ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.71
MSC 91A12

Об одной многошаговой неантагонистической игре на сети*

М. А. Булгакова, Л. А. Петросян

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Булгакова М. А., Петросян Л. А.* Об одной многошаговой неантагонистической игре на сети // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 603–615.
https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.415

Рассматривается многошаговая неантагонистическая игра. Она имеет конечное число шагов, на первом шаге формируется сеть путем одновременного выбора векторов связи, а на последующих происходят одновременные неантагонистические игры, выигрыши в которых зависят от управлений, выбранных на предыдущем шаге, а также от поведения на текущем шаге. Игроки на всех шагах, кроме первого, имеют возможность видоизменять сеть, удалив какую-либо из своих связей. Для модели построена характеристическая функция новым способом, основанным на вычислении оптимальных управлений. Для случая одношаговой подыгры доказана супермодулярность характеристической функции. В качестве решения рассмотрены вектор Шепли, приведено упрощение формулы вычисления компонент вектора Шепли для данной характеристической функции. Также в качестве решения рассмотрено подмножество С-ядра (ПРД-ядро). Для него доказана сильная динамическая устойчивость. Работа проиллюстрирована примером.

Ключевые слова: многошаговые игры, супермодулярность, вектор Шепли, характеристическая функция, сильная динамическая устойчивость, ПРД-ядро.

Введение. Теория кооперативных сетевых игр — важная часть современной теории игр, которая будет использоваться для построения решений в играх на сетях со многими участниками. Эта теория включает в себя кооперативную траекторию, стратегии, ее порождающие, выигрыш вдоль кооперативной траектории, а также распределение выигрыша между игроками и анализ динамической устойчивости решений. Сеть иллюстрирует наличие взаимодействия между игроками и возможность кооперации. Особую роль играет задача нахождения оптимального поведения игроков,

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 17-11-01079).

т. е. такого поведения, при котором суммарный выигрыш будет максимальным. Подходам для нахождения оптимального поведения в многошаговых играх посвящена работа [1]. Условия сильной динамической устойчивости в двухшаговой игре с попарным взаимодействием были найдены в [2]. Динамические свойства кооперативных решений в игре n-лиц были изучены в [3].

В данной статье построена характеристическая функция в многошаговой неантагонистической игре особого вида, а также для подыгры, состоящей из одного шага с фиксированной сетью, доказано свойство супермодулярности характеристической функции, что гарантирует непустоту С-ядра и принадлежность С-ядру вектора Шепли. Вопрос о супермодулярности характеристической функции в игре с попарным взаимодействием рассматривался в работе [4].

В работе [5] было впервые упомянуто сильно-динамически устойчивое подмножество С-ядра. В ней было построено новое кооперативное решение на основе геометрического подхода и доказано, что это решение — подмножество С-ядра, обладающее свойством сильной динамической устойчивости. Позднее данное решение было названо ПРД-ядром и показано, что оно может быть построено с использованием системы линейных ограничений для процедуры распределения дележа. Такие условия определены для каждого момента времени дифференциальной игры. Из непустоты множества, описанного этими ограничениями, т. е. непустоты соответствующего множества ПРД в каждый момент времени, вытекает, что ПРД-ядро также не пусто. В статье [6] подход, предложенный в [7], был применен к изучению непустоты ПРД-ядра для каждого момента времени. Полученные результаты можно использовать для построения ПРД-ядра и проверки его непустоты для численных примеров.

Следуя подходу, представленному в [5], в настоящей статье построено ПРД-ядро и показана его сильная динамическая устойчивость.

Модель игры. Пусть задано абстрактное пространство $\mathbb{Z}$, называемое пространством состояний. На первом шаге, в начальном состоянии $z_0 \in \mathbb{Z}$, игроки формируют сеть $g(z_0)$, вершинами которой являются игроки, а ребрами — связи между игроками. В каждом последующем состоянии $z_k \in \mathbb{Z}$ игроки могут изменить сеть удалением каких-либо связей, после чего происходит неантагонистическая игра n-лиц $\Gamma(z_k)$ на сети $g(z_k)$.

Определим правило формирования сети $g(z_0)$ на первом шаге подобно тому, как было сделано в работе [8]: в начальном состоянии z_0 каждый игрок $i \in N$ выбирает свое поведение $b_i(z_0) = (b_{i1}(z_0), \ldots, b_{in}(z_0))$ — n-мерный вектор предложений связи другим игрокам, компоненты которого могут принимать значения 0 или 1. Введем следующие обозначения: $M_i \subseteq N \setminus i$ — те игроки, которым игрок $i \in N$ может предложить связь, значение $a_i \in \{0, \ldots, n-1\}$ равно максимальному числу связей игрока i. Если $M_i = N \setminus \{i\}$, игрок i может предложить связь всем игрокам, а если $a_i = n-1$, игрок i может поддерживать любое число возможных связей. Таким образом, каждый игрок ограничен числом связей a_i, которые он может предложить, и множеством M_i игроков, доступных для создания связи. Таким образом, на первом шаге управлением $y_i(z_0)$ является вектор предложений связи $b_i(z_0)$.

