САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

**А. Е. Волков, Н. А. Волкова,
Л. С. Шихобалов**

ТЕНЗОРЫ ВТОРОГО РАНГА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2020

УДК 514.743.24

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, вед. научн. сотр. *С. П. Беляев*
(С.-Петерб. гос. ун-т),
канд. физ.-мат. наук, доцент *А. А. Денисова*
(Гос. ун-т морск. и речн. флота им. адм. С. О. Макарова)

Публикуется по рекомендации
Учебно-методической комиссии
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета

Волков А. Е., Волкова Н. А., Шихобалов Л. С.
Тензоры второго ранга: учебное пособие. — СПб., 2020. — 46 с.

В пособии изложена алгебра тензоров второго ранга в трехмерном евклидовом пространстве. Введено понятие диады и тензор определен как линейная комбинация диад. Рассмотрены различные виды тензоров и сформулированы основные определения и теоремы тензорной алгебры. Проанализирована связь тензоров с линейными операторами и квадратными матрицами, состоящими из координат тензоров относительно ортонормированного базиса. Выведена формула преобразования координат тензоров при повороте базиса. Приведены примеры тензорных величин.

Пособие предназначено студентам, которые обучаются по программам, включающим изучение теории тензоров. С его помощью студенты овладеют основами алгебры тензоров, научатся использовать диадную и матричную записи тензоров, освоят закон преобразования матрицы тензора при замене базиса. Пособие может быть полезно также аспирантам и научным сотрудникам, в учебной и научной деятельности которых применяется математический аппарат теории тензоров.

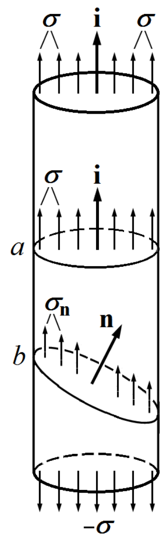
Библиогр. 16 назв. Ил. 10.

Ключевые слова: тензор, диада, тензорное произведение, тензорный базис, матрица тензора, замена базиса.

ВВЕДЕНИЕ

Известны три наиболее распространенных способа введения понятия тензора. При одном тензор определяется как элемент специально построенного множества, называемого тензорным произведением линейных пространств. При втором тензор определяется как полилинейное отображение, ставящее в соответствие элементам нескольких линейных пространств некоторое число. При третьем способе тензор задается как совокупность чисел, которая преобразуется определенным образом при изменении базиса линейного пространства.

Все три способа определения тензора обладают общим существенным недостатком — они вводят понятие тензора опосредованно (два первых — через другие математические объекты, третий — через закон преобразования базиса линейного пространства). В связи с этим исследователю, желающему использовать аппарат теории тензоров в своей области знания, бывает трудно понять, что же такое тензоры и как их применять при решении практических задач.



Между тем, в механике при описании деформирования тел уже давно используется подход к построению теории тензоров, при котором тензор задается как самостоятельный математический объект, а его свойства, используемые при упомянутых способах определения, выводятся как следствия. Приведем простой пример.

Рассмотрим цилиндрический образец, находящийся под действием растягивающей нагрузки (см. рисунок). Допустим, что силы, приложенные к торцам образца, равномерно распределены по их поверхности и что в расчете на единицу площади поверхности они характеризуются для верхнего и нижнего торца векторами $\boldsymbol{\sigma}$ и $-\boldsymbol{\sigma}$ соответственно. Сила, рассчитанная на единицу площади, называется *вектором напряжения*.

Зададимся вопросом: «Какие векторы напряжения действуют в сечениях образца, наклоненных по-разному относительно его оси?»

Очевидно, что в сечениях, параллельных торцам, действуют такие же векторы напряжения, как на торцах. Так, в сечении a на часть образца, находящуюся ниже этого сечения, действует вектор напряжения $\boldsymbol{\sigma}$.

Рассмотрим произвольное сечение образца с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$ (сечение b на рисунке). Пусть $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n}$ — вектор напряжения в этом сечении (он приложен к нижней части образца и характеризует действие на нее верхней части). В механике показывается на основании законов статики, что вектор $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n}$ может быть вычислен следующим способом.

Обозначим через $\mathbf{i}$ единичный вектор, направленный вдоль оси образца (см. рисунок). Составим из векторов $\mathbf{i}$ и $\boldsymbol{\sigma}$, чисто формально, величину $\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}$ и будем трактовать ее как единый математический объект. Тогда искомый вектор напряжения $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n}$ задается выражением

$$\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}), \qquad (*)$$

где скалярное умножение вектора $\mathbf{n}$ на введенный объект $\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}$ осуществляется следующим способом: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i})\boldsymbol{\sigma}$, где $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}$ — обычное скалярное произведение векторов (число). Отсюда $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i})\boldsymbol{\sigma}$, то есть вектор напряжения $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n}$ равен вектору $\boldsymbol{\sigma}$, умноженному на число $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}$ (это число равно косинусу угла между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{i}$).

Таким образом, введенный объект $\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}$ позволяет найти вектор напряжения в любом сечении образца с помощью закона, определяемого формулой $(*)$. Этот объект и есть тензор. В данном примере он служит тензором напряжений для указанного вида нагружения образца.

В общем случае подход к построению теории тензоров, принятый в механике, состоит в следующем. Берется векторное пространство. Из всевозможных пар его векторов составляются объекты по типу введенного выше объекта $\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}$ и постулируются их свойства (линейность по каждому вектору пары, правила сложения и умножения на числа и другие). Эти объекты, именуемые диадами, являются простейшими тензорами второго ранга. Произвольный тензор второго ранга представляет собой линейную комбинацию диад. Аналогичным образом строятся тензоры высших рангов, то есть тензоры, образованные тройками, четверками и большим количеством векторов.

В книге изложены основы теории тензоров второго ранга на базе подхода, принятого в механике.

Нумерации формул и теорем свои в каждой главе и включают в себя номер раздела в данной главе и номер формулы или теоремы в этом разделе (например, ссылка в главе 2 на теорему 1.2 означает вторую теорему в разд. 1 этой же главы). При необходимости сослаться на формулу или теорему из другой главы дополнительно указывается номер главы. Векторы обозначаются полужирным шрифтом. Параллельность и перпендикулярность векторов обозначаются знаками $\parallel$ и $\perp$. Для обозначения конца доказательства используется знак $\blacksquare$.

Глава 1

ТЕНЗОРЫ: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассматриваются тензоры второго ранга в евклидовом пространстве. Некоторые утверждения приводятся без доказательств.

1. Операции над векторами

Из школьного курса геометрии известны следующие операции над векторами.

1. *Сложение векторов.* Сумма векторов находится по правилу параллелограмма (рис. 1).

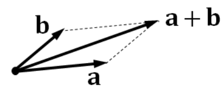


Рис. 1. Сложение векторов.

Вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ есть сумма векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

2. *Умножение вектора на число.* Пример приведен на рис. 2.

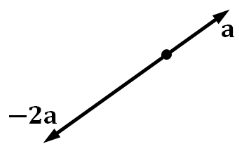


Рис. 2. Умножение вектора на число.

Вектор $-2\mathbf{a}$ направлен противоположно вектору $\mathbf{a}$ и имеет длину, в два раза бо́льшую длины вектора $\mathbf{a}$.

3. *Скалярное умножение векторов.* Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\varphi, \tag{1.1}$$

где a и b — длины векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Обратим внимание на то, что первые две операции ставят в соответствие векторам вектор, а последняя ставит в соответствие двум векторам число.

В линейной алгебре вводится операция над векторами, называемая тензорным или диадным умножением векторов. Она ставит в соответствие двум векторам новый объект, называемый диадой. Диада является простейшим тензором второго ранга.

2. Понятие тензора второго ранга

Определение. *Диада* — это произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ евклидова пространства, записываемое в виде $\mathbf{ab}$ и удовлетворяющее следующим правилам.

Правило умножения диады на число:

$$\alpha\mathbf{ab} = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\alpha\mathbf{b}), \tag{2.1}$$

где α — любое число; можно записывать $\alpha\mathbf{ab}$, $\mathbf{a}\alpha\mathbf{b}$ или $\mathbf{ab}\alpha$.

Правило раскрытия скобок (означающее линейность диады по каждому сомножителю):

$$(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2)\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{a}_1\mathbf{b} + \alpha_2\mathbf{a}_2\mathbf{b}; \quad \mathbf{a}(\beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2) = \beta_1\mathbf{ab}_1 + \beta_2\mathbf{ab}_2, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ — произвольные векторы, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — произвольные числа.

Правило скалярного умножения вектора на диаду и диады на вектор:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{ab} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}; \quad \mathbf{ab}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\mathbf{a}, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}$ — скалярные произведения векторов (числа); отметим, что первое произведение равно вектору $\mathbf{b}$, умноженному на число $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}$, а второе произведение равно вектору $\mathbf{a}$, умноженному на число $\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}$.

Правило скалярного умножение диад:

$$\mathbf{ab}\cdot\mathbf{cd} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{ad}; \tag{2.4}$$

это произведение равно диаде $\mathbf{ad}$, умноженной на число $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$.

Определение. Операция составления из двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ диады $\mathbf{ab}$ называется *тензорным* или *диадным умножением* векторов.

Обозначение тензорного произведения векторов без знака умножения между сомножителями принято в механике. В математической литературе используется знак $\otimes$, например, $\mathbf{ab} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$.

Внимание! Операция тензорного умножения векторов *не коммутативна*. Это означает, что в общем случае $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$, то есть *в диаде нельзя менять векторы местами*.

Действительно, на основании правила (2.3) можем записать:

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a}; \qquad \mathbf{ba} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{b},$$

откуда видно, что скалярное произведение диады $\mathbf{ab}$ на вектор $\mathbf{u}$ является вектором, параллельным вектору $\mathbf{a}$, тогда как произведение диады $\mathbf{ba}$ на $\mathbf{u}$ есть вектор, параллельный $\mathbf{b}$, что служит подтверждением неравенства $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$ (при $\mathbf{b} \nparallel \mathbf{a}$).

Определение. *Тензор второго ранга* или *двухвалентный тензор* — это линейная комбинации диад, то есть конечная сумма вида

$$\alpha\mathbf{ab} + \beta\mathbf{cd} + \ldots + \gamma\mathbf{yz}, \tag{2.5}$$

где греческие буквы — вещественные числа; латинские буквы — векторы; $\mathbf{ab}, \mathbf{cd}, \ldots, \mathbf{yz}$ — тензорные произведения векторов (диады).

Тензор n-го ранга состоит из слагаемых, содержащих n векторов. В связи с тем, что в данном пособии рассматриваются тензоры только второго ранга, далее будем называть их просто *тензорами*. Из (2.5) видно, что простейшим тензором является диада, например, $\mathbf{ab}$.

Обозначаются тензоры, как правило, заглавными латинскими буквами (A, B и т. д.). Для некоторых тензоров приняты специальные обозначения. В частности, в механике тензоры напряжения и деформации часто обозначаются буквами σ и ε соответственно (иногда с «крышечками» $\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$).

Если E — рассматриваемое евклидово пространство и тензор A образован векторами из E, то принято говорить, что «тензор A определен *над* пространством E» или «тензор A определен *в* пространстве E».

Сложение тензоров коммутативно и ассоциативно.

