возьмем сумму двух косинусов с частотами  $\omega_1 = 2,5$  рад/с,  $\omega_2 = 2$  рад/с, частота суммарного колебания будет  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ . Длительность записи  $T$  выберем чуть больше периода сигнала  $\Delta T$ :  $T = 9\Delta T/8$ . На рис. 9 а пунктиром показаны исходные косинусы, сплошной линией – биения и кружочками – отсчеты дискретного сигнала. На рис. 9 б показан спектр (положительная часть) дискретного сигнала и пунктиром гармоники исходных косинусов. Из-за того, что длительность

записи не кратна периоду сигнала спектр растекается, гармоники дискретного сигнала не совпадают точно по частоте с гармониками исходных сигналов и их амплитуды искажаются. В этом примере мы не сможем по спектру уверенно сказать, у какого исходного колебания (косинуса) была больше амплитуда. Если разница частот  $\Delta\omega$  будет еще меньше, то из-за растекания спектра пики в дискретном спектре сольются в один, и мы не сможем без принятия специальных мер обнаружить присутствие двух колебаний в зарегистрированном сигнале.

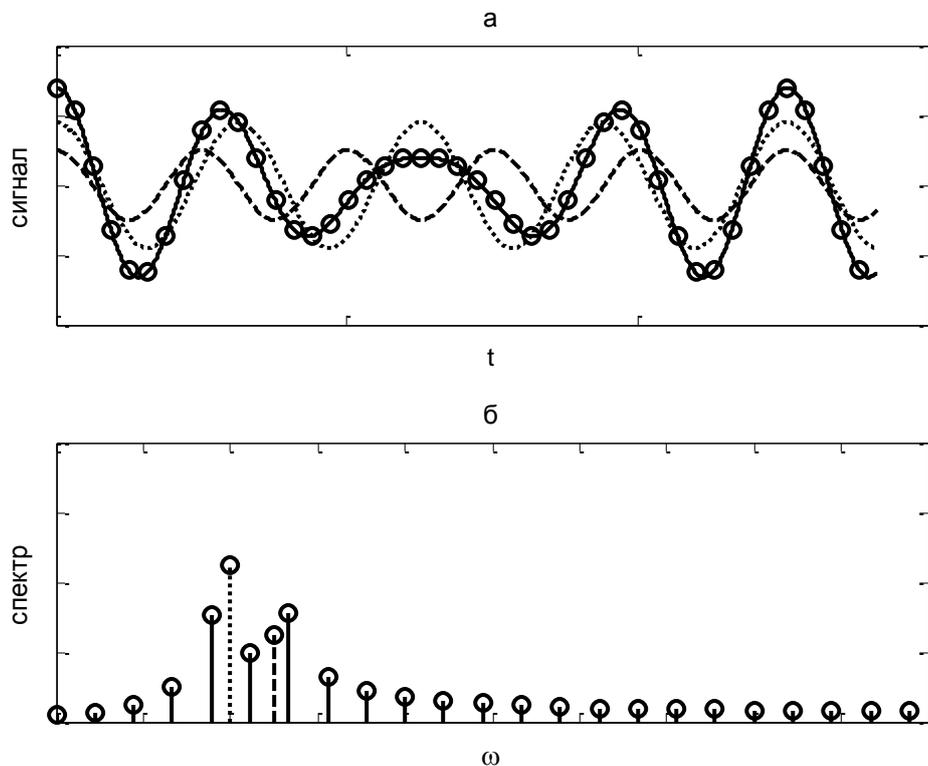


Рис. 9. Дискретный сигнал биений и (пунктиром) исходные гармонические сигналы (а), положительная часть спектра дискретного сигнала и (пунктиром) частоты исходных гармонических сигналов.

На 3 курсе вы познакомитесь с оконным преобразованием Фурье и узнаете, что сигнал конечной длительности можно интерпретировать как результат умножения бесконечного сигнала на функцию прямоугольного окна. Спектром произведения сигналов является свертка их спектров. Свертка спектров рассматриваемых нами гармонических сигналов и спектра прямоугольного импульса длительностью  $T$  даст спектры на рис. 8, 9 б.

## 2.7 Увеличение разрешения спектра

Другой эффект, связанный с изменением длительности записи сигнала, проявляется в изменении разрешения спектра по частотам. Рассмотрим способы увеличения разрешения спектра.

Огибающая спектральной функции зависит от формы сигнала, но поскольку дискретное преобразование Фурье дает дискретный спектр, то, при большом расстоянии между гармониками, можно пропустить важные особенности спектральной функции. Естественный выход из этой ситуации – уменьшить

расстояние между гармониками, чтобы точнее описать огибающую. Мы знаем, что период спектра равен  $\omega_s=2\pi/T_s$ , а его период дискретизации равен  $\omega_0=2\pi/T=2\pi/NT_s$ , поэтому, если не менять частоту дискретизации сигнала, но увеличить время записи сигнала, то размеры периода спектра не изменятся, но на этом участке будет помещаться больше гармоник.