Игрок i выбирает подмножество игроков $Q_i \subset M_i$, с которыми собирается образовать связь. Тогда компоненты вектора $b_i(z_0)$ определяются следующим образом:

$$b_{ij}(z_0) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{если } j \in Q_i, \\ 0, & \text{если} j \notin Q_i \text{ или } i = j, \end{cases}$$

при условии
$$\sum_{j\in N} b_{ij}(z_0) \leqslant a_i. \tag{1}$$

Условие (1) означает, что число возможных связей ограничено для каждого игрока. Заметим, что $|Q_i| \leqslant a_i$. Очевидно, что связь также может быть реализована лишь с игроком из подмножества Q_i.

Будем говорить, что связь ij установлена тогда и только тогда, когда $b_{ij}(z_0) = b_{ji}(z_0) = 1$, т. е. $i \in Q_j,\ j \in Q_i$. Сформированные связи ij образуют ребра сети $g(z_0)$, вершинами которой являются игроки, т. е. если $b_{ij} = b_{ji} = 1$, то в сети g появляется ребро с концевыми вершинами i и j.

Будем обозначать через $N_i(g(z_0))$ соседей игрока i в сети $g(z_0)$, т. е. $N_i(g(z_0)) = \{j \in N \setminus \{i\} : ij \in g(z_0)\}$.

После формирования сети $g(z_0)$ игроки переходят в состояние $z_1(g(z_0))$, которое определяется сетью $g(z_0)$. В состоянии $z_1(g(z_0))$ игрокам предоставляется возможность удалять некоторые из ранее установленных связей, перестраивая таким образом сеть $g(z_0)$ в $g(z_1)$ и формируя новые множества соседей $N_i(g(z_1))$. На сети $g(z_1)$ игроки играют в игру $\Gamma(z_1)$, которая представляет собой одновременную неантагонистическую игру между соседями по сети.

Итак, на втором шаге в состоянии z_1 игрок i, $i = \overline{1,n}$, выбирает управление $y_i(z_1) = (b_i(z_1), x_i(z_1))$ из множества Y_i, которое в отличие от первого шага содержит дополнительную компоненту $x_i(z_1)$ поведения в игре $\Gamma(z_1)$. Здесь $b_i(z_1)$ — это вектор с компонентами 0 или 1, полученный по следующему правилу:

$$b_{ij}(z_1) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{сохранить связь } ij, \\ 0, & \text{удалить связь } ij, \end{cases}$$

т. е. игрок на втором шаге имеет возможность удалять существующие связи, однако не обладает возможностью создавать новые. Компонента $x_i(z_1)$ управления $y_i(z_1) = (b_i(z_1), x_i(z_1))$ представляет собой поведение игрока i в игре $\Gamma(z_1)$ и выбирается из множества $X_i(z_1)$, определенного в состоянии z_1.

Пусть $y(z_1) = (y_1(z_1), \ldots, y_n(z_1))$ — ситуация в игре $\Gamma(z_1)$. Выигрыш игрока i в игре $\Gamma(z_1)$ расписывается таким образом:

$$H_i(z_1) = \sum_{j\in N_i(g(z_1))} h_i(y_i(z_1), y_j(z_1)),$$

где $g(z_1)$ — сеть, возникшая в результате ситуации $y(z_1)$, которая предусматривает возможность удаления некоторых ребер из сети $g(z_0)$, а функции $h_i(x_i(z_1), x_j(z_1)) \geqslant 0$ заданы для всех $i \in N$ и всех пар ij, т. е. всех ребер сети $g(z_1)$ и всех возможных состояний $z \in \mathbb{Z}$.

Пусть в состоянии $z_{k-1} \in Z$ в игре $\Gamma(z_{k-1})$ игроками $i \in N$ были выбраны управления $(y_1(z_{k-1}), \ldots, y_n(z_{k-1}))$. В результате выбора этих управлений осуществляется переход в состояние z_k, где происходит игра $\Gamma(z_k)$, с выигрышами $h_i(x_j(z_k), x_i(z_k))$, зависящими от управлений, выбранных в состоянии z_{k-1}. То есть состояние на следующем шаге игры зависит от состояния на текущем шаге и от управлений, выбранных на данном шаге. Можно получить отображение $T : \mathbb{Z} \times Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n \to \mathbb{Z}$ по формуле
$$z_k = T(z_{k-1}; y_1(z_{k-1}), y_2(z_{k-1}), \ldots, y_n(z_{k-1})), \quad k = \overline{1,\ell}. \tag{2}$$

Таким образом, отображение T однозначным образом определяет состояние z_k, которое следует за состоянием z_{k-1}, при условии, что были выбраны управления $y_1(z_{k-1}), y_2(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1})$.

Рассмотрим многошаговую игру $G(z)$, которая происходит следующим образом. Игра $G(z_0)$ начинается в состоянии z_0. В состоянии z_0 формируется сеть $g(z_0)$, после чего игроки попадают в состояние z_1. В состоянии $z_{k-1},\ k = \overline{1, \ell - 1}$, игроки выбирают управления $y_1(z_{k-1}), y_2(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1})$, играют в игру $\Gamma(z_{k-1})$ и переходят в состояние $z_k = T(z_{k-1}; y_1(z_{k-1}), y_2(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1}))$. Игра заканчивается на шаге $\ell + 1$ в состоянии z_ℓ. Таким образом, в результате выбора управлений на каждом шаге игры реализуется путь $z_0, z_1, \dots, z_k, \dots, z_\ell$.