При скалярном умножении вектора на тензор, тензора на вектор и тензора на тензор выполняется обычное правило раскрытия скобок. Например, с учетом (2.1), (2.3) и (2.4) имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{ab} + \gamma\mathbf{yz}) &= \mathbf{u} \cdot \alpha\mathbf{ab} + \mathbf{u} \cdot \gamma\mathbf{yz} \\
&= \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \gamma(\mathbf{u} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}; \\
(\alpha\mathbf{ab} + \gamma\mathbf{yz}) \cdot \mathbf{u} &= \alpha\mathbf{ab} \cdot \mathbf{u} + \gamma\mathbf{yz} \cdot \mathbf{u} = \\
&= \alpha(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a} + \gamma(\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})\mathbf{y}; \\
(\alpha\mathbf{ab} + \gamma\mathbf{yz}) \cdot \beta\mathbf{uv} &= \alpha\mathbf{ab} \cdot \beta\mathbf{uv} + \gamma\mathbf{yz} \cdot \beta\mathbf{uv} = \\
&= \alpha\beta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{av} + \gamma\beta(\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})\mathbf{yv}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Определение. *Нулевым* тензором, обозначаемым $\hat{0}$, называется тензор, удовлетворяющий зависимости

$$A + \hat{0} = A \quad \text{для любого тензора } A. \tag{2.7}$$

Теорема 2.1. *Нулевой тензор* $\hat{0}$ *может быть получен умножением числа нуль на произвольный тензор; он равен также любой диаде, содержащей нулевой вектор* $\mathbf{0}$:

$$\hat{0} = 0(\mathbf{ab}) = \mathbf{a0} = \mathbf{0b} \quad \textit{при любых векторах } \mathbf{a} \textit{ и } \mathbf{b}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Рассмотрим тензор $0(\mathbf{ab})$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — какие-либо векторы (этот тензор существует, так как диада может быть умножена на произвольное число, в том числе на нуль). На основании правила (2.1) и свойств векторов можем записать:

$$0(\mathbf{ab}) = (0\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{0b} = (0\mathbf{x})\mathbf{b} = 0(\mathbf{xb}) = \mathbf{x}(0\mathbf{b}) = \mathbf{x0} = \mathbf{x}(0\mathbf{y}) = 0(\mathbf{xy}),$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор; $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — произвольные векторы (использовано свойство векторов: $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}$ при любом векторе $\mathbf{v}$). Из выписанной цепочки равенств вытекает следующее: произведение числа нуль на любую диаду есть один и тот же тензор и он совпадает с диадой, содержащей нулевой вектор. Обозначая этот тензор символом $\hat{0}$, получаем зависимость (2.8). Остается доказать, что этот тензор является нулевым, то есть удовлетворяет условию (2.7).

Пусть $\mathbf{ab}$ — какая-либо диада; α — произвольное число. С помощью (2.8), правил (2.1), (2.2) и свойств нулевого вектора получаем:

$$\alpha\mathbf{ab} + \hat{0} = \alpha\mathbf{ab} + \mathbf{0b} = (\alpha\mathbf{a} + \mathbf{0})\mathbf{b} = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \alpha\mathbf{ab},$$

следовательно, прибавление тензора $\hat{0}$ к тензору вида $\alpha\mathbf{ab}$ не меняет его. Теперь прибавим тензор $\hat{0}$ к произвольному тензору A. Представляя тензор A в виде линейной комбинации диад (см. (2.5)), сложим тензор $\hat{0}$ с последним слагаемым, входящим в состав A. По только что доказанному, это слагаемое не изменится, значит, не изменится и сам тензор A, то есть будет $A + \hat{0} = A$. В силу произвольности A, это доказывает справедливость условия (2.7), поэтому тензор $\hat{0}$, удовлетворяющий зависимости (2.8), действительно является нулевым тензором. ■

Множество тензоров второго ранга образует линейное пространство с обычными правилами выполнения операций сложения и умножения на число. При этом роль нулевого элемента играет нулевой тензор $\hat{0}$. Тензор, противоположный к тензору A, есть тензор $-A = (-1)A$. Вычитание тензоров производится по правилу $A - B = A + (-1)B$.

Определение. *Единичным*, *метрическим* или *фундаментальным* тензором, обозначаемым I (иногда E), называется тензор, определяемый законом

$$A \cdot I = I \cdot A = A \quad \text{для любого тензора } A. \tag{2.9}$$

Можно доказать, что тензор I существует и единственен. Единичный тензор I и только он удовлетворяет следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} &I \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot I = \mathbf{u} \quad \text{для любого вектора } \mathbf{u};\\ &\mathbf{u} \cdot I \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{для любых векторов } \mathbf{u} \text{ и } \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Иногда единичный тензор определяют с помощью первой из зависимостей (2.10) вместо (2.9).

Определение. *Свёртыванием* тензора называется операция замены во всех диадах, входящих в состав тензора, тензорного умножения векторов скалярным умножением.

Результатом операции свёртывания тензора является число, именуемое *следом* тензора. Оно обозначается символом tr или sp (от английского слова «trace» и немецкого «Spur», означающих «след»). Например, след тензора $A = \alpha\mathbf{ab} + \beta\mathbf{cd} + \ldots + \gamma\mathbf{yz}$ есть число

$$\mathrm{tr} A = \mathrm{sp}\, A = \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + \beta(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) + \ldots + \gamma(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}). \tag{2.11}$$

Определение. *Транспонированием* тензора называется операция, которая заключается в перемене местами векторов во всех диадах, образующих тензор.

Так, если дан тензор

$$A = \alpha\mathbf{ab} + \beta\mathbf{cd} + \ldots + \gamma\mathbf{yz}, \tag{2.12}$$

то *транспонированный* или *сопряжённый* к нему тензор A^{T} имеет вид

$$A^{\mathrm{T}} = \alpha\mathbf{ba} + \beta\mathbf{dc} + \ldots + \gamma\mathbf{zy}; \tag{2.13}$$

транспонированный тензор иногда обозначают символом A^*, A' или A^t.

Теорема 2.2. *Операция транспонирования тензора обладает следующими свойствами*:

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A; \quad (\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}; \quad (A \pm B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \pm B^{\mathrm{T}}; \quad (A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} \tag{2.14}$$

для произвольных тензоров A, B и любого числа λ.

Внимание! Согласно последнему равенству в (2.14), тензор, являющийся транспонированным к произведению тензоров, равен произведению транспонированных тензоров, *взятых в обратном порядке*.

Доказательство. Первые три равенства в (2.14) практически очевидны. Для их доказательства нужно представить тензоры A и B в виде (2.12) и воспользоваться определением операции транспонирования.

Докажем последнее равенство. Если тензор A или B представляет собой линейную комбинацию диад, то, раскрыв скобки, получим сумму скалярных произведений диад. Отсюда, учитывая второе и третье равенства в (2.14), заключаем, что для доказательства равенства $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$ достаточно рассмотреть произведение диад.

Пусть $A = \mathbf{ab}$ и $B = \mathbf{cd}$. Запишем следующую цепочку равенств, используя правило скалярного умножения диад (2.4), второе равенство в (2.14) и симметричность скалярного произведения векторов:

$$(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{ad})^{\mathrm{T}} =$$
$$= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{da}) = \mathbf{d}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = \mathbf{dc} \cdot \mathbf{ba} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}};$$

отсюда вытекает последнее равенство в (2.14). ■

Для любого тензора A и любого вектора $\mathbf{u}$ выполняются равенства

$$A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot A^{\mathrm{T}}; \quad A^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot A; \tag{2.15}$$

эти равенства доказываются с помощью формул (2.6), (2.12) и (2.13).

Тензор A называется *симметричным* или *самосопряженным*, если

$$A^{\mathrm{T}} = A, \tag{2.16}$$

и называется *антисимметричным* или *кососимметричным*, если

$$A^{\mathrm{T}} = -A. \tag{2.17}$$

Например, тензор $\mathbf{ab} + \mathbf{ba}$ симметричный, а тензор $\mathbf{ab} - \mathbf{ba}$ антисимметричный.

Всякий тензор может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}}), \tag{2.18}$$

где тензор $\frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})$ симметричный, а тензор $\frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}})$ антисимметричный. Справедливость равенства (2.18) доказывается раскрытием скобок; симметричность и антисимметричность тензоров доказывается с помощью формул (2.14).

Симметричные и антисимметричные тензоры играют большую роль в физике. В частности, симметричными являются тензор напряжения σ и тензор деформации ε. Отметим, что в случае линейно упругого тела эти тензоры связаны законом Гука, который для изотропного тела имеет форму

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr} \varepsilon I + 2G\varepsilon,$$

где λ и G — коэффициенты Ламе (скалярные величины, характеризующие упругие свойства материала; коэффициент G называется также модулем сдвига); $\operatorname{tr}\varepsilon$ — след тензора ε; I — единичный тензор.

Определение. Тензор A называется *вырожденным*, если существует вектор $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ такой, что $A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор). В противоположном случае, то есть когда для всех ненулевых векторов $\mathbf{u}$ выполняется неравенство $A \cdot \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, тензор A называется *невырожденным*.

Отметим, что согласно этому определению, если A — невырожденный тензор, то из $A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ следует $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Примером невырожденного тензора является единичный тензор I. Действительно, так как, по определению единичного тензора, $I \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$, то для любого $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ будет $I \cdot \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Примерами вырожденных тензоров служат диады. В самом деле, скалярное произведение диады $\mathbf{ab}$ на любой вектор $\mathbf{u}$, ортогогальный вектору $\mathbf{b}$, есть нулевой вектор: $\mathbf{ab} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{a}0 = \mathbf{0}$ (такой вектор $\mathbf{u}$ всегда существует, если пространство имеет размерность, не меньшую двух).

Можно доказать, что если A и B — невырожденные тензоры и α — произвольное число, то тензоры αA, A^{T}, $A \pm B$ и $A \cdot B$ невырожденные.

Определение. Тензор A^{-1} называется *обратным* к тензору A, если выполняется соотношение

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I, \tag{2.19}$$

где I — единичный тензор. Тензор A, имеющий обратный тензор, называется *обратимым*.

Можно доказать, что если тензор A^{-1}, обратный к тензору A, существует, то он единственный, а также, что для выполнения соотношения (2.19) достаточно выполнения любого одного из равенств $A \cdot A^{-1} = I$ или $A^{-1} \cdot A = I$.

Отметим, что если A — тензор, то нельзя заменять символ A^{-1} символом деления $\frac{1}{A}$ или $1:A$, потому что операция деления на тензор не определена; *здесь верхний индекс «−1» — символ обратного тензора, а не показатель степени.*

Внимание! Обратный тензор существует не для всякого тензора.

Приведем без доказательства две теоремы.

Теорема 2.3. *Вырожденные тензоры обратных тензоров не имеют. Всякий невырожденный тензор имеет единственный обратный тензор.*

Теорема 2.4. *Если существуют тензоры A^{-1} и B^{-1}, обратные к A и B, то выполняются формулы (при любом ненулевом числе α):*

$$(A^{-1})^{-1} = A; \quad (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}; \quad (A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}; \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \tag{2.20}$$

Внимание! Согласно последнему равенству в (2.20), тензор, обратный к произведению тензоров, равен произведению обратных тензоров, *взятых в противоположном порядке.*

Для тензоров наряду с операцией скалярного умножения вводится операция двойного скалярного умножения, обозначаемая двоеточием.

Операция *двойного скалярного (бискалярного) умножения тензоров* задается правилами:

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{a}\mathbf{x} \cdot\cdot \beta \mathbf{b}\mathbf{y} &= \alpha\beta \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b})\mathbf{y} = \alpha\beta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}); \\ (A + B) \cdot\cdot C &= A \cdot\cdot C + B \cdot\cdot C; \\ A \cdot\cdot (C + D) &= A \cdot\cdot C + A \cdot\cdot D; \end{aligned} \tag{2.21}$$

результатом этой операции (в рассматриваемом случае тензоров второго ранга) является число.

Из (2.4), (2.11) и (2.21) вытекает, что для любых тензоров A и B

$$A \cdot\cdot B = \mathrm{tr}(A \cdot B) \tag{2.22}$$

Обратим внимание на то, что *скалярные произведения, включающие в себя одновременно тензоры и векторы, могут как обладать свойством ассоциативности, так и не обладать этим свойством.*

Например, при любых тензорах A и B и векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ выполняются равенства

$$A \cdot (B \cdot \mathbf{u}) = (A \cdot B) \cdot \mathbf{u}; \qquad \mathbf{u} \cdot (A \cdot B) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot A) \cdot (B \cdot \mathbf{v}), \tag{2.23}$$

поэтому выражения $A \cdot B \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \cdot A \cdot B \cdot \mathbf{v}$ могут быть записаны без скобок.