На рис. 10 а, б показаны дискретные сигналы с одинаковой частотой дискретизации и длительностью один и два периода косинуса. Ниже приведены их амплитудные спектры. Видно, что при увеличении длительности сигнала разрешение спектра увеличивается.

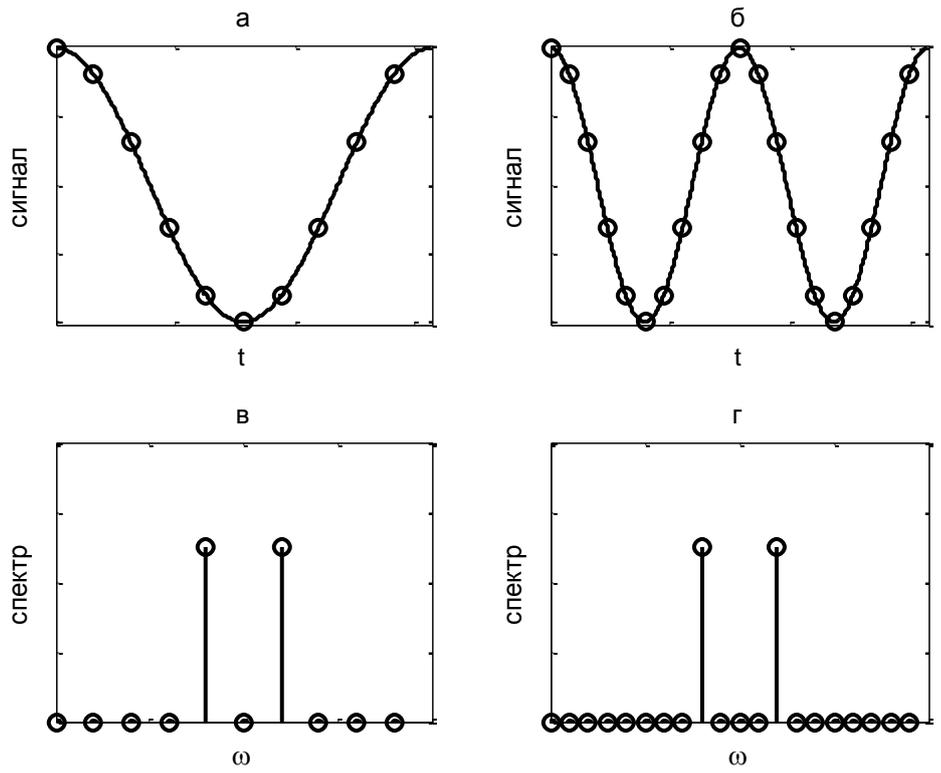


Рис. 10. Увеличение разрешения спектра косинуса.

Для импульсных сигналов, которые заканчиваются нулевыми отсчетами, т.е. сигналов, которые можно представить как произведение сигнала на прямоугольный импульс, можно увеличить разрешение спектра путем добавления нулей к зарегистрированным отсчетам. Такая добавка к сигналу не изменит его форму, но увеличит его длительность, т.е. уменьшит расстояние между гармониками.

Рассмотрим последовательность прямоугольных импульсов. На рис. 11 а изображен зарегистрированный сигнал и на рис. 11 б – этот сигнал, добавленный нулевыми отсчетами. Дискретные отсчеты спектра дискретного сигнала соответствуют частотам  $k\omega_s/N$ . На периоде спектра будет больше число отсчетов, т.е. они будут более тесно расположены в промежутке от  $-\omega_s/2$  до  $\omega_s/2$ .