Состояние z_k называется допустимым, если существуют последовательность управлений и порожденная ею последовательность состояний $z_0, z_1, \dots z_k, k \leqslant \ell$, определяемая по формуле (2), такая, что $z_k = z$.

Естественным образом вводится понятие стратегии в полученной многошаговой игре: $y_i(\cdot),\ i \in N$, — как правило, которое каждому допустимому состоянию z игры ставит в соответствие компоненты $b_i(z), x_i(z)$ управления в этом состоянии, т. е. выбор связей, подлежащих удалению, и выбор поведения $x_i(z)$ в игре $\Gamma(z)$. Из приведенного выше описания следует, что любая ситуация $y(\cdot) = \{y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)\}$ однозначно определяет путь в игре, а следовательно, и выигрыш каждого игрока как сумму его выигрышей в играх, реализованных вдоль пути:

$$H_i(y(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j \in N_i(g(z))} h_i(y_i(z_k), y_j(z_k)).$$

Заметим, что множество всевозможных путей в многошаговой игре $G(z)$ конечно, и, таким образом, конечно и множество всех допустимых состояний в игре. Обозначим это множество через $\overline{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$.

Предположим, что игроки выбирают управления $\bar{y}_i(z),\ i \in N$, которые максимизируют их суммарный выигрыш в игре $G(z)$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i \in N} H_i(\bar{y}_1(z_k), \dots, \bar{y}_n(z_k)) = \max_y \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i \in N} H_i(y_1(z_k), \dots, y_n(z_k)). \tag{3}$$

Ситуацию $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ будем называть кооперативным поведением в игре $G(z)$, а соответствующую управлениям $\bar{y}_i(z),\ i \in N$, траекторию $(\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_\ell)$ — кооперативной траекторией ($z_0 = \bar{z}_0$).

Рассмотрим одношаговую игру $\Gamma(z)$ в произвольном состоянии $z \in \mathbb{Z}$ в кооперативной форме и определим ее характеристическую функцию $v(S; z),\ S \subset N$, для каждого подмножества (коалиции) $S \subset N$ по следующему правилу:

$$v(\emptyset; z) = 0,$$

$$v(\{i\}; z) = 0,$$

$$v(\{ij\}; z) = \begin{cases} h_i(\bar{x}_i(z); \bar{x}_j(z)) + h_j(\bar{x}_j(z); \bar{x}_i(z)), & \text{если } j \in N_i(g(z)), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{4}$$

$$v(S; z) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z); \bar{x}_j(z)),$$

$$v(N;z) = \sum_{i\in N}\sum_{j\in N_i(g(z))} h_i(\bar{x}_i(z);\bar{x}_j(z)),$$

где $\bar{x}_i(z), \bar{x}_j(z)$ получают согласно равенству (3).

Здесь, в отличие от работ [9, 10], в которой характеристическая функция строилась как максиминное (нижнее) значение игры между коалицией S и дополнительной коалицией $N \setminus S$, процесс построения этой функции осуществляется следующим образом. Чтобы вычислить значение характеристической функции, необходимо определить кооперативное поведение в игре $G(z_0)$ и затем рассчитать $v(S;z_k),\ k=\overline{1,\ell}$, в предположении, что игроки выбирают в качестве компонент управления кооперативное поведение.

Найдем характеристическую функцию $V(S;z_k)$ многошаговой игры $G(z_k)$, начинающейся в состоянии z_k, как сумму выигрышей коалиций S вдоль кооперативной траектории $(\bar{y}(z_0), \bar{y}(z_1), \ldots, \bar{y}(z_l))$ за $\ell - k + 1$ шагов, начиная с k:

$$V(S;z_k) = \sum_{r=k}^{\ell} v(S;z_r) = \sum_{r=k}^{\ell}\sum_{i\in S}\sum_{j\in N_i(g(z_r))\cap S} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)),$$

$$V(S;z_\ell) = v(S;z_\ell).$$

Супермодулярность $v(S;z)$. Рассмотрим вопрос о супермодулярности функции $v(S;z)$.

Определение 1. *Характеристическая функция $v(S;z),\ S\subset N$, называется супермодулярной, если для любых $X\subset N,\ Y\subset N$ выполняется неравенство*

$$v(X\cup Y;z) \geqslant v(X;z) + v(Y;z) - v(X\cap Y;z). \tag{5}$$

Теорема. *Характеристическая функция $v(S;z)$ в игре $\Gamma(z)$ супермодулярна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем неравенство (5) для характеристической функции $v(S;z)$ (4). Для сокращения записи вместо $h_i(\bar{x}_i(z), \bar{x}_j(z))$ будем писать просто $h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ и вместо $N_i(g(z))$ — N_i. В данном случае это не противоречит логике, поскольку рассматривается только один шаг игры, и поведения, как и множества соседей, не меняются в течение шага. Имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{i\in X\setminus Y}\left(\sum_{j\in N_i\cap(X\setminus Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j) + \sum_{j\in N_i\cap(Y\setminus X)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j) + \sum_{j\in N_i\cap(X\cap Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)\right) +$$

$$+\sum_{i\in X\cap Y}\left(\sum_{j\in N_i\cap(X\setminus Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j) + \sum_{j\in N_i\cap(Y\setminus X)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j) + \sum_{j\in N_i\cap(X\cap Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)\right) +$$

$$+\sum_{i\in Y\setminus X}\left(\sum_{j\in N_i\cap(X\setminus Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j) + \sum_{j\in N_i\cap(Y\setminus X)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j) + \sum_{j\in N_i\cap(X\cap Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i\in X}\sum_{j\in N_i\cap X} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j) + \sum_{i\in Y}\sum_{j\in N_i\cap Y} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j) - \sum_{i\in X\cap Y}\sum_{j\in N_i\cap(X\cap Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j). \tag{6}$$