Однако выражение $A \cdot \mathbf{u} \cdot B$, записанное без скобок, не определено, так как в общем случае имеет место неравенство

$$A \cdot (\mathbf{u} \cdot B) \neq (A \cdot \mathbf{u}) \cdot B. \tag{2.24}$$

Доказательство зависимостей (2.23) и (2.24). Благодаря билинейности скалярного произведения, достаточно рассмотреть произведение диад. Пусть $A = \mathbf{ab}$, $B = \mathbf{cd}$ и $\mathbf{u}$ — произвольный вектор. Тогда

$$A \cdot (B \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{ab} \cdot (\mathbf{cd} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{u});$$
$$(A \cdot B) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{u}).$$

Сравнение левых и правых частей этих цепочек равенств доказывает справедливость первого из равенств (2.23). Второе равенство доказывается аналогичным способом.

Вместе с тем, можем записать:

$$A \cdot (\mathbf{u} \cdot B) = \mathbf{ab} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{cd}) = \mathbf{ab} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{c});$$
$$(A \cdot \mathbf{u}) \cdot B = (\mathbf{ab} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{cd} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}.$$

Отсюда следует, что выражение, стоящее в левой части неравенства (2.24), коллинеарно вектору $\mathbf{a}$, тогда как выражение в правой части коллинеарно вектору $\mathbf{d}$, поэтому действительно эти выражения в общем случае не равны друг другу. ■

Отметим, что нулевой тензор $\hat{0}$ удовлетворяет зависимости

$$\mathbf{u} \cdot \hat{0} = \hat{0} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{2.25}$$

где $\mathbf{u}$ — любой вектор; $\mathbf{0}$ — нулевой вектор. В самом деле, по теореме 2.1 имеем: $\hat{0} = \mathbf{0u} = \mathbf{u0}$, поэтому $\mathbf{u} \cdot \hat{0} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{0u}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{0})\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ и $\hat{0} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u0}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{0} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u}0 = \mathbf{0}$; из этих цепочек равенств вытекает зависимость (2.25).

3. Тензор как линейный оператор

Напомним некоторые сведения из теории линейных операторов.

Определение. Пусть V — линейное (векторное) пространство. Закон $\mathcal{A}$, который каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ ставит в соответствие единственный вектор $\mathbf{y} \in V$, называется *оператором* или *преобразованием*, действующим в пространстве V.

Записывается это так: $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$.

Определение. Оператор $\mathcal{A}$ называется *линейным*, если для любых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ и любого числа α выполняются условия:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{A}(\mathbf{v}); \\ \mathcal{A}(\alpha\mathbf{u}) &= \alpha\mathcal{A}(\mathbf{u}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Определение. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *равными* ($\mathcal{A} = \mathcal{B}$), если

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathcal{B}(\mathbf{u}) \quad \text{для любого вектора } \mathbf{u}. \tag{3.2}$$

Определение. *Суммой* линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, определяемый равенством

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}(\mathbf{u}) \quad \text{для любого вектора } \mathbf{u}. \tag{3.3}$$

Определение. *Произведением* линейного оператора $\mathcal{A}$ *на число* α называется оператор $\alpha\mathcal{A}$, определяемый равенством

$$(\alpha\mathcal{A})(\mathbf{u}) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{u}) \quad \text{для любого вектора } \mathbf{u}. \tag{3.4}$$

Определение. *Композицией*, или *суперпозицией*, или *наложением*, или *произведением* линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, определяемый равенством

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{u})) \quad \text{для любого вектора } \mathbf{u}, \tag{3.5}$$

то есть это преобразование, которое состоит в последовательном выполнении сначала преобразования $\mathcal{B}$, а затем преобразования $\mathcal{A}$.

Обозначим: $\mathcal{I}$ — тождественный оператор; он оставляет все векторы без изменения, то есть

$$\mathcal{I}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \quad \text{для любого вектора } \mathbf{u}; \tag{3.6}$$

$\mathcal{O}$ — нулевой оператор; он переводит все векторы в нулевой вектор:

$$\mathcal{O}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{для любого вектора } \mathbf{u}. \tag{3.7}$$

Сумма линейных операторов, произведение линейного оператора на число, композиция линейных операторов и оператор, обратный к линейному оператору, являются линейными операторами.

Множество всех линейных операторов, действующих в векторном пространстве, образует линейное пространство, называемое *пространством операторов*. В нем нейтральным элементом является нулевой оператор $\mathcal{O}$, а оператором, противоположным к оператору $\mathcal{A}$, является оператор $-\mathcal{A} = (-1)\mathcal{A}$.

Вернемся к рассмотрению тензоров.

Каждый тензор A определяет линейный оператор $\mathcal{A}$ с помощью закона

$$\mathcal{A}\colon\ \mathbf{u} \longmapsto A\cdot\mathbf{u} \quad (\textit{то есть}\ \mathcal{A}(\mathbf{u}) = A\cdot\mathbf{u}), \tag{3.8}$$

где $\mathbf{u}$ — произвольный вектор.

Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ вида (3.8) действительно линейный. На основании (3.8) и свойств скалярного произведения можем записать:

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) \;=\; A\cdot(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) \;=\; \alpha A\cdot\mathbf{u}+\beta A\cdot\mathbf{v} \;=\; \alpha\mathcal{A}(\mathbf{u})+\beta\mathcal{A}(\mathbf{v}),$$

где $\mathbf{u},\mathbf{v}$ — произвольные векторы; α,β — произвольные числа. Отсюда следует выполнение условий (3.1), значит, оператор $\mathcal{A}$ линейный.

Закон (3.8) не единственно возможный. Так, тензор A определяет линейные операторы также с помощью законов $\mathbf{u}\longmapsto\mathbf{u}\cdot A$, $\mathbf{u}\longmapsto 5A\cdot\mathbf{u}$ и др.

Теорема 3.1. *Закон* (3.8) *устанавливает такое взаимно однозначное соответствие между множеством тензоров и множеством линейных операторов, при котором*:

– сумме тензоров соответствует сумма операторов;

– произведению тензора на число соответствует произведение оператора на это же число;

– единичному тензору I соответствует тождественный оператор $\mathcal{I}$;

– нулевому тензору $\hat{0}$ соответствует нулевой оператор $\mathcal{O}$;

– скалярному произведению тензоров соответствует композиция операторов, при этом связь между скалярным произведением тензоров и композицией операторов задается равенством

$$(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})(\mathbf{u}) \;=\; (A\cdot B)\cdot\mathbf{u}, \tag{3.9}$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — операторы, определяемые тензорами A и B с помощью закона (3.8); $\circ$ *— символ композиции операторов*; $\mathbf{u}$ *— любой вектор*;

– обратному тензору (*если он существует*) *соответствует обратный оператор.*

Доказательство. Пусть A, B — произвольные тензоры; $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — операторы, которые определяются с помощью закона (3.8) тензорами A, B, $A+B$, αA, I и $\hat{0}$ соответственно. Применяя закон (3.8), свойства тензоров (2.6), (2.10), (2.25) и свойства операторов (3.3), (3.4), (3.6) и (3.7), получаем:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}(\mathbf{u}) \,=\, (A+B)\cdot\mathbf{u} \,=\, A\cdot\mathbf{u} + B\cdot\mathbf{u} \,=\, \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}(\mathbf{u}) \,=\, (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{u});\\
&\mathcal{D}(\mathbf{u}) \,=\, (\alpha A)\cdot\mathbf{u} \,=\, \alpha(A\cdot\mathbf{u}) \,=\, \alpha\mathcal{A}(\mathbf{u}) \,=\, (\alpha\mathcal{A})(\mathbf{u});\\
&\mathcal{E}(\mathbf{u}) \,=\, I\cdot\mathbf{u} \,=\, \mathbf{u} \,=\, \mathcal{I}(\mathbf{u});\\
&\mathcal{F}(\mathbf{u}) \,=\, \hat{0}\cdot\mathbf{u} \,=\, \mathbf{0} \,=\, \mathcal{O}(\mathbf{u}),
\end{aligned}$$

где $\mathbf{u}$ — любой вектор; α — любое число. Отсюда, по определению равенства операторов (3.2), $\mathcal{C} = \mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{D} = \alpha\mathcal{A}$, $\mathcal{E} = \mathcal{I}$ и $\mathcal{F} = \mathcal{O}$, что доказывает первые четыре соответствия.

Докажем два последние соответствия.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — операторы, порождаемые тензорами A и B. Пользуясь определением композиции операторов (3.5), законом (3.8) и первой из формул (2.23), можем записать следующую цепочку равенств:

$$(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})(\mathbf{u}) \,=\, \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{u})) \,=\, \mathcal{A}(B\cdot\mathbf{u}) \,=\, A\cdot(B\cdot\mathbf{u}) \,=\, (A\cdot B)\cdot\mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}$ — любой вектор. Отсюда вытекает требуемая зависимость (3.9).

Теперь возьмем тензор A, для которого существует обратный тензор A^{-1}. Обозначим: $\mathcal{A}$ — оператор, определяемый тензором A с помощью закона (3.8); $\mathcal{G}$ — оператор, определяемый тензором A^{-1} с помощью того же закона (3.8). Нужно доказать, что $\mathcal{G} = \mathcal{A}^{-1}$.

На основании формул (3.6), (3.9) и свойств обратного и единичного тензоров находим при любом векторе $\mathbf{u}$:

$$(\mathcal{A}\circ\mathcal{G})(\mathbf{u}) \,=\, (A\cdot A^{-1})\cdot\mathbf{u} \,=\, I\cdot\mathbf{u} \,=\, \mathbf{u} \,=\, \mathcal{I}(\mathbf{u}),$$

откуда, в силу произвольности вектора $\mathbf{u}$, следует $\mathcal{A}\circ\mathcal{G} = \mathcal{I}$. Аналогичным образом можно получить равенство $\mathcal{G}\circ\mathcal{A} = \mathcal{I}$. По определению обратного оператора, эти два равенства означают, что $\mathcal{G} = \mathcal{A}^{-1}$. Значит, обратный оператор действительно соответствует обратному тензору.

Итак, мы доказали, что указанным в теореме тензорам и действиям над ними соответствуют аналогичные операторы и действия над ними. Для доказательства взаимной однозначности этого соответствия нужно доказать обратное утверждение, а именно, что операторам и действиям над ними соответствуют аналогичные тензоры и действия над ними. Это доказательство приводить не будем, из-за его громоздкости. ■

Из теоремы 3.1 вытекает, что *термины «тензор» и «линейный оператор» могут применяться как взаимозаменяемые*, поэтому далее будем вести речь в основном о тензорах.

Определение. Тензор (оператор) A называется *ортогональным*, если он не меняет скалярные произведения векторов, то есть удовлетворяет условию

$$(A \cdot \mathbf{u}) \cdot (A \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{для любых векторов } \mathbf{u}, \mathbf{v}. \tag{3.10}$$

Теорема 3.2. Критерий ортогональности тензора. *Тензор A является ортогональным тогда и только тогда, когда*

$$A^{\mathrm{T}} = A^{-1}, \tag{3.11}$$

где A^{T} — тензор, транспонированный к тензору A; A^{-1} — тензор, обратный к A.