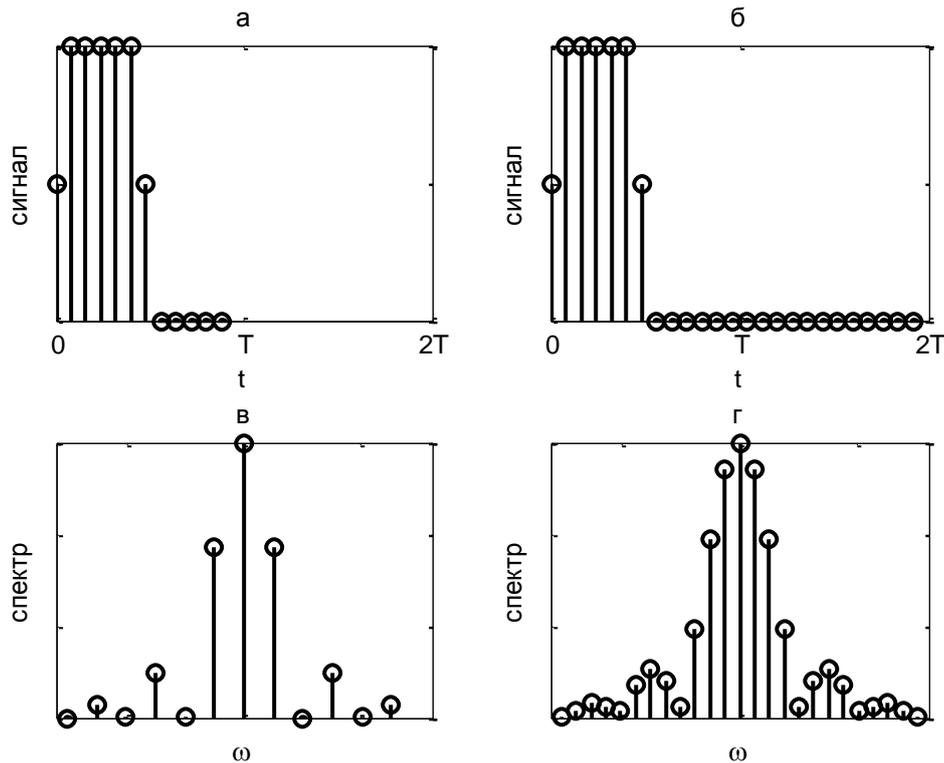


Рис. 11. Увеличение разрешения спектра прямоугольного импульса.

## 2.8 Вопросы для самоконтроля

1. Каким условиям должна удовлетворять функция, чтобы ее можно было разложить в ряд Фурье?
2. Какой смысл у коэффициента  $a_0$  ряда Фурье?
3. Какие формы записи ряда Фурье вы знаете?
4. Что такое амплитудный и фазовый спектры, как их можно интерпретировать?
5. Какими свойствами симметрии обладают амплитудный и фазовый спектры?
6. Как понимать отрицательные частоты?
7. Какие особенности у спектра аналитического периодического сигнала?
8. Для каких сигналов применяется дискретное преобразование Фурье?
9. Какие особенности у спектра дискретного периодического сигнала?
10. Как сопоставить спектр после дискретного преобразования Фурье спектру аналогового сигнала?
11. Как соотносятся амплитуды гармоник после дискретного преобразования Фурье и амплитудный спектр аналогового сигнала?
12. Как формулируется теорема Котельникова?
13. Какие ограничения накладывает теорема Котельникова на спектр сигнала для точного восстановления аналогового сигнала из дискретного?
14. Какие искажения в спектре могут появляться при дискретизации сигнала с бесконечным спектром?
15. В чем состоит явление растекания спектра?

16. Как можно увеличить разрешение спектра?
17. Что делают команды `fft`, `fftshift`, `ifft`?
18. Как восстановить массивы времени и частот дискретного сигнала и спектра после использования прямого и обратного быстрого преобразования Фурье?

### 3 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В ходе лабораторной работы аналоговый периодический сигнал получается с помощью функционального генератора. Характеристики этого сигнала можно определить с помощью осциллографа. Далее этот сигнал дискретизируется аналого-цифровым преобразователем (АЦП) и набор отсчетов сигнала сохраняется на компьютере. В пакете MATLAB с помощью встроенной функции быстрого преобразования Фурье `fft` или по формулам дискретного преобразования Фурье (2.3.2) рассчитывается амплитудный (и по выбору фазовый) спектр записанного дискретного сигнала. Спектр аналогового сигнала можно рассчитать по формулам (2.1.2), (2.1.5), (2.1.6).

Целью работы является сравнение спектров аналогового и дискретного сигналов заданной формы, выявление их особенностей, демонстрация эффектов искажения спектра дискретного сигнала, связанных с процессом квантования сигнала, выработка практических рекомендаций для параметров дискретизации (частота дискретизации, время записи, чувствительность) сигналов рассматриваемой формы.

#### 3.1 Описание лабораторной установки

Блок-схема экспериментальной установки показана на рис. 12. Рассмотрим каждый элемент блок-схемы:

##### 1. Функциональный генератор

- a. В качестве источника аналоговых модельных сигналов используется функциональный генератор, с помощью которого можно получить периодические сигналы следующей формы:

- синусоида,
- меандр,
- пилообразная волна прямая и обратная,
- треугольная волна

Рекомендуется использовать диапазон частот от 1 до 65 кГц. Максимальная амплитуда выходного сигнала 14 В (следует обратить внимание, какую максимальную амплитуду можно подавать на АЦП!).