В левой и правой частях неравенства (6) видны подобные слагаемые, а именно

$$\sum_{i\in X\setminus Y}\left(\sum_{j\in N_i\cap(X\setminus Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+\sum_{j\in N_i\cap(X\cap Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)\right)+$$

$$+\sum_{i\in X\cap Y}\left(\sum_{j\in N_i\cap(X\setminus Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+\sum_{j\in N_i\cap(X\cap Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)\right)=\sum_{i\in X}\sum_{j\in N_i\cap X} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j).$$

После их сокращения получим выражение

$$\sum_{i\in X\setminus Y}\sum_{j\in N_i\cap(Y\setminus X)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+\sum_{i\in X\cap Y}\sum_{j\in N_i\cap(Y\setminus X)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+$$

$$+\sum_{i\in Y\setminus X}\left(\sum_{j\in N_i\cap(X\setminus Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+\sum_{j\in N_i\cap(Y\setminus X)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+\sum_{j\in N_i\cap(X\cap Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{i\in Y}\sum_{j\in N_i\cap Y} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)-\sum_{i\in X\cap Y}\sum_{j\in N_i\cap(X\cap Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j).$$

Перенесем отрицательное слагаемое из правой части неравенства в левую:

$$\sum_{i\in X\setminus Y}\sum_{j\in N_i\cap(Y\setminus X)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+\sum_{i\in X\cap Y}\sum_{j\in N_i\cap(Y\setminus X)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+\sum_{i\in X\cap Y}\sum_{j\in N_i\cap(X\cap Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+$$

$$+\sum_{i\in Y\setminus X}\left(\sum_{j\in N_i\cap(X\setminus Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+\sum_{j\in N_i\cap(Y\setminus X)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j\in N_i\cap(X\cap Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)\right)\geqslant\sum_{i\in Y}\sum_{j\in N_i\cap Y} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j).$$

Можно заметить вторую группу подобных слагаемых:

$$\sum_{i\in X\cap Y}\sum_{j\in N_i\cap(Y\setminus X)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+\sum_{i\in X\cap Y}\sum_{j\in N_i\cap(X\cap Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+$$

$$+\sum_{i\in Y\setminus X}\left(\sum_{j\in N_i\cap(Y\setminus X)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+\sum_{j\in N_i\cap(X\cap Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)\right)=\sum_{i\in Y}\sum_{j\in N_i\cap Y} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j).$$

После их сокращения имеем итоговое неравенство

$$\sum_{i\in X\setminus Y}\sum_{j\in N_i\cap(Y\setminus X)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)+\sum_{i\in Y\setminus X}\sum_{j\in N_i\cap(X\setminus Y)} h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)\geqslant 0. \tag{7}$$

В силу неотрицательности выигрышей $h_i(\bar{x}_i,\bar{x}_j)$, неравенство (7) верное. Таким образом, доказана справедливость неравенства (6), и построенная характеристическая функция $v(S;z)$ в игре $\Gamma(z)$ супермодулярна.

Вектор Шепли. Рассмотрим вектор Шепли в качестве решения игры $\Gamma(z)$.

Определим дележ в игре $\Gamma(z)$ как вектор $\xi[v] = (\xi_1[v], \dots, \xi_n[v])$, который удовлетворяет условиям коллективной рациональности, т. е. $\sum_{i \in N} \xi_i[v] = v(N; z)$, и индивидуальной рациональности, т. е. $\xi_i[v] \geqslant v(\{i\}; z)$, для всех $i \in N$. В качестве дележа возьмем вектор Шепли $\varphi[v] = (\varphi_1[v], \dots, \varphi_n[v])$, где

$$\varphi_i[v] = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}[v(S; z) - v(S \setminus \{i\}); z], \quad i \in N. \tag{8}$$

Вычислим значение разности $[v(S; z) - v(S \setminus \{i\}; z)]$:

$$[v(S; z) - v(S \setminus \{i\}); z] = \sum_{j \in N_i(g(z)) \cap S} (h_i(\bar{x}_i(z), \bar{x}_j(z)) + h_j(\bar{x}_j(z), \bar{x}_i(z))).$$

Подставим полученное значение в формулу вектора Шепли (8)

$$\varphi_i[v] = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \sum_{j \in N_i(g(z)) \cap S} (h_i(\bar{x}_i(z), \bar{x}_j(z)) + h_j(\bar{x}_j(z), \bar{x}_i(z))), \quad i \in N. \tag{9}$$

Такой вид формулы не требует определения характеристической функции для всех коалиций $S \subset N$. Чтобы вычислить значение компоненты вектора Шепли, достаточно знать структуру сети $g(z)$.

ПРД-ядро и его сильная динамическая устойчивость. Обозначим через $I(V)$ множество всех дележей в игре $G(z_0)$.