Доказательство. Пусть A — ортогональный тензор, то есть выполняется условие (3.10). Преобразуем в этом условии левую часть, воспользовавшись равенством $A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot A^{\mathrm{T}}$ и ассоциативностью скалярного умножения (см. (2.15) и (2.23)), а правую часть оставим без изменения:

$$(A \cdot \mathbf{u}) \cdot (A \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot A^{\mathrm{T}}) \cdot (A \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (A^{\mathrm{T}} \cdot A) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Отсюда, вследствие $\mathbf{v} = I \cdot \mathbf{v}$, имеем:

$$\mathbf{u} \cdot (A^{\mathrm{T}} \cdot A) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot I \cdot \mathbf{v}.$$

Перенесем выражение, стоящее в правой части равенства, в левую часть и используем билинейность скалярного умножения:

$$\mathbf{u} \cdot (A^{\mathrm{T}} \cdot A) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot I \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot [(A^{\mathrm{T}} \cdot A) \cdot \mathbf{v} - I \cdot \mathbf{v}] = \mathbf{u} \cdot [(A^{\mathrm{T}} \cdot A - I) \cdot \mathbf{v}] = 0.$$

Полученное равенство $\mathbf{u} \cdot [(A^{\mathrm{T}} \cdot A - I) \cdot \mathbf{v}] = 0$ эквивалентно (3.10), потому что все преобразования могут быть проведены в обратную сторону. Благодаря произвольности вектора $\mathbf{u}$, полученное равенство выполняется в том и только том случае, если $(A^{\mathrm{T}} \cdot A - I) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Данное условие, в силу произвольности вектора $\mathbf{v}$, реализуется тогда и только тогда, когда $A^{\mathrm{T}} \cdot A - I = \hat{0}$, что равносильно равенству $A^{\mathrm{T}} \cdot A = I$. Последнее равенство означает с учетом формулы (2.19) и пояснения к ней, что $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$. В результате приходим к выводу, что выражения (3.10) и (3.11) эквивалентны, следовательно, теорема верна. ■

Простейшим примером ортогонального тензора служит единичный тензор I (выполнение для него условия (3.10) сразу вытекает из первой зависимости (2.10)).

Приведем некоторые сведения, касающиеся скалярного произведения векторов.

В элементарной математике скалярное произведение векторов определяется формулой (1.1): $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\varphi$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — векторы, a, b — их длины, φ — угол между ними. При этом считается, что длина вектора и угол между векторами находятся путем измерений: длина вектора с помощью линейки, а угол между векторами с помощью транспортира.

В высшей математике не принято опираться на результаты измерений, а все исходные понятия задаются аксиоматически. Сначала вводится определение линейного (векторного) пространства, включающее восемь аксиом, затем посредством еще четырех аксиом задается операция скалярного умножения векторов. И только после этого, на основе понятия скалярного произведения векторов, определяются длина вектора и угол между векторами. Выпишем эти определения.

Определение. *Скалярным квадратом* вектора $\mathbf{a}$ называется скалярное произведение вектора на себя: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$.

Отметим, что в евклидовом пространстве $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} > 0$ при $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

Определение. *Длина* (*модуль*) вектора $\mathbf{a}$, обозначаемая a или $|\mathbf{a}|$, есть квадратный корень из скалярного квадрата вектора:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,. \tag{3.12}$$

Определение. Вектор $\mathbf{a}$ называется *единичным*, если его длина равна единице: $|\mathbf{a}| = 1$ (по (3.12), это равносильно условию $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1$).

Определение. *Угол* φ между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \qquad \bigl(\cos\varphi \in [-1,\, 1],\;\; \varphi \in [0,\, \pi]\bigr). \tag{3.13}$$

Очевидно, что данное определение согласовано с формулой (1.1).

Определение. Ненулевые векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *перпендикулярными* или *ортогональными* (иногда *взаимно перпендикулярными* или *взаимно ортогональными*), если их скалярное произведение равно нулю: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

В соответствии с формулой (3.13) угол между параллельными (коллинеарными) векторами равен нулю или $\pi\,(= 180^\circ)$, а угол между перпендикулярными (ортогональными) векторами равен $\pi/2\,(= 90^\circ)$.

На основании приведенных определений можно сделать следующий вывод.

При преобразованиях пространства, реализуемых ортогональными тензорами, сохраняются длины векторов и углы между векторами, так как, согласно (3.12) и (3.13), эти величины определяются через скалярные произведения векторов, которые не меняются при действии ортогональных тензоров. Отсюда следует, в частности, что любой ортонормированный базис (то есть базис, состоящий из попарно ортогональных единичных векторов) преобразуется под действием ортогональных тензоров в ортонормированный базис.

Примеры тензоров

1. Тензоры (операторы) проецирования

Рассмотрим евклидово пространство. Зафиксируем в нем какую-либо прямую l с единичным направляющим вектором (ортом) $\mathbf{e}$ и образуем тензор (диаду) $P_l = \mathbf{ee}$. Умножим тензор P_l скалярно на произвольный вектор $\mathbf{u}$:

$$P_l \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{ee}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{u})\mathbf{e}, \tag{3.14}$$

где $\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}$ — скалярное произведение векторов (число); применено правило скалярного умножения диады на вектор (2.3). Обозначим: φ — угол между векторами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{u}$ ($\varphi \in [0, \pi]$, см. формулу (3.13)).

Спроецируем начало и конец вектора $\mathbf{u}$ на прямую l. Вектор $\mathbf{u}_l$, соединяющий проекцию начала вектора $\mathbf{u}$ с проекцией его конца, называется *проекцией вектора* $\mathbf{u}$ *на прямую* l или *составляющей вектора* $\mathbf{u}$ *вдоль* l (рис. 3). Наряду с символом $\mathbf{u}_l$ используется символ $\text{Пр}_l\mathbf{u}$.

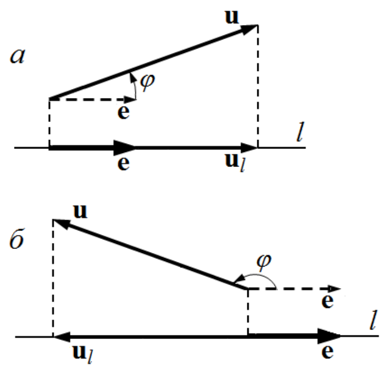


Рис. 3. Проецирование вектора $\mathbf{u}$ на прямую l: *а* — случай $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; *б* — случай $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Показана ситуация, когда вектор $\mathbf{u}$ и прямая l лежат в одной плоскости, однако приводимая далее формула (3.16), основанная на этом рисунке, верна и в том случае, когда $\mathbf{u}$ и l не лежат в одной плоскости, то есть когда прямая, содержащая вектор $\mathbf{u}$, и прямая l являются скрещивающимися.

На основании (1.1) с учетом единичности вектора $\mathbf{e}$ ($|\mathbf{e}| = 1$) имеем:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{u} \;=\; |\mathbf{e}||\mathbf{u}| \cos\varphi \;=\; |\mathbf{u}| \cos\varphi; \tag{3.15}$$

из свойств косинуса вытекает, что $\mathbf{e} \cdot \mathbf{u} > 0$ при угле φ остром, $\mathbf{e} \cdot \mathbf{u} < 0$ при угле φ тупом и $\mathbf{e} \cdot \mathbf{u} = 0$ при $\varphi = \pi/2$.

С помощью рис. 3 можно заключить, что

$$\mathbf{u}_l \;=\; |\mathbf{u}| \cos\varphi\, \mathbf{e}. \tag{3.16}$$

Из (3.14) – (3.16) находим:

$$P_l \cdot \mathbf{u} \;=\; (\mathbf{e} \cdot \mathbf{u})\mathbf{e} \;=\; \mathbf{u}_l. \tag{3.17}$$

Таким образом, если l — прямая с направляющим ортом $\mathbf{e}$, то тензор (оператор) $P_l = \mathbf{e}\mathbf{e}$ преобразует любой вектор $\mathbf{u}$ в его проекцию $\mathbf{u}_l$ на прямую l. Поэтому тензор P_l называется *тензором* (*оператором*) *проецирования на прямую* l. Тензоры проецирования называют также *проекторами*.

Отметим, что проектор P_l — вырожденный тензор, так как он преобразует любой вектор, ортогональный вектору $\mathbf{e}$, в нулевой вектор (действительно, по (3.17), если $\mathbf{e} \cdot \mathbf{u} = 0$, то $P_l \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{u})\mathbf{e} = 0\mathbf{e} = \mathbf{0}$). Проектор P_l не является ортогональным тензором, потому что он не сохраняет длину преобразуемого вектора (при $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{e}$; это видно из (3.16) и рис. 3). Кроме того, проектор P_l не имеет обратного тензора, иначе говоря, он не является обратимым тензором; это объясняется отсутствием взаимной однозначности производимого им преобразования (рис. 4).

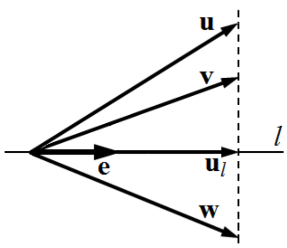


Рис. 4. Иллюстрация необратимости проектора $P_l = \mathbf{e}\mathbf{e}$.

Проектор P_l переводит векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ в один и тот же вектор $\mathbf{u}_l$, поэтому нет объективных оснований, позволяющих установить, в какой вектор должен перейти вектор $\mathbf{u}_l$ под действием обратного тензора; это обстоятельство делает невозможным введение обратного тензора.

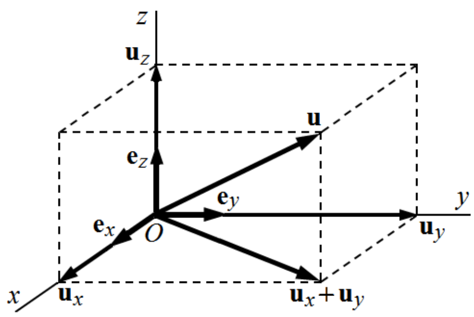
Теперь зададим в пространстве ортогональную декартову систему координат $Oxyz$ с началом в точке O (рис. 5). Пусть $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ — направляющие единичные векторы (орты) координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно; они образуют в пространстве ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, то есть удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1; \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0; \tag{3.18}$$

эти соотношения означают, что векторы $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ единичные и попарно ортогональные.

Рис. 5. Ортогональная декартова система координат $Oxyz$.

Вектор $\mathbf{u}$ разложен по базису $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$.



Обозначим: $P_x = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_x$, $P_y = \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y$, $P_z = \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$ — тензоры проецирования на координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно.

Построим тензор

$$E = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z = P_x + P_y + P_z. \tag{3.19}$$

Найдем скалярное произведение тензора E на произвольный вектор $\mathbf{u}$. Принимая во внимание (3.17), получаем:

$$E \cdot \mathbf{u} = P_x \cdot \mathbf{u} + P_y \cdot \mathbf{u} + P_z \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z = \mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ — составляющие вектора $\mathbf{u}$ вдоль координатных осей Ox, Oy и Oz (см. рис. 5). Отсюда $E \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$. В силу произвольности вектора $\mathbf{u}$, из этого равенства вытекает, что тензор E совпадает с единичным тензором I (см. (2.10)). С учетом (3.19) это означает, что единичный тензор может быть представлен в виде суммы трех диад:

$$I = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z. \tag{3.20}$$

Формулу (3.20) можно доказать также следующим способом.

Возьмем любой вектор $\mathbf{u}$ и разложим его по базису $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$:

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{e}_x + u_y\mathbf{e}_y + u_z\mathbf{e}_z, \tag{3.21}$$

где u_x, u_y, u_z — координаты вектора $\mathbf{u}$ в данном базисе ($u_x\mathbf{e}_x = \mathbf{u}_x$, $u_y\mathbf{e}_y = \mathbf{u}_y$, $u_z\mathbf{e}_z = \mathbf{u}_z$ — составляющие вектора $\mathbf{u}$, см. рис. 5). Подействуем на вектор $\mathbf{u}$ тензором (3.20). Принимая во внимание зависимости (3.18), (3.20) и (3.21), находим:

$$I \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) \cdot (u_x\mathbf{e}_x + u_y\mathbf{e}_y + u_z\mathbf{e}_z) = u_x\mathbf{e}_x + u_y\mathbf{e}_y + u_z\mathbf{e}_z = \mathbf{u},$$

откуда следует, что тензор I вида (3.20) действительно единичный.

Введем тензор

$$P_{xy} = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y = P_x + P_y. \tag{3.22}$$

Подействуем этим тензором на вектор $\mathbf{u}$:

$$P_{xy}\cdot\mathbf{u} = (P_x + P_y)\cdot\mathbf{u} = P_x\cdot\mathbf{u} + P_y\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y.$$

Поскольку сумма векторов $\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y$ есть проекция вектора $\mathbf{u}$ на координатную плоскость Oxy (см. рис. 5), то тензор P_{xy} представляет собой *тензор* (*оператор*) *проецирования на плоскость* Oxy.