В основе функционального генератора находится цифровой генератор, создающий цифровой сигнал заданной формы (цифровой сигнал отличается временной дискретизацией и квантованием по уровню). Далее этот сигнал подается на цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) и цифровой сигнал преобразуется в аналоговый. Поэтому, напряжение на выходе ЦАП имеет ступенчатую форму, которая сглаживается фильтром низких частот. Нужно отметить, что чистота спектра выходного сигнала (уровень побочных компонентов и уровень шума) зависит от его частоты.

- б. Источником гармонических колебаний для наблюдения искажений спектра дискретного сигнала при нарушении теоремы Котельникова является стандартный лабораторный генератор сигналов различной формы (синусоидальные и прямоугольные импульсы).



Рис. 12. Блок-схема лабораторной установки.

#### 2. *Электронно-лучевой осциллограф*

Аналоговые сигналы, снимаемые с выхода функционального генератора, визуально контролируются на экране электронно-лучевого осциллографа. Такой контроль необходим чтобы пронаблюдать форму генерируемых сигналов и установить их параметры – амплитуду, длительность, период повторения и т.д.

#### 3. *Аналого-цифровой преобразователь*

АЦП – устройство для превращения аналоговых сигналов в цифровые реализации, доступные обработке на компьютере. В нашей лаборатории используются USB-модули АЦП фирмы L-Card типа E 14-140-M и E 14-140. Разрешение 14 бит, диапазоны входного сигнала  $\pm 10\text{В}$ ;  $\pm 2,5\text{В}$ ;  $\pm 0,6\text{В}$ ;  $\pm 0,15\text{В}$ . Максимальная частота квантования L-Card  $F_{\text{АЦП}}$  составляет 200 кГц (E 14-140-M) и 100 кГц (E 14-140), тогда как из теоремы Котельникова для восстановления сигнала без искажений спектр сигнала не должен превосходить  $f_{\text{ср}} \leq F_{\text{АЦП}}/2$ . Напомним, что все частоты, лежащие выше этого значения, будут накладываться на полезный сигнал и не смогут быть отделены от него при последующей обработке. Выбор диапазонов измерения, частоты дискретизации, длительности записи осуществляется программно.

#### 4. *Компьютер*

Для сбора, сохранения и визуализации полученной аналоговой информации используется программа L-Graph. В программе есть режимы осциллоскопа и спектроскопа, которые можно использовать для контроля и визуализации сигнала и его спектра. Расчет спектров дискретного и аналогового сигналов производится в программе MATLAB.

### 3.2 Задания

1. У преподавателя получить форму периодического сигнала и его параметры:
  - а. аналитически рассчитать спектр аналогового сигнала, построить графики амплитудного (и фазового спектра);

- b. исходя из полученных графиков и сведений об используемых АЦП выбрать частоту дискретизации  $f_s$ . Критерий выбора – минимальное искажение спектра дискретного сигнала по сравнению со спектром аналогового.
  - c. с помощью функционального генератора получить аналоговый сигнал заданной формы, дискретизировать его с выбранной  $f_s$ , сохранить на компьютере и рассчитать спектр дискретного сигнала.
  - d. на одном графике сравнить спектры, полученные в задании а и с, отметить особенности каждого и объяснить отличия. Амплитуды гармоник и частоты на графиках должны совпадать.
2. С помощью цифрового осциллографа L-Graph пронаблюдать искажение гармонического сигнала в результате нарушения теоремы Котельникова. Для этого подключить аналоговый генератор гармонического сигнала к АЦП, задать частоту квантования, например, 20кГц, и, плавно меняя частоту генератора в диапазоне от 1кГц до 20кГц, наблюдать за осциллограммой оцифрованного сигнала, объяснить наблюдаемые эффекты. Для двух случаев (1. – теорема Котельникова выполняется. 2. – теорема Котельникова нарушается) записать реализации дискретных сигналов и рассчитать их спектры. Построить графики сигналов от времени и амплитудные спектры. Объяснить результаты.
  3. Наблюдать явление растекания спектра для сигнала из задания 1. Вычислить и сравнить спектры отрезков сигнала, состоящих из целого и не целого числа периодов.
  4. Наблюдать увеличение разрешения спектра для сигнала из задания 1 путем добавления нулей или увеличением длительности записи сигнала.

## 4 ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т.2, М.:Наука, 1974.
2. Павлейно М.А., Ромаданов В.М. Спектральные преобразования в MATLAB. СПб., 2007.
3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2003.
4. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006.
5. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Бином, 2006.
6. сайт <https://bl.ocks.org/jinroh/7524988> Fourier series visualisation with d3.js. Программа по визуализации ряда Фурье для некоторых сигналов простой формы. График сигнала представляется как проекция на вещественную ось вращающегося вектора на комплексной плоскости. Для гармонического сигнала вращение происходит по окружности, для сигналов более сложной формы (суммы гармонических сигналов) – совместное движение по нескольким окружностям с кратной частотой. Можно выбирать форму сигнала и число членов ряда Фурье