Определение 2. *Функция $\beta_i = (\beta_i^0, \dots, \beta_i^\ell)$, $i \in N$, называется процедурой распределения дележа (ПРД) для $\xi \in I(V)$ (см. [11]), если*

$$\xi_i = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_i^r, \quad i \in N.$$

Рассмотрим в качестве принципа оптимальности подмножество C-ядра для игры $G(\bar{z}_k)$ — ПРД-ядро (см. [5]) $C(V(S; \bar{z}_k))$, т. е. множество ПРД, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i \in S} \beta_i \geqslant V(S; \bar{z}_k) = \sum_{r=k}^{\ell} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)), \quad S \subset N, \quad S \neq N,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i = V(N; \bar{z}_k) = \sum_{r=k}^{\ell} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap N} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)),$$

где $\beta_i = (\beta_1^i, \dots, \beta_k^i, \dots, \beta_\ell^i)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{i \in S} \beta_i^k \geqslant v(S, \bar{z}_k) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z_k)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k)), \quad S \subset N, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i^k = v(N, \bar{z}_k) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g(z_k)) \cap N} h_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k)). \tag{11}$$

Предположим, что все $C(V(S; \bar{z}_k)) \neq \emptyset$.

Определение 3 [12]. *Принцип оптимальности $C(V(S;\bar z_0))\neq\emptyset$ сильнодинамически устойчив в игре $G(\bar z_0)$, если*

1) $C(V(S;\bar z_k))\neq\emptyset,\quad k=\overline{0,\ell};$

2) для каждого дележа $x\in C(V(S;\bar z_0))$ существует такая процедура распределения дележа $\beta=(\beta_0,\dots,\beta_\ell)$, $\xi=\sum_{r=0}^{\ell}\beta_j$, что

$$\sum_{r=0}^{k}\beta_r\oplus C(V(S;\bar z_{k+1}))\subset C(V(S;\bar z_0)),\quad k=\overline{0,\ell}.$$

Здесь символ $\oplus$ означает, что если $a\in R^n$, $B\subset R^n$, тогда $a\oplus B=\{a+b:b\in B\}$.

Утверждение. Принцип оптимальности $C(V(S;\bar z_0))$ сильнодинамически устойчив.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть некоторый дележ $\xi_0\in C(V(S;\bar z_0))$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{i\in S}\xi_{i0}\geqslant\sum_{r=0}^{\ell}\sum_{i\in S}\sum_{j\in N_i(g(z_r))\cap S}h_i(\bar x_i(z_r),\bar x_j(z_r)),\quad S\subset N,\quad S\neq N,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\xi_{i0}=\sum_{r=0}^{\ell}\sum_{i\in N}\sum_{j\in N_i(g(z_r))\cap N}h_i(\bar x_i(z_r),\bar x_j(z_r)).$$

По определению, запишем дележ ξ_0 в виде суммы ПРД:

$$\xi_0=\sum_{k=0}^{\ell}\bar\beta_k,\quad \bar\beta_k\in C(v(S;\bar z_k)).$$

Аналогичным образом представим произвольный дележ $\xi_{k+1}\in C(V(S;\bar z_{k+1}))$ как сумму:

$$\xi_{k+1}=\sum_{r=k+1}^{\ell}\overline{\overline{\beta}}_r,\quad \overline{\beta}_r\in C(v(S;\bar z_r)).$$

Возьмем в качестве ПРД вектор $\beta=(\overline{\beta}_0,\dots,\overline{\beta}_k,\overline{\overline{\beta}}_{k+1},\dots,\overline{\overline{\beta}}_\ell)$ и построим новый вектор

$$\hat\xi_0=\sum_{r=0}^{k}\overline{\beta}_r+\xi_{k+1}=\sum_{r=0}^{k}\overline{\beta}_r+\sum_{r=k+1}^{\ell}\overline{\overline{\beta}}_r\geqslant\sum_{r=0}^{\ell}\sum_{i\in S}\sum_{j\in N_i(g(z_r))\cap S}h_i(\bar x_i(z_r),\bar x_j(z_r)).$$

Таким образом, вектор $\hat\xi_0$ является суммой компонент ПРД β и произвольного дележа $\xi_{k+1}\in C(V(S;\bar z_{k+1}))$. Вектор $\hat\xi_0\in C(V(S;\bar z_0))$, что доказывает сильную динамическую устойчивость принципа оптимальности $C(V(S;\bar z_0))$. $\square$

Пример. Рассмотрим случай, в котором $N=3$, $\ell=3$, т. е. игра состоит из четырех шагов и начинается в состоянии z_0. В этом состоянии заданы множества M_i игроков, которым игрок i может предложить связь

$$M_1=\{2,3\},\quad M_2=\{1,3\},\quad M_3=\{1,2\},$$

а также ограничения на количество связей, которое может поддерживать каждый игрок:

$$a_1=1,\quad a_2=1,\quad a_3=2.$$

В состоянии z_0 игроки выбирают векторы $b_i(z_0)$, формируют сеть $g(z_0)$ и переходят в состояние z_1. В каждом из состояний $z_k,\ k \geqslant 1$, игроки выбирают управления $y_i(z_k) = (b_i(z_k), x_i(z_k))$, где $b_i(z_k)$ — вектор регулирования связей игрока (с компонентами 1 и 0), а $x_i(z_k)$ равен

$$x_1(z_k) = x_1(z) \in X_1 = \{x_1^1(z), x_1^2(z)\},$$

$$x_2(z_k) = x_2(z) \in X_2 = \{x_2^1(z), x_2^2(z)\}, \quad x_3(z_k) = x_3(z) \in X_3\{x_3^1(z), x_3^2(z)\},$$

т. е. каждый игрок i имеет одинаковое множество компонент управления X_i во всех состояниях z_k.