Из (3.20) и (3.22) получаем:

$$P_{xy} = I - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z. \tag{3.23}$$

Назовем скалярное произведение тензора на себя *квадратом* тензора. Вычислим квадрат тензора $P_l = \mathbf{e}\mathbf{e}$, проецирующего векторы на прямую l с направляющим ортом $\mathbf{e}$, и квадрат тензора P_{xy}, проецирующего векторы на плоскость Oxy. Учитывая формулу (3.23), свойства единичного тензора I и единичность векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_z$, находим:

$$P_l^2 = P_l\cdot P_l = (\mathbf{e}\mathbf{e})\cdot(\mathbf{e}\mathbf{e}) = \mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e} = \mathbf{e}\mathbf{e} = P_l;$$

$$\begin{aligned} P_{xy}^2 &= P_{xy}\cdot P_{xy} = (I - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z)\cdot(I - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) = \\ &= I\cdot I - I\cdot\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\cdot I + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z = I - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z = P_{xy}, \end{aligned}$$

откуда $P_l^2 = P_l$ и $P_{xy}^2 = P_{xy}$. Данные равенства выражают характерное свойство проекторов, состоящее в том, что повторное проецирование не меняет результат. Например, из рассмотрения рис. 3 можно заключить, что если сначала спроецировать вектор $\mathbf{u}$ на прямую l и затем полученный вектор $\mathbf{u}_l$ спроецировать на эту же прямую l, то вновь получится вектор $\mathbf{u}_l$.

Задача. Пусть Π — плоскость; L_1 и L_2 — две взаимно ортогональные прямые в Π с единичными направляющими векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$); $P_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$ и $P_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$ — тензоры (операторы) проецирования векторов, лежащих в Π, на прямые L_1 и L_2. Обозначим через $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ операторы, определяемые тензорами P_1 и P_2 с помощью закона (3.8): $\mathcal{P}_i(\mathbf{u}) = P_i\cdot\mathbf{u}$ (где $i = 1, 2$; $\mathbf{u}$ — произвольный вектор, лежащий в Π). Операторы $\mathcal{P}_i$ называются так же, как P_i, операторами проецирования.

Доказать, что

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{I}; \qquad \mathcal{P}_1\circ\mathcal{P}_2 = \mathcal{O},$$

где $\mathcal{I}$ — тождественный оператор; $\mathcal{O}$ — нулевой оператор.

2. Тензоры (операторы) преобразования ортонормированных базисов

Зададим в евклидовом пространстве два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. Векторы этих базисов удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}; \quad \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1,\, 2,\, 3), \tag{3.24}$$

где δ_{ij} — *символ Кронекера*, определяемый выражением

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1,\, 2,\, 3). \tag{3.25}$$

Следующая теорема устанавливает вид тензора (оператора), преобразующего векторы первого базиса в векторы второго базиса.

Теорема 3.3. *Тензор, который преобразует ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в ортонормированный базис $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ с сохранением нумерации векторов, имеет вид*

$$A = \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3 \tag{3.26}$$

и является ортогональным тензором.

Доказательство. Подействуем тензором A, задаваемым формулой (3.26), на базисный вектор $\mathbf{e}_1$. С учетом (3.24) и (3.25) получаем:

$$A \cdot \mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}'_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}'_3(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}'_1,$$

откуда $A \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1$. Подобным образом находим: $A \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_2$ и $A \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_3$. Три полученные равенства означают, что тензор A действительно преобразует базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в базис $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ с сохранением нумерации векторов.

Покажем, что тензор A ортогональный. По доказанному, тензор

$$B = \mathbf{e}_1\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}'_3$$

преобразует базис $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ в базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. С помощью (3.20) и (3.24) – (3.26) нетрудно убедиться в том, что $A \cdot B = B \cdot A = I$. По определению обратного тензора, это означает, что B — тензор, обратный к A (то есть $B = A^{-1}$), поэтому $A^{-1} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}'_3$. Сравнивая это значение тензора A^{-1} со значением (3.26) тензора A, получаем равенство $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, где A^{T} — тензор, транспонированный к A. Согласно теореме 3.2, данное равенство служит критерием ортогональности тензора, следовательно, тензор A ортогональный. ■

Глава 2

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕНЗОРОВ

Тензор, как и вектор, не зависит от используемых базисов и систем координат. Вместе с тем, при решении задач с участием тензоров плодотворным оказывается координатный метод. Он заключается в том, что операции с тензорами заменяются операциями с матрицами, состоящими из координат тензоров относительно определенного базиса.

1. Разложение тензора по базису

Далее рассматривается трехмерное евклидово пространство с заданным в нем ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, который будем обозначать $\{\mathbf{e}_i\}$. Векторы этого базиса удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1,\, 2,\, 3), \tag{1.1}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, определяемый формулой (3.25) главы 1.

Возьмем простейший тензор — диаду $\mathbf{ab}$. Разложим в ней векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по базису $\{\mathbf{e}_i\}$ и в полученном произведении раскроем скобки:

$$\begin{aligned}
\mathbf{ab} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) = \\
&= a_1b_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_1b_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_1b_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \\
&\quad + a_2b_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + a_2b_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + a_2b_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \\
&\quad + a_3b_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + a_3b_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + a_3b_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_ib_j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где a_i и b_j — координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ $(i, j = 1,\, 2,\, 3)$.

Из (1.2) видно, что любая диада может быть представлена в виде линейной комбинации диад $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, составленных из векторов базиса $\{\mathbf{e}_i\}$. Поскольку индексы i и j принимают значения от 1 до 3, то всего имеется $3^2 = 9$ таких диад.

Теперь возьмем произвольный тензор A (второго ранга). Так как он является линейной комбинацией диад, то, произведя преобразование каждой диады, аналогичное произведенному выше, найдем, что тензор A может быть записан в форме

$$A = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \tag{1.3}$$

где a_{ij} — некоторые числа.

На основании (1.3) заключаем, что всякий тензор может быть представлен в виде линейной комбинации диад $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$. Отсюда и из того, что диады $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, как можно доказать, являются линейно независимыми, следует, что они образуют базис в пространстве тензоров. Этот базис называется *диадным* или *тензорным* базисом и обозначается $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$. В соответствии со сказанным ранее, он состоит из 9 диад.

Выражение (1.3) называется *разложением тензора A по диадному* (*тензорному*) *базису* $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$. Величины a_{ij} именуются *компонентами* или *координатами* тензора A в базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$ (или относительно базиса $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$). Квадратная матрица

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

состоящая из компонент тензора, входящих в формулу (1.3), называется *матрицей тензора в базисе* $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$ или просто *матрицей тензора*, если ясно, о каком базисе идет речь.

В литературе по физике и механике применяется следующее соглашение, введенное А. Эйнштейном.

Соглашение о суммировании. Если некоторая величина или произведение величин содержит два одинаковых индекса, то подразумевается, что по этому индексу производится суммирование в пределах от 1 до n, где n — размерность рассматриваемого векторного пространства. Такой индекс называется *индексом суммирования* или *немым индексом*.

При использовании соглашения о суммировании разложение вектора $\mathbf{a}$, диады $\mathbf{ab}$ и тензора A по векторному $\{\mathbf{e}_i\}$ и диадному $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$

базисам становится более компактным, благодаря отсутствию знаков суммирования:

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{ab} = a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j; \quad A = a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j;$$

ср. с формулами (1.2) и (1.3).

Примечания:

а) замена символа, являющегося индексом суммирования, любым другим символом не меняет выражения; например, $x_j \mathbf{e}_j$ и $x_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ есть одно и то же выражение, равное $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ $(= \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i)$;

б) при подстановке формулы, содержащей индексы, в другую формулу с индексами необходимо следить за тем, чтобы индексы, относящиеся к разным величинам, обозначались в этих формулах разными символами; если же обозначения индексов совпадают, то нужно заменить в одной из формул их обозначение другим символом; например, если требуется подставить в формулу $u_i = A_{ij} v_j$ значение величины v_j, задаваемое формулой $v_j = B_{ji} w_i$, то перед подстановкой нужно заменить во второй формуле индекс i, присутствующий и в первой формуле, другим символом, к примеру, буквой k: $v_j = B_{jk} w_k$; результатом подстановки будет выражение $u_i = A_{ij} B_{jk} w_k$, в котором производится суммирование по индексам j и k;

в) формулы (1.3) и (1.4), задающие разложение тензора по базису и матрицу тензора, верны для тензора, определенного над любым векторным пространством с любым введенным в нем базисом, а не только над трехмерным евклидовым пространством с ортонормированным базисом (если пространство n-мерное, то суммирование в формуле (1.3) производится в пределах от 1 до n, а матрица компонент тензора является квадратной порядка n);

г) пусть $\mathcal{A}$ — оператор, связанный с тензором A законом (3.8) из главы 1: $\mathcal{A}(\mathbf{u}) = A \cdot \mathbf{u}$ ($\mathbf{u}$ — произвольный вектор); известно, что матрица оператора, которая вводится в теории операторов, совпадает с матрицей тензора только при разложении тензора по диадному базису $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*\}$, где $\{\mathbf{e}_j^*\}$ — базис, взаимный к базису $\{\mathbf{e}_i\}$ (он определяется формулой $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^* = \delta_{ij}$); поскольку мы рассматриваем евклидово пространство с заданным в нем ортонормированным базисом, а в таком пространстве ортонормированный базис является взаимным к самому себе, то в нашем случае *матрица оператора* $\mathcal{A}$ *совпадает с матрицей тензора* A.

Способы составления матрицы тензора

1-й способ. Этот способ заключается в том, что во всех диадах, входящих в состав тензора, оба вектора раскладываются по базису $\{\mathbf{e}_i\}$, в полученном произведении раскрываются скобки и далее слагаемые, содержащие одинаковые диады $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, объединяются. Результатом является разложение тензора по диадному базису $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$. Из коэффициентов этого разложения составляется матрица тензора.

Именно таким способом получены формулы (1.3) и (1.4), определяющие разложение тензора по базису и матрицу тензора. Отметим, что этот способ составления матрицы тензора может быть применен для любого векторного пространства и любого базиса.

Пример. Составить матрицу тензора

$$A = 2\mathbf{ab} - 6\mathbf{cd}, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$; $\mathbf{b} = 5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$; $\mathbf{c} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$; $\mathbf{d} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$; $\{\mathbf{e}_i\}$ — базис.

Решение. Подставим указанные значения векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ в формулу (1.5), затем раскроем скобки и объединим слагаемые, содержащие одинаковые диады:

$$\begin{aligned} A = {} & 2(3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2)(5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - 6(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = \\ = {} & 30\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + 40\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - 8\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \\ & + 6\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - 6\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \\ = {} & 36\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \\ & + 40\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - 8\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \\ & - 6\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Отсюда находим матрицу тензора A в диадном базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 36 & -6 & 6 \\ 40 & -8 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

2-й способ. Этот способ базируется на следующей теореме.

Теорема 1.1. *Тензор 2-го ранга однозначно определяется своим действием на базисные векторы.*

Доказательство. Пусть A и B — два тензора 2-го ранга, одинаково действующие на векторы базиса $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$A \cdot \mathbf{e}_i = B \cdot \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.7}$$

Разложим произвольный вектор $\mathbf{u}$ по базису $\{\mathbf{e}_i\}$ ($\mathbf{u} = u_i\mathbf{e}_i$) и подействуем на него тензорами A и B:

$$A \cdot \mathbf{u} = A \cdot u_i\mathbf{e}_i = u_i(A \cdot \mathbf{e}_i);$$
$$B \cdot \mathbf{u} = B \cdot u_i\mathbf{e}_i = u_i(B \cdot \mathbf{e}_i);$$

здесь применено соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Отсюда и из (1.7) находим: $A\cdot\mathbf{u} = B\cdot\mathbf{u}$, поэтому $(A-B)\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Вследствие произвольности вектора $\mathbf{u}$ и невырожденности операции скалярного умножения, из последнего равенства вытекает $A - B = \hat{0}$, откуда $A = B$. Так как A и B — тензоры, одинаково преобразующие базисные векторы, то их равенство означает, что действительно тензор однозначно определяется своим действием на базисные векторы. ■

Отметим, что в доказательстве теоремы 1.1 не использована ортонормированность базиса, поэтому теорема верна для любого базиса. Из теории линейных операторов известно, что операторы так же, как тензоры, однозначно определяются своим действием на базисные векторы.

