УДК 519.62/.642 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2019. Т. 15. Вып. 4
MSC 65L06

Двухпараметрическое семейство методов шестого порядка интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений

И. В. Олемской, Н. А. Коврижных, О. С. Фирюлина

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Олемской И. В., Коврижных Н. А., Фирюлина О. С.* Двухпараметрическое семейство методов шестого порядка интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 502–517.
https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.407

Работа посвящена построению экономичного явного метода шестого порядка численного интегрирования систем структурно разделенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведена общая схема метода, алгоритмически учитывающая выделенные структурные особенности рассматриваемой полной канонической формы систем структурно разделенных уравнений. Выписаны условия шестого порядка, связывающие параметры метода. Определены упрощающие условия, позволяющие для предлагаемого явного одношагового метода найти двухпараметрическое семейство решений нелинейной системы условий порядка. Построены экономичные расчетные схемы шестого порядка интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. На решении тестовой задачи проведено их сравнительное тестирование с явным одношаговым методом шестого порядка.

Ключевые слова: порядок, условия порядка, упрощающие условия.

Введение. В работе [1] дан алгоритм приведения систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z_k' = \varphi_k(x, z_1, \ldots, z_g), \quad k = 1, \ldots, g,$$

к виду

$$y_0' = f_0(x, y_0, \ldots, y_n), \tag{1}$$

$$y_i' = f_i(x, y_0, \ldots, y_{i-1}, y_{l+1}, \ldots, y_n), \qquad i = 1, \ldots, l, \tag{2}$$

$$y_j' = f_j(x, y_0, \ldots, y_{j-1}), \qquad j = l+1, \ldots, n, \tag{3}$$

где

$$x \in [X_0, X_k] \subset \mathbb{R}, \quad y_s : [X_0, X_k] \longrightarrow \mathbb{R}^{r_s}, \quad s = 0, \ldots, n,$$

$$f_0 : [X_0, X_k] \times \mathbb{R}^g \longrightarrow \mathbb{R}^{r_0}, \quad \sum_{s=0}^{n} r_s = g,$$

$$f_i : [X_0, X_k] \times \mathbb{R}^{g-\hat{r}^i} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_i}, \quad \hat{r}^i = \sum_{s=i}^{l} r_s, \quad i = 1, \ldots, l,$$

$$f_j : [X_0, X_k] \times \mathbb{R}^{g-\bar{r}^j} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_j}, \quad \bar{r}^j = \sum_{s=j}^{n} r_s, \quad j = l+1, \ldots, n.$$

Группы уравнений (2), (3), называемые *структурно выделенными,* структурно тождественны. Каждое уравнение одной из этих групп уравнений занимает определенное место в последовательности уравнений своей группы. Его правая часть не зависит от искомых функций, поведение которых описывается этим и всеми последующими уравнениями той же группы. Группа уравнений (1), в которую вошли все уравнения, не имеющие структурных особенностей указанного выше типа, будем называть *общей.* Она, как и группа уравнений (2), может отсутствовать. Необходимость в интегрировании систем такого типа возникает, например, в задачах небесной механики и физики высоких энергий.

В работах [2–4] предложено обобщение явного метода Рунге—Кутты для интегрирования структурно разделенных систем (1)–(3). В основе рассматриваемого обобщения лежит алгоритмическое использование выделенных структурных особенностей. Эффективность построенных методов определяется тем, что для общей группы уравнений (1) численное интегрирование по соотношению порядка метода (q) и минимально возможного числа этапов (m) тождественно методам Рунге—Кутты ($m > q$, $q \geqslant 5$), а для структурно выделенных групп уравнений (2), (3) предложенная модификация дает возможность уменьшить число этапов при сохранении порядка метода. Причем в случае отсутствия общей группы уравнений такое уменьшение еще более значительно. Так, метод пятого порядка получен не за шесть этапов, а за четыре [5], метод шестого порядка [6–10] — за шесть этапов вместо семи.

В настоящей работе для полной (содержащей общую группу уравнений) системы (1)–(3) (*полная каноническая форма*) строится экономичный метод шестого порядка: семистадийный по общей группе и шестистадийный по структурно выделенным.