Для всех допустимых состояний $z_k,\ k \geqslant 1$, и всех возможных стратегий заданы выигрыши $h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$ следующего вида: $h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$ и $h'_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$.

В состоянии z_1 игра происходит с выигрышами $h(\bar{x}_i(z_1), \bar{x}_j(z_1))$. В состоянии z_1 каждый игрок $i \in N$ выбирает свою компоненту управления $x_i(z_1)$, если все $x_i(z_1) = x_i^1(z_1), i \in N$, тогда игроки переходят в состояние z_2, в котором играют в игру с теми же выигрышами $h_i(\bar{x}_i(z_2), \bar{x}_j(z_2))$. Если хотя бы одна из компонент $x_i(z_1) = x_i^2(z_1), i \in N$, тогда в состоянии z_2 игроки играют в игру с выигрышами $h'_i(\bar{x}_i(z_2), \bar{x}_j(z_2))$. Аналогичным образом осуществляется переход в состояние z_3: если все $x_i(z_1) = x_i^1(z_1), i \in N$, тогда игроки в состоянии z_3 используют выигрыши $h_i(\bar{x}_i(z_3), \bar{x}_j(z_3))$, если хотя бы одна из компонент $x_i(z_1) = x_i^2(z_1),\ i \in N$, — выигрыши $h'_i(\bar{x}_i(z_3), \bar{x}_j(z_3))$.

Выигрыши $h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$:

$$\begin{array}{lll}
h_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1) = 4, & h_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_3^1) = 5, & h_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_3^1) = 5, \\
h_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^1) = 3, & h_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^1) = 3, & h_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_3^1) = 1, \\
h_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^2) = 5, & h_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_3^2) = 1, & h_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_3^2) = 4, \\
h_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) = 5, & h_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^2) = 2, & h_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_3^2) = 1, \\
h_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_1^1) = 4, & h_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_1^1) = 5, & h_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_2^1) = 5, \\
h_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_1^2) = 3, & h_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_1^2) = 3, & h_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_2^2) = 1, \\
h_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_1^1) = 5, & h_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_1^1) = 1, & h_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_2^1) = 4, \\
h_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_1^2) = 5, & h_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_1^2) = 2, & h_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_2^2) = 1;
\end{array}$$

выигрыши $h'_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$:

$$\begin{array}{lll}
h'_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1) = 8, & h'_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_3^1) = 6, & h'_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_3^1) = 12, \\
h'_2(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^1) = 3, & h'_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^1) = 5, & h'_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_3^1) = 10, \\
h'_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^2) = 7, & h'_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_3^2) = 4, & h'_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_3^2) = 5, \\
h'_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) = 4, & h'_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^2) = 3, & h'_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_3^2) = 4, \\
h'_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_1^1) = 8, & h'_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_1^1) = 6, & h'_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_2^1) = 12, \\
h'_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_1^2) = 3, & h'_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_1^2) = 5, & h'_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_2^2) = 10, \\
h'_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_1^1) = 7, & h'_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_1^1) = 4, & h'_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_2^1) = 5, \\
h'_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_1^2) = 4, & h'_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_1^2) = 3, & h'_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_2^2) = 4.
\end{array}$$

В состоянии z_0 игроки выбирают свои поведения с целью максимизировать суммарный выигрыш всех игроков:

$$b_1(z_0) = (0, 0, 1), \quad b_2(z_0) = (0, 0, 1), \quad b_3(z_0) = (1, 1, 0).$$

В результате образуется сеть вида, которую иллюстрирует рис. 1.

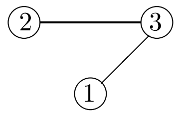

Рис. 1. Сеть на первом шаге игры

Для максимизации общего выигрыша игрокам выгодно поддерживать связи со всеми соседями в течение всей игры, т. е. $b_i(z_0) = b_i(z_1) = b_i(z_2) = b_i(z_3)$ для всех $i \in N$. Компоненты управлений $\bar{y}_i(z)$ игроков:

$$\bar{x}_1(z_1) = x_1^2, \quad \bar{x}_2(z_1) = x_2^1, \quad \bar{x}_3(z_1) = x_3^1,$$

$$\bar{x}_1(z_2) = x_1^1, \quad \bar{x}_2(z_2) = x_2^2, \quad \bar{x}_3(z_2) = x_3^1,$$

$$\bar{x}_1(z_3) = x_1^1, \quad \bar{x}_2(z_3) = x_2^2, \quad \bar{x}_3(z_3) = x_3^1.$$

Вычислим значения характеристической функции $v(S; z)$ во всех состояниях на кооперативной траектории, кроме z_0, поскольку на первом шаге происходит только формирование сети и игроки не получают никаких выигрышей:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$v(S; \bar{z}_1)$	0	0	0	6	6	10	16
$v(S; \bar{z}_2)$	0	0	0	14	12	20	32
$v(S; \bar{z}_3)$	0	0	0	14	12	20	32

В состоянии z_1 игроки выбирают свои управления и в зависимости от этого переходят в новое состояние. В каждом состоянии у игроков всего две альтернативы: либо в результате выбора управлений они будут играть в игру $\Gamma(z_k)$ с выигрышами $h_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k))$ в следующем состоянии, либо перейдут в состояние, где игра будет происходить с выигрышами $h_i'(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k))$.