Теперь изложим второй способ составления матрицы тензора.

Пусть $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормированный базис; A — произвольный тензор. Подействуем тензором A на базисные векторы $\mathbf{e}_i$, обозначив образы этих векторов теми же символами, но со штрихами:

$$\mathbf{e}'_1 = A \cdot \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}'_2 = A \cdot \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}'_3 = A \cdot \mathbf{e}_3. \tag{1.8}$$

Покажем, что тензор $\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3$ тоже переводит векторы $\mathbf{e}_i$ в векторы $\mathbf{e}'_i$. Действительно, пользуясь ортонормированностью базиса, то есть соотношениями (1.1), имеем:

$$(\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1+\mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_1(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_i)+\mathbf{e}'_2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_i)+\mathbf{e}'_3(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.9}$$

На основании (1.8), (1.9) и теоремы 1.1 заключаем, что тензоры A и $\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3$ тождественны:

$$A = \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_j\mathbf{e}_j. \tag{1.10}$$

Разложим векторы $\mathbf{e}'_j$ по базису $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{e}'_j = e'_{j1}\mathbf{e}_1 + e'_{j2}\mathbf{e}_2 + e'_{j3}\mathbf{e}_3 = e'_{ji}\mathbf{e}_i, \tag{1.11}$$

где $e'_{j1}, e'_{j2}, e'_{j3}$ — координаты вектора $\mathbf{e}'_j$ в этом базисе ($j = 1, 2, 3$).

Подставим разложение (1.11) в формулу (1.10):

$$A = \mathbf{e}'_j\mathbf{e}_j = e'_{ji}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j.$$

Отсюда, по аналогии с (1.3) и (1.4), получаем матрицу тензора A:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} e'_{11} & e'_{21} & e'_{31} \\ e'_{12} & e'_{22} & e'_{32} \\ e'_{13} & e'_{23} & e'_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Из (1.11) видно, что первый индекс при величине e'_{ji} есть номер вектора $\mathbf{e}'_j$, являющегося образом базисного вектора $\mathbf{e}_j$ при действии тензора A, а второй индекс — номер координаты вектора $\mathbf{e}'_j$ при разложении его по базису $\{\mathbf{e}_i\}$. Поэтому из (1.12) следует, что столбцы матрицы (a_{ij}) представляют собой столбцы координат образов базисных векторов.

Итак, второй способ составления матрицы тензора заключается в том, что нужно записать рядом столбцы координат векторов, являющихся образами базисных векторов при действии рассматриваемого тензора. Совокупность этих столбцов и образует матрицу тензора.

Отметим, что из сравнения выражений (1.4) и (1.12) вытекает, что элемент a_{ij} матрицы тензора A, имеющий индексы ij, равен величине e'_{ji}, имеющей индексы ji.

Примечания:

– второй способ составления матрицы тензора не столь универсален, как первый, ибо он годится только в случае ортонормированного базиса; ограниченность этого способа можно продемонстрировать на примере единичного тензора I: векторы любого базиса имеют при разложении по этому же базису столбцы координат $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, а так как единичный тензор не меняет векторы, то образы базисных векторов имеют эти же столбцы координат, поэтому при записывании их рядом они составят единичную матрицу при любом базисе, однако в случае косоугольного базиса матрица единичного тензора I не является единичной, а представляет собой матрицу Грама, которая состоит из попарных скалярных произведений векторов взаимного базиса;

– если тензор A ортогональный, а базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ортонормированный, то порождаемая этим тензором совокупность векторов $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ тоже является ортонормированным базисом, потому что ортогональный тензор сохраняет длины векторов и углы между векторами (эта ситуация описывается теоремой 3.3 из главы 1, ср. формулу (3.26) из этой теоремы с формулой (1.10) из данной главы); если тензор A не ортогональный, но при этом не является вырожденным, то он преобразует ортонормированный базис в неортонормированный базис, если же тензор A вырожденный, то порождаемая им совокупность векторов $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ не образует базиса.

Пример 1. Пусть $Oxyz$ — ортогональная система координат с ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Найти тензор $R_z(\varphi)$, который поворачивает векторы на угол φ вокруг координатной оси Oz с направляющим ортом $\mathbf{e}_3$, и матрицу этого тензора в диадном базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$.

Решение. Согласно теореме 1.1, тензор однозначно определяется своим действием на базисные векторы, поэтому рассмотрим поворот базисных векторов $\mathbf{e}_i$, реализуемый тензором $R_z(\varphi)$ (рис. 6).

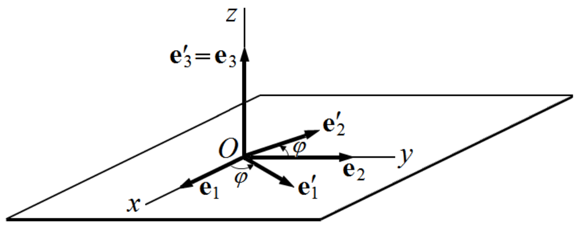


Рис. 6. Поворот базисных векторов вокруг оси Oz. $\mathbf{e}'_i$ — векторы базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ в повернутом положении; угол поворота φ возрастает в направлении, показанном дуговой стрелкой.

Изобразим координатную плоскость Oxy (рис. 7).

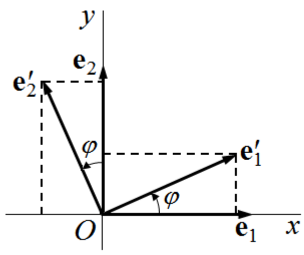


Рис. 7. Координатная плоскость Oxy.

С помощью рис. 6 и 7 находим разложение векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ и $\mathbf{e}'_3$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \cos\varphi\, \mathbf{e}_1 + \sin\varphi\, \mathbf{e}_2; \\ \mathbf{e}'_2 &= -\sin\varphi\, \mathbf{e}_1 + \cos\varphi\, \mathbf{e}_2; \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Отметим, что $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ — ортонормированный базис (в этом нетрудно убедиться путем проверки выполнения соотношений вида (1.1) для векторов $\mathbf{e}'_i$).

Из (1.13) вытекает, что столбцы координат векторов $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ и $\mathbf{e}_3'$ есть соответственно

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Составляя из этих столбцов матрицу, получаем искомую матрицу тензора поворота $R_z(\varphi)$ в диадном базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Отсюда следует, что сам тензор $R_z(\varphi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} R_z(\varphi) \, = \, &\cos\varphi\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \sin\varphi\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \\ &+ \sin\varphi\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3; \end{aligned} \tag{1.16}$$

решение примера завершено.

Тензор $R_z(\varphi)$, по своему определению, преобразует базисные векторы $\mathbf{e}_i$ в векторы $\mathbf{e}_i'$:

$$\mathbf{e}_1' \, = \, R_z(\varphi)\cdot\mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_2' \, = \, R_z(\varphi)\cdot\mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}_3' \, = \, R_z(\varphi)\cdot\mathbf{e}_3. \tag{1.17}$$

Справедливость равенств (1.17) может быть проверена двумя способами:

а) посредством умножения матрицы (1.15) на столбцы координат базисных векторов $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ и сравнения полученных столбцов со столбцами (1.14);

б) путем скалярного умножения обеих частей равенства (1.16) на базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ (с использованием (1.1)) и сравнения полученного результата с равенствами (1.13).

Аналогичными способами можно проверить, что тензор $R_z(\varphi)$ действительно поворачивает все векторы вокруг координатной оси Oz на угол φ. При этом повернутый вектор имеет координаты относительно базиса $\{\mathbf{e}_i'\}$ такие же, какие исходный вектор имеет относительно базиса $\{\mathbf{e}_i\}$; в самом деле, действуя тензором $R_z(\varphi)$ на вектор $\mathbf{u} = u_i\mathbf{e}_i$ и пользуясь линейностью преобразования и равенствами (1.17), находим:

$$\mathbf{u}' = R_z(\varphi)\cdot\mathbf{u} \, = \, R_z(\varphi)\cdot(u_i\mathbf{e}_i) \, = \, u_i(R_z(\varphi)\cdot\mathbf{e}_i) \, = \, u_i\mathbf{e}_i',$$

откуда вытекает, что величины u_i являются не только координатами вектора $\mathbf{u}$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$, но и координатами вектора $\mathbf{u}'$ в базисе $\{\mathbf{e}_i'\}$.

Оператор $\mathcal{R}_z(\varphi)$, порождаемый тензором $R_z(\varphi)$ с помощью закона $\mathcal{R}_z(\varphi)(\mathbf{u}) = R_z(\varphi)\cdot\mathbf{u}$ (где $\mathbf{u}$ — произвольный вектор), имеет ту же матрицу (1.15), что и тензор $R_z(\varphi)$, и называется, подобно тензору $R_z(\varphi)$, оператором поворота векторов вокруг оси Oz на угол φ.

Пример 2. Найти тензор $F_z(\eta)$, который осуществляет растяжение векторов вдоль оси Oz в η раз ($\eta > 0$), и его матрицу в базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$.

Пояснение. При таком преобразовании проекции всех векторов на ось Oz увеличиваются в η раз. Так, вектор $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, имеющий столбец координат $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, преобразуется в вектор $\mathbf{a}' = F_z(\eta)\cdot\mathbf{a} = \mathbf{e}_2 + \eta\mathbf{e}_3$ со столбцом координат $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\\eta\end{smallmatrix}\right)$ (рис. 8).

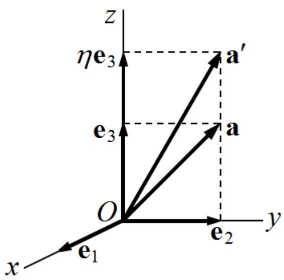


Рис. 8. Растяжение вектора $\mathbf{a}$ вдоль оси Oz в η раз.

Решение. Базисные орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, имеющие столбцы координат $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, преобразуются тензором $F_z(\eta)$ в векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ со столбцами координат $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\\eta\end{smallmatrix}\right)$. Объединяя эти столбцы в единую матрицу, получаем матрицу тензора $F_z(\eta)$ в диадном базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1+\varepsilon\end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

где $\eta = 1+\varepsilon$; ε — величина относительного удлинения любого вектора $\mathbf{c} = c\mathbf{e}_3$, параллельного оси Oz:

$$\varepsilon = \frac{|F_z(\eta)\cdot\mathbf{c}| - |\mathbf{c}|}{|\mathbf{c}|} = \frac{|F_z(\eta)\cdot c\mathbf{e}_3| - |c\mathbf{e}_3|}{|c\mathbf{e}_3|} = \frac{\eta|c| - |c|}{|c|} = \eta - 1.$$

Из (1.18) вытекает, что тензор $F_z(\eta)$ имеет вид

$$F_z(\eta) = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \eta\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + (1+\varepsilon)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3; \tag{1.19}$$

решение примера закончено.

Продемонстрируем, что найденный тензор $F_z(\eta)$ действительно преобразует упомянутый выше вектор $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ в вектор $\mathbf{a}' = \mathbf{e}_2 + \eta\mathbf{e}_3$. Из (1.19) с учетом условия ортонормированности базиса (1.1) находим:

$$F_z(\eta) \cdot \mathbf{a} \;=\; (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \eta\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \;=\; \mathbf{e}_2 + \eta\mathbf{e}_3 \;=\; \mathbf{a}',$$

как и должно быть (см. рис. 8).