Цифры 1 и 2 над стрелками (рис. 2) указывают, какие выигрыши будут использованы игроками в следующем состоянии: 1 обозначает $h_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k))$, 2 — $h_i'(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k))$.

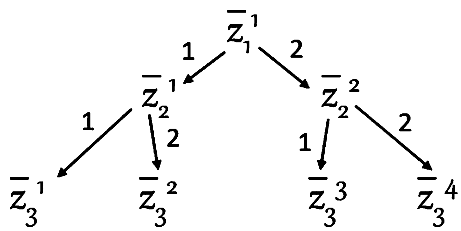

Рис. 2. Дерево всех возможных состояний игры

Оптимальная траектория в игре $G(z_0)$: $\bar{z} = (z_0, z_1^1, z_2^2, z_3^4) = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$. Вычислим характеристическую функцию многошаговой игры $G(z_0)$:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$V(S; \bar{z}_3)$	0	0	0	14	12	20	32
$V(S; \bar{z}_2)$	0	0	0	28	24	40	64
$V(S; \bar{z}_1)$	0	0	0	34	30	50	80

Рассмотрим дележ $q \in C(V(S;\bar{z}_1))$:

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0, \\ x_3 \geqslant 0, \\ x_1 + x_2 \geqslant 34, \\ x_1 + x_3 \geqslant 30, \\ x_2 + x_3 \geqslant 50, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 80. \end{cases}$$

В качестве ПРД $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ возьмем дележ $\alpha^k \in C(v(S;\bar{z}_k))$, удовлетворяющий неравенствам (10), (11), $\beta_k = \alpha,\ k = 1,2,3$; β_0 положим равным нулю, а β_1 удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \alpha_1^1 \geqslant 0, \\ \alpha_2^1 \geqslant 0, \\ \alpha_3 \geqslant 0, \\ \alpha_1^1 + \alpha_2^1 \geqslant 6, \\ \alpha_1^1 + \alpha_3^1 \geqslant 6, \\ \alpha_2^1 + \alpha_3^1 \geqslant 10, \\ \alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \alpha_3^1 = 16, \end{cases}$$

β_2 и β_3 — неравенствам, где $k = 2,3$:

$$\begin{cases} \alpha_1^k \geqslant 0, \\ \alpha_2^k \geqslant 0, \\ \alpha_3^k \geqslant 0, \\ \alpha_1^k + \alpha_2^k \geqslant 14, \\ \alpha_1^k + \alpha_3^k \geqslant 12, \\ \alpha_2^k + \alpha_3^k \geqslant 20, \\ \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k = 32. \end{cases}$$

Просуммируем левую и правую части неравенств последних двух систем по $k = 1,2,3$:

$$\begin{cases} \hat{q}_1 \geqslant 0, \\ \hat{q}_2 \geqslant 0, \\ \hat{q}_3 \geqslant 0, \\ \hat{q}_1 + \hat{q}_2 \geqslant 34, \\ \hat{q}_1 + \hat{q}_3 \geqslant 30, \\ \hat{q}_2 + \hat{q}_3 \geqslant 50, \\ \hat{q}_1 + \hat{q}_2 + \hat{q}_3 = 80. \end{cases}$$

Из последнего неравенства следует, что $\hat{q} \in C(V(S;\bar{z}_0))$. То есть дележ, принадлежащий множеству $C(V(S;\bar{z}_0))$, удалось разложить на сумму дележей из множеств $C(v(S;\bar{z}_k)), k = 1,2,3$, что доказывает сильную динамическую устойчивость $C(V(S;\bar{z}_0))$.

Заключение. Таким образом, в работе исследован один класс неантагонистических многошаговых игр. Построена новая характеристическая функция с использованием оптимальных стратегий игроков в многошаговой игре. Этот подход позволяет упростить работу с C-ядром и его аналогами. Доказана супермодулярность характеристической функции для подыгры, состоящей из одного шага. В качестве решения рассмотрены вектор Шепли и аналог C-ядра. Следуя [5], построено подмножество

С-ядра — ПРД-ядро — и доказана его сильная динамическая устойчивость в данной игре. Работа проиллюстрирована примером.

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

Литература

1. *Петросян Л. А., Седаков А. А.* Многошаговые сетевые игры с полной информацией // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1. № 2. С. 66–81.

2. *Bulgakova M. A., Petrosyan L. A.* About strongly time-consistency of core in the network game with pairwise interactions // Proceedings of 2016 International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems". 2016. P. 157–160.

3. *Kuzyutin D., Nikitina M.* Time consistent cooperative solutions for multistage games with vector payoffs // Operations Research Letters. 2017. Vol. 45. Iss. 3. P. 269–274.

4. *Булгакова М. А.* Решения сетевых игр с попарным взаимодействием // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 1. С. 147–156. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.112

5. *Petrosian O. L., Gromova E. V., Pogozhev S. V.* Strong time-consistent subset of core in cooperative differential games with finite time horizon // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79(10). P. 1912–1928.

6. *Вольф Д. А., Захаров В. В., Петросян О. Л.* О существовании ПРД-ядра в кооперативных дифференциальных играх // Математическая теория игр и ее приложения. 2017. Т. 9(4). С. 18–38.