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть $Oxyz$ — ортогональная система координат в трехмерном евклидовом пространстве; $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированный базис этой системы координат. Поставим в соответствие каждому тензору его матрицу в диадном базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$. Тогда между множеством тензоров и множеством их матриц установится такое взаимно однозначное соответствие, при котором:*

– сумме (разности) тензоров соответствует сумма (разность) их матриц;

– произведению тензора на число соответствует произведение его матрицы на это же число;

– единичному тензору I соответствует единичная матрица;

– нулевому тензору $\hat{0}$ соответствует нулевая матрица;

– скалярному произведению тензоров соответствует произведение их матриц;

– скалярному произведению тензора на вектор соответствует произведение его матрицы на столбец координат вектора;

– скалярному произведению вектора на тензор соответствует произведение строки координат вектора на матрицу тензора;

– обратному тензору (если он существует) соответствует обратная матрица;

– транспонированному тензору соответствует транспонированная матрица;

– симметричному (антисимметричному) тензору соответствует симметричная (антисимметричная) матрица;

– ортогональному тензору соответствует ортогональная матрица;

– след тензора равен следу его матрицы.

Определение. *Определителем* или *детерминантом* тензора называется определитель его матрицы в диадном базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$, где $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормированный базис евклидова пространства.

Теорема 1.2 и введенное определение детерминанта тензора, позволяют заменить действия с тензорами аналогичными действиями с их матрицами. С учетом теоремы 3.1 из главы 1 (с. 15) это означает, что линейные операторы, тензоры второго ранга и их матрицы могут использоваться при решении задач как равноправные математические объекты.

Внимание! *Указанное равноправие операторов, тензоров и матриц имеет место только при условии, что рассматриваемое пространство евклидово и базис в нем ортонормированный.* Если это условие не выполняется, то матрица тензора будет совпадать с матрицей оператора, как было отмечено ранее, лишь при разложении тензора по диадному базису $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^*\}$, где $\{\mathbf{e}_j^*\}$ — базис, взаимный к базису $\{\mathbf{e}_i\}$ (он определяется формулой $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^* = \delta_{ij}$). Однако при использовании базиса $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^*\}$ некоторые утверждения теоремы 1.2 могут оказаться неверными, например, симметричному тензору может соответствовать несимметричная матрица.

Задача. Пусть $Oxyz$ — ортогональная система координат в трехмерном евклидовом пространстве; $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортонормированный базис этой системы координат; $R_x(\varphi)$ — тензор поворота векторов вокруг оси Ox на угол φ; $R_y(\psi)$ — тензор поворота векторов вокруг оси Oy на угол ψ; $\mathcal{R}_x(\varphi)$ и $\mathcal{R}_y(\psi)$ — операторы поворота, порождаемые тензорами $R_x(\varphi)$ и $R_y(\psi)$ с помощью законов $\mathcal{R}_x(\varphi)(\mathbf{u}) = R_x(\varphi)\cdot\mathbf{u}$ и $\mathcal{R}_y(\psi)(\mathbf{u}) = R_y(\psi)\cdot\mathbf{u}$ (где $\mathbf{u}$ — произвольный вектор).

а) Составить матрицы тензоров $R_x(\varphi)$ и $R_y(\psi)$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$.

б) Обозначим: $\mathcal{R}_x(90^\circ)$ и $\mathcal{R}_y(90^\circ)$ — операторы $\mathcal{R}_x(\varphi)$ и $\mathcal{R}_y(\psi)$ при углах поворота $\varphi = 90^\circ$ и $\psi = 90^\circ$. Найти матрицы операторов $\mathcal{R}_x(90^\circ)$ и $\mathcal{R}_y(90^\circ)$.

в) Найти матрицы операторов $\mathcal{R}_x(90^\circ)\circ\mathcal{R}_y(90^\circ)$ и $\mathcal{R}_y(90^\circ)\circ\mathcal{R}_x(90^\circ)$, где $\circ$ — знак композиции операторов; убедиться в том, что операторы $\mathcal{R}_x(90^\circ)$ и $\mathcal{R}_y(90^\circ)$ не коммутируют.

Отметим, что некоммутативность операторов поворота отражает известный опытный факт, согласно которому результат двух последовательных поворотов тела вокруг двух пересекающихся осей зависит от порядка выполнения поворотов.

2. Правило замены векторов в тензоре

При решении задач иногда возникает необходимость заменить в тензоре векторы, входящие в его состав, другими векторами. Такая замена осуществляется по следующему правилу.

Правило замены векторов в тензоре. *Для того, чтобы заменить векторы, образующие тензор, другими векторами, нужно выразить заменяемые векторы через новые и подставить эти их значения в тензор.*

Отметим, что это правило фактически уже было использовано в цепочке равенств (1.2), когда в диаду $\mathbf{ab}$ были подставлены разложения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по базису $\{\mathbf{e}_i\}$. В результате было получено разложение диады по тензорному базису $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$: $\mathbf{ab} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$.

Приведем еще один пример. Пусть требуется заменить в тензоре

$$A = \alpha\mathbf{ax} + \beta\mathbf{by}$$

векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ векторами

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = -\mathbf{b} + \mathbf{w}.$$

Для этого нужно выразить векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{u} - \mathbf{y}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{w} - \mathbf{v},$$

и затем подставить эти значения векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ в тензор:

$$A = \alpha\mathbf{ax} + \beta\mathbf{by} = \alpha\mathbf{a}(2\mathbf{u}-\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{w}-\mathbf{v})\mathbf{y} = 2\alpha\mathbf{au} - \alpha\mathbf{ay} + \beta\mathbf{wy} - \beta\mathbf{vy},$$

откуда

$$A = 2\alpha\mathbf{au} - \alpha\mathbf{ay} + \beta\mathbf{wy} - \beta\mathbf{vy}.$$

Правильность полученного выражения может быть проверена путем подстановки в него приведенных выше значений векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Произведя такую подстановку, получаем для тензора A исходное значение $\alpha\mathbf{ax} + \beta\mathbf{by}$.

Подчеркнем, что при замене векторов в тензоре сам тензор остается неизменным. Меняется только форма его записи. Простейшая аналогия: число 5 можно представить как в виде $5 = 2 + 3$, так и в виде $5 = 1 + 4$. При этом само число 5, разумеется, остается тем же самым. Так же и тензор не меняется при замене составляющих его векторов равными им комбинациями других векторов.

Тензор не зависит от выбора базиса, однако его компоненты и вместе с ними матрица тензора зависят от базиса, по которому раскладывается тензор. Покажем, как меняется матрица тензора при замене ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ другим ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$.

Далее будем называть векторный и диадный базисы $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$ старыми, а базисы $\{\mathbf{e}'_i\}$ и $\{\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j\}$ новыми. Матрицу тензора будем обозначать тем же символом, что и тензор, но с волной над символом (этот знак называется тильдой), например, A — тензор, $\widetilde{A}$ — его матрица.

Возьмем произвольный тензор F. Разложим его по старому $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$ и новому $\{\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j\}$ диадным базисам:

$$F = f_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = f'_{kl}\mathbf{e}'_k\mathbf{e}'_l, \tag{2.1}$$

где f_{ij} и f'_{kl} — компоненты тензора в старом и новом базисах; использовано соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Разложим векторы $\mathbf{e}'_j$ по базису $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{e}'_j = e'_{j1}\mathbf{e}_1 + e'_{j2}\mathbf{e}_2 + e'_{j3}\mathbf{e}_3 = e'_{ji}\mathbf{e}_i, \tag{2.2}$$

где $e'_{j1}, e'_{j2}, e'_{j3}$ — координаты вектора $\mathbf{e}'_j$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ $(j = 1, 2, 3)$.

Пусть A — тензор, преобразующий старый базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в новый $\{\mathbf{e}'_i\}$:

$$\mathbf{e}'_1 = A\cdot\mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}'_2 = A\cdot\mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}'_3 = A\cdot\mathbf{e}_3. \tag{2.3}$$

Равенства (2.3) совпадают с равенствами (1.8), поэтому, согласно доказанному в разд. 1, матрица тензора A в базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$ есть матрица (1.12):

$$\widetilde{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} e'_{11} & e'_{21} & e'_{31} \\ e'_{12} & e'_{22} & e'_{32} \\ e'_{13} & e'_{23} & e'_{33} \end{pmatrix}; \tag{2.4}$$

эта матрица образована столбцами координат векторов $\mathbf{e}'_j$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ (см. (2.2)). Сам тензор A имеет вид

$$A = a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad \text{где } a_{ij} = e'_{ji} \ (i, j = 1, 2, 3). \tag{2.5}$$

Подставим в (2.1) значения векторов $\mathbf{e}'_i$ из (2.3), затем внесем в полученное выражение значение тензора A из (2.5) (изменив обозначения немых индексов в соответствии с примечаниями *а* и *б* на с. 26) и далее воспользуемся условием ортонормированности базиса (1.1) и свойствами символа Кронекера δ_{ij}:

$$\begin{aligned} F &= f_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = f'_{kl}(A\cdot\mathbf{e}_k)(A\cdot\mathbf{e}_l) = f'_{kl}(a_{im}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_m\cdot\mathbf{e}_k)(a_{jn}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_l) = \\ &= f'_{kl}(a_{im}\mathbf{e}_i\delta_{mk})(a_{jn}\mathbf{e}_j\delta_{nl}) = f'_{kl}(a_{ik}\mathbf{e}_i)(a_{jl}\mathbf{e}_j) = f'_{kl}a_{ik}a_{jl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Из (2.6) находим:

$$F = f_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = f'_{kl}a_{ik}a_{jl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$

откуда, в силу единственности разложения тензора по базису, имеем:

$$f_{ij} = f'_{kl}a_{ik}a_{jl}. \tag{2.7}$$

Пусть A^{T} — тензор, транспонированный к тензору A. По теореме 1.2, его матрица $\widetilde{A^{\mathrm{T}}}$ является матрицей, транспонированной к матрице $\widetilde{A}$ тензора A. Значит, $a^{\mathrm{T}}_{ij} = a_{ji}$, где a^{T}_{ij} и a_{ji} — элементы матриц $\widetilde{A^{\mathrm{T}}}$ и $\widetilde{A}$. С учетом данного равенства преобразуем формулу (2.7) к виду

$$f_{ij} = a_{ik}f'_{kl}a^{\mathrm{T}}_{lj}.$$

Отсюда получаем матричное равенство

$$\widetilde{F} = \widetilde{A}\,\widetilde{F'}\widetilde{A^{\mathrm{T}}}, \tag{2.8}$$

где $\widetilde{F} = (f_{ij})$ и $\widetilde{F'} = (f'_{kl})$ — матрицы тензора F в старом и новом базисах; в правой части равенства (2.8) стоит произведение матриц.

Поскольку тензор A преобразует ортонормированный базис в ортонормированный, то, по теореме 3.3 из главы 1, он является ортогональным тензором. Критерием ортогональности тензора служит равенство (3.11) из главы 1:

$$A^{\mathrm{T}} = A^{-1},$$

где A^{-1} — тензор, обратный к A. Согласно теореме 1.2, аналогичное равенство выполняется для матриц:

$$\widetilde{A^{\mathrm{T}}} = \widetilde{A^{-1}}. \tag{2.9}$$

Умножая обе части равенства (2.8) слева на матрицу $\widetilde{A^{\mathrm{T}}}$ и справа на матрицу $\widetilde{A}$, получаем с учетом (2.9):

$$\widetilde{F'} = \widetilde{A^{\mathrm{T}}}\widetilde{F}\,\widetilde{A}. \tag{2.10}$$

Формулы (2.8) и (2.10) связывают между собой матрицы тензора F, относящиеся к старому $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$ и новому $\{\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j\}$ диадным базисам. С помощью равенства (2.9) можно записать эти формулы в виде

$$\widetilde{F} = \widetilde{A}\,\widetilde{F'}\widetilde{A^{-1}}; \qquad \widetilde{F'} = \widetilde{A^{-1}}\widetilde{F}\,\widetilde{A}. \tag{2.11}$$

Напомним, что, согласно (2.5) и (2.9), элементы матриц $\widetilde{A}$, $\widetilde{A^{-1}}$ и $\widetilde{A^{\mathrm{T}}}$ удовлетворяют равенствам

$$a_{ij} = e'_{ji}; \qquad a^{\mathrm{T}}_{ij} = a^{-1}_{ij} = e'_{ij}, \tag{2.12}$$

где e'_{ji} — координаты вектора $\mathbf{e}'_j$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ (см. (2.2)); $i, j = 1, 2, 3$.

П р и м е р. Пусть $Oxyz$ — ортогональная система координат с ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$; l — прямая, проходящая через начало координат O и имеющая направляющий вектор $\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$. Найти тензор $R_l(\varphi)$, поворачивающий векторы на угол φ вокруг прямой l, и матрицу этого тензора в диадном базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$ (рис. 9).

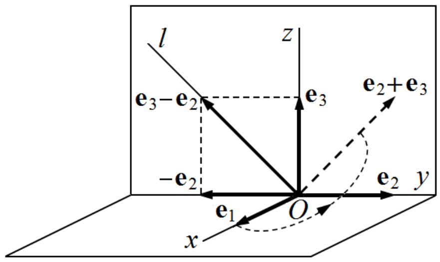


Рис. 9. Поворот векторов вокруг прямой l.

Штриховая дуга — траектория движения конца вектора $\mathbf{e}_1$; плоскость, в которой лежит дуга, перпендикулярна прямой l; стрелка на дуге показывает направление поворота.

Р е ш е н и е. Можно поступить так, как было сделано при решении примера 1 на с. 30. А именно найти векторы, в которые при повороте переходят базисные орты, и составить матрицу из столбцов координат этих векторов. Она и будет искомой матрицей тензора $R_l(\varphi)$. Однако определить координаты повернутых векторов непросто, потому что поворот происходит в плоскости, которая наклонена по отношению к координатным плоскостям. Поэтому поступим по-другому.

Введем векторы

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}'_2 = (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{2}; \quad \mathbf{e}'_3 = (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}; \tag{2.13}$$

эти векторы, как легко убедиться, удовлетворяют условию ортонормированности (1.1), значит, $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ — ортонормированный базис.

Поскольку $l \parallel (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2)$ и $\mathbf{e}'_3 \parallel (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2)$, то вектор $\mathbf{e}'_3$ является направляющим ортом оси поворота l. А так как $\mathbf{e}'_1 \perp \mathbf{e}'_3$ и $\mathbf{e}'_2 \perp \mathbf{e}'_3$, то поворот происходит в плоскости, содержащей векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$, и направлен от $\mathbf{e}'_1$ к $\mathbf{e}'_2$ (см. рис. 9). Такой поворот аналогичен рассмотренному ранее повороту векторов вокруг прямой Oz с ортом $\mathbf{e}_3$, который происходит в плоскости с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и направлен от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ (см. пример 1 на с. 30). Отсюда следует, что тензор $R_l(\varphi)$ имеет в базисе $\{\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j\}$ вид такой же, какой тензор $R_z(\varphi)$ имеет в базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$. Заменяя в формуле (1.16), задающей разложение тензора $R_z(\varphi)$ по базису $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$, нештрихованные векторы штрихованными, получаем разложение тензора $R_l(\varphi)$ по базису $\{\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j\}$:

$$\begin{aligned} R_l(\varphi) = {} & \cos\varphi\, \mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_1 - \sin\varphi\, \mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2 + \\ & + \sin\varphi\, \mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_1 + \cos\varphi\, \mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}'_3. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Обозначим матрицу тензора $R_l(\varphi)$ в базисе $\{\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j\}$ через $\widetilde{R_l(\varphi)}'$. Из разложения (2.14) вытекает:

$$\widetilde{R_l(\varphi)}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{2.15}$$

эта матрица совпадает с матрицей (1.15), являющейся матрицей тензора $R_z(\varphi)$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$.

Теперь найдем разложение тензора $R_l(\varphi)$ по базису $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$ и его матрицу в этом базисе. Сделаем это двумя способами.

<u>1-й способ</u>. Подставим в (2.14) значения векторов $\mathbf{e}'_i$ из (2.13):

$$\begin{aligned} R_l(\varphi) = {} & \cos\varphi\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) + \\ & + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 + \tfrac{1}{2}\cos\varphi\,(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) + \\ & + \tfrac{1}{2}(\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и объединяя слагаемые, содержащие одинаковые диады, находим:

$$\begin{aligned} R_l(\varphi) = {} & \cos\varphi\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \\ & + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \tfrac{1}{2}(1+\cos\varphi)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \tfrac{1}{2}(1-\cos\varphi)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \\ & + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - \tfrac{1}{2}(1-\cos\varphi)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \tfrac{1}{2}(1+\cos\varphi)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Формула (2.16) задает разложение тензора $R_l(\varphi)$ по базису $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$. На основании этой формулы заключаем, что матрица тензора $R_l(\varphi)$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$ есть

$$\widetilde{R_l(\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi & \frac{1}{2}(1+\cos\varphi) & -\frac{1}{2}(1-\cos\varphi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi & -\frac{1}{2}(1-\cos\varphi) & \frac{1}{2}(1+\cos\varphi) \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Отметим, что при $\varphi = 0$ тензор $R_l(\varphi)$ и его матрица $\widetilde{R_l(\varphi)}$ являются единичным тензором и единичной матрицей, как и должно быть.

<u>2-й способ</u>. Пусть A — тензор, преобразующий базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в базис $\{\mathbf{e}'_i\}$; $\widetilde{A}$ — его матрица в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$. Так как матрица $\widetilde{A}$ состоит из столбцов координат векторов $\mathbf{e}'_i$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$, то из (2.13) получаем:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Матрица $\widetilde{A^{\mathrm{T}}}$, транспонированная к матрице $\widetilde{A}$, равна:

$$\widetilde{A^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

С помощью формул (2.8), (2.15), (2.18) и (2.19) находим:

$$\widetilde{R_l(\varphi)} = \widetilde{A}\,\widetilde{R_l(\varphi)}'\widetilde{A^{\mathrm{T}}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, вновь получаем для матрицы $\widetilde{R_l(\varphi)}$ значение (2.17). Значит, тензор $R_l(\varphi)$ имеет вид (2.16). Пример решен.

Задача. В условиях рассмотренного выше примера введем прямую l_1 с направляющим вектором $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, проходящую через начало координат O (см. рис. 9). Найти тензор $R_{l_1}(\psi)$, который поворачивает векторы на угол ψ вокруг прямой l_1, и матрицу этого тензора в диадном базисе $\{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\}$ (поворот осуществляется в направлении от $\mathbf{e}_3'$ к $\mathbf{e}_1'$).

Активное и пассивное преобразования базиса

В разделах 1 и 2 настоящей главы использованы одинаковые формулы (1.8) и (2.3), задающие преобразование базисных векторов:

$$\mathbf{e}_1' = A\cdot\mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_2' = A\cdot\mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}_3' = A\cdot\mathbf{e}_3. \tag{2.20}$$

Однако эти формулы имеют в разделах 1 и 2 разный смысл.

В разд. 1 считается, что тензор A преобразует все векторы, поэтому все они меняют свои координаты относительно исходного базиса $\{\mathbf{e}_i\}$. (В этом утверждении неявно предполагается, что существуют как бы два экземпляра базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, векторы одного преобразуются в $\mathbf{e}_i'$, а векторы другого не изменяются и служат для определения координат преобразованных векторов и компонент тензора A.) Поскольку преобразуются все векторы, то такое преобразование называется *активным*. Если в этом случае векторы $\mathbf{e}_i'$ образуют базис, то говорится, что формулы (2.20) задают активное преобразование базиса.

Иная ситуация имеет место в разд. 2. Здесь все тензоры и векторы остаются неизменными, и ищется формула преобразования компонент тензора при замене одного базиса другим базисом. В этом случае тензор A всего лишь связывает между собой базисные векторы исходного и нового базисов. Так как сами векторы остаются неизменными, то такое преобразование называется *пассивным*. В этом случае можно сказать, что формулы (2.20) задают пассивное преобразование базиса.

Используемые в настоящей главе термины «поворот вектора» и «преобразование одного вектора в другой» отражают механическую трактовку исследуемой ситуации. Математика дает другую трактовку. А именно, считается, что тензор в роли оператора, как всякое отображение, просто ставит в соответствие одни векторы другим векторам. И никаких поворотов векторов, преобразований одних векторов в другие или вторых экземпляров векторов не существует.

Отметим, что в физической литературе зачастую применяется индексная форма записи тензоров, например, «диада $a_i b_j$» и «тензор f_{ij}» вместо строгого написания «диада $a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$» и «тензор $f_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$» (использовано соглашение о суммировании по повторяющимся индексам). Следует помнить, что такая форма записи тензоров может приводить к неточностям, особенно в случаях, когда пространство псевдоевклидово или базис не ортонормированный.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тензоры играют важную роль в механике и физике. Многие характеристики материальных объектов описываются посредством тензоров. К ним относятся деформация и напряжение в твердых телах, электромагнитное поле, диэлектрическая проницаемость анизотропных кристаллов, кривизна пространства-времени и другие.

Возможность применения тензоров в формулировках физических законов обусловлена в значительной мере независимостью тензоров от систем координат. Дело в том, что в природе не существуют объективно выделенные системы координат. Они всегда задаются исследователем. Однако законы природы не могут зависеть от субъективного выбора исследователем той или иной системы координат, поэтому физические законы должны формулироваться посредством величин, не зависящих от систем координат. К таким величинам относятся, в частности, скаляры, векторы и тензоры.

Одно из применений тензоров состоит в использовании их в роли линейных операторов. Нужно отметить, что математический аппарат теории тензоров обладает существенно бо́льшими возможностями, чем аппарат теории линейных операторов. Это объясняется тем, что в теории тензоров имеются операции, которые отсутствуют в теории операторов, в частности, тензорное и бискалярное умножения и др.

Процедура разложения тензора по базису позволяет использовать в теории тензоров аппарат теории матриц, что в ряде случаев упрощает математические выкладки. Однако следует помнить, что замена тензоров матрицами допустима только при разложении тензоров по вполне определенному тензорному базису.

В настоящем пособии рассмотрены тензоры второго ранга в евклидовом пространстве, при этом матрица тензора строится только для трехмерного пространства с заданным в нем ортонормированным базисом. Теория тензоров для евклидовых и псевдоевклидовых пространств любой размерности с использованием произвольных базисов изложена в книге [16]. В этой же книге приведены доказательства утверждений, опущенные в настоящем пособии.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Теория тензоров излагается в большом количестве учебников и пособий. Ниже перечислены публикации, к которым обращались авторы при написании настоящей книги. Все они могут быть рекомендованы в качестве дополнительной литературы.

1. *Вакуленко А. А.* Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1972. — 64 с.

2. *Вильчевская Е. Н.* Тензорная алгебра и тензорный анализ. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. — 45 с.

3. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. — 272 с.

4. *Жилин П. А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. — СПб.: Нестор, 2001. — 275 с.

5. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 295 с.

6. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2001. — 368 с.

7. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 304 с.

8. *Курбатова Г. И., Филиппов В. Б.* Элементы тензорного исчисления. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. — 233 с.

9. *Лурье А. И.* Теория упругости. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. — 940 с.

10. *Осипов В. Ф.* Структура пространства-времени: векторная алгебра и анализ. Часть 1. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1995. — 327 с.

11. *Пальмов В. А.* Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. — 109 с.

12. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — 264 с.

13. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 664 с.

14. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. — 284 с.

15. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. — 528 с.

16. *Шихобалов Л. С.* Основы тензорной алгебры. — 2018. — 118 с. — http://hdl.handle.net/11701/9211

СОДЕРЖАНИЕ

Александр Евгеньевич Волков,
Наталия Александровна Волкова,
Лаврентий Семёнович Шихобалов

Тензоры второго ранга

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен Л. С. Шихобаловым