7. *Zakharov V., O-Hun Kwon.* Linear programming approach in cooperative games // Journal of Korean Mathematical Society. 1977. Vol. 34(2). P. 423–435.

8. *Петросян Л., Седаков А., Бочкарев А.* Двухшаговые сетевые игры // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. Вып. 4. С. 84—104.

9. *Bulgakova M. A., Petrosyan L. A.* Cooperative network games with pairwise interactions // Mathematical game theory and applications. 2015. Vol. 4. N 7. P. 7–18.

10. *Булгакова М. А., Петросян Л. А.* Многошаговые игры с попарным взаимодействием на полном графе // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. Т. 11. Вып. 1. С. 3–20.

11. *Petrosyan L. A.* Stability of solutions in n-person differential games // Vestnik of Leningrad University. 1977. Vol. 1. N 19. P. 46–52.

12. *Petrosyan L. A.* About new strongly time-consistency solutions in cooperative differential games // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 1995. N 211. P. 335–340.

Статья поступила в редакцию 18 октября 2019 г.
Статья принята к печати 7 ноября 2019 г.

Контактная информация:

Булгакова Мария Александровна — ассистент; mari_bulgakova@mail.ru

Петросян Леон Аганесович — д-р физ.-мат. наук, проф.; l.petrosyan@spbu.ru

About one multistage non-antagonistic network game*

M. A. Bulgakova, L. A. Petrosyan

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Bulgakova M. A., Petrosyan L. A. About one multistage non-antagonistic network game. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 4, pp. 603–615. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.415 (In Russian)

In the paper, a multi-step non-antagonistic game is considered. The game has a finite number

* This work was supported by the Russian Scientific Found (grant N 17-11-017079).

of stages, at the first stage a network is formed by simultaneously choosing communication vectors, and at the next, there are simultaneous non-antagonistic games, the payoffs in which depend on the controls chosen in the previous stage, as well as the behavior in the current stage. Players, at all stages except the first, have the opportunity to modify the network by removing any of their connections. A characteristic function is constructed for the model in a new way based on the calculation of optimal controls. For the case of a one-stage subgame, the supermodularity of the characteristic function is proved. As a solution, the Shapley value is considered, a simplification of the formula for calculating the components of the Shapley value for this characteristic function is given. Also, as a solution, a subset of the core (PRD-core) is considered. Strong dynamic stability has been proved for it. Work is illustrated by an example.

Keywords: multistage games, supermodular function, Shapley value, characteristic function, strongly time consistency, PRD-core.

References

1. Petrosyan L. A., Sedakov A. A. Mnogoshagovye setevye igry s polnoj informaciej [Multistage network games with full information]. *Mathematical game theory and applications*, 2009, vol. 1, no. 2, pp. 66–81. (In Russian)

2. Bulgakova M. A., Petrosyan L. A. About strongly time-consistency of core in the network game with pairwise interactions. *Proceedings of 2016 International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"*, 2016, pp. 157–160.

3. Kuzyutin D., Nikitina M. Time consistent cooperative solutions for multistage games with vector payoffs. *Operations Research Letters*, 2017, vol. 45, iss. 3, pp. 269–274.

4. Bulgakova M. A. Resheniya setevyh igr s poparnym vzaimodejstviem [Solutions of network games with pairwise interactions]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 1, pp. 147–156.
https://doi.org/10.21638/11702/ spbu10.2019.112 (In Russian)

5. Petrosian O. L., Gromova E. V., Pogozhev S. V. Strong time-consistent subset of core in cooperative differential games with finite time horizon. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79(10), pp. 1912–1928.

6. Wolf D. A., Zakharov V. V., Petrosian O. L. O sushchestvovanie PRD-yadra v kooperativnyh differencial'nyh igrah [About existance of PRD-core in cooperative differential games]. *Mathematical game theory and applications*, 2017, vol. 9(4), pp. 18–38. (In Russian)

7. Zakharov V., O-Hun Kwon. Linear programming approach in cooperative games. *Journal of Korean Mathematical Society*, 1977, vol. 34(2), pp. 423–435.

8. Petrosyan L. A., Sedakov A. A., Bochkarev A. A. Dvuhshagovye setevye igry [Two-stage network games]. *Mathematical game theory and applications*, 2013, vol. 5, iss. 4, pp. 84–104. (In Russian)

9. Bulgakova M. A., Petrosyan L. A. Cooperative network games with pairwise interactions. *Mathematical game theory and applications*, 2015, vol. 4, no. 7, pp. 7–18.

10. *Bulgakova M. A., Petrosyan L. A.* Mnogoshagovye igry s poparnym vzaimodeystviem na polnom grafe [Multi-stage games with pairwise interactions on full graph]. *Mathematical game theory and applications*, 2019, vol. 11, iss. 1, pp. 3–20. (In Russian)

11. Petrosyan L. A. Stability of solutions in n-person differential games. *Vestnik of Leningrad University*, 1977, vol. 1, no. 19, pp. 46–52.

12. Petrosyan L. A. About new strongly time-consistency solutions in cooperative differential games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1995, no. 211, pp. 335–340.

Received: October 18, 2019.
Accepted: November 07, 2019.

Author's information:

Maria A. Bulgakova — Assistant; mari_bulgakova@mail.ru

Leon A. Petrosyan — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; l.petrosyan@spbu.ru