Метод интегрирования. Считаем, что нам известно точное решение $y_s(x)$, $s = 0, 1, \ldots, n$, системы (1)–(3) в точке $x \in [X_0, X_k]$. Не умаляя общности рассуждений, для простоты вывода примем, что $r_s = 1$, $s = 0, 1, \ldots, n$.

Для численного интегрирования систем (1)–(3) рассмотрим явный одношаговый метод типа Рунге—Кутты, который в дальнейшем будем называть *структурным* и обозначать RKS. В предположении достаточной гладкости правой части изучаемой системы приближение z_s к точному решению $y_s(x+h)$, $s = 0, 1, \ldots, n$, в точке $x + h \in [X_0, X_k]$ ищем в виде

$$y_0(x+h) \approx z_0 = y_0(x) + \sum_{\nu=1}^{m_0} b_{0,\nu} k_{0,\nu}(h), \tag{4}$$

$$y_i(x+h) \approx z_i = y_i(x) + \sum_{\nu=1}^{m_1} b_{1,\nu} k_{i,\nu}(h), \quad i = 1, \ldots, l, \tag{5}$$

$$y_j(x+h) \approx z_j = y_j(x) + \sum_{\nu=1}^{m_2} b_{2,\nu} k_{j,\nu}(h), \quad j = l+1, \ldots, n, \tag{6}$$

причем $k_{s,w} \equiv k_{s,w}(h)$ вычисляются в строгой последовательности:

$$k_{0,1},\ k_{1,1},\ \ldots,\ k_{n,1},\ k_{0,2},\ k_{1,2},\ \ldots,\ k_{n,2},\ k_{0,3},\ k_{1,3},\ \ldots \tag{7}$$

по формулам

$$k_{0,\nu} = f_0\Bigg(x + c_{0,\nu}\, h, y_0(x) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_{00,0,\mu} k_{0,\mu},$$

$$y_1(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu-1}a_{01,1,\mu}k_{1,\mu},\ldots,y_l(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu-1}a_{01,l,\mu}k_{l,\mu},$$

$$y_{l+1}(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu-1}a_{02,l+1,\mu}k_{l+1,\mu},\ldots,y_n(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu-1}a_{02,n,\mu}k_{n,\mu}\Bigg),$$

$$k_{i,\nu}=f_i\Bigg(x+c_{1,\nu}\,h,y_0(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu}a_{10,0,\mu}k_{0,\mu},$$

$$y_1(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu}a_{11,1,\mu}k_{1,\mu},\ldots,y_{i-1}(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu}a_{11,i-1,\mu}k_{i-1,\mu},$$

$$y_{l+1}(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu-1}a_{12,l+1,\mu}k_{l+1,\mu},\ldots,y_n(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu-1}a_{12,n,\mu}k_{n,\mu}\Bigg),\quad i=1,2,\ldots,l,$$

$$k_{j,\nu}=f_j\Bigg(x+c_{2,\nu}\,h,y_0(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu}a_{20,0,\mu}k_{0,\mu},$$

$$y_1(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu}a_{21,1,\mu}k_{1,\mu},\ldots,y_l(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu}a_{21,l,\mu}k_{l,\mu},$$

$$y_{l+1}(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu}a_{22,l+1,\mu}k_{l+1,\mu},\ldots,y_{j-1}(x)+\sum_{\mu=1}^{\nu}a_{22,j-1,\mu}k_{j-1,\mu}\Bigg),\quad j=l+1,\ldots,n,$$

где $b_{u,\nu},c_{u,\nu},a_{uv,\nu,\mu}$ — параметры метода; h — шаг интегрирования.

Замечание. В соответствии с требованием алгоритма (7) для компонентов вектора числа этапов (стадий) $M=(m_0,m_1,m_2)$ структурного метода (4)–(6) характерными являются соотношения

$$m_0\geqslant m_1\geqslant m_2.$$

Выбор параметров метода осуществляется таким образом, чтобы для метода шестого порядка разложение погрешности метода (4)–(6) на шаге по степеням h

$$|y_s(x+h)-z_s|\approx O(h^7),\qquad s=0,1,\ldots,n,$$

начиналось с седьмой степени при выбранном числе этапов $M=(m_0,m_1,m_2)$.

Введем в рассмотрение векторы узлов $\{C_u\}_{m_u}$ и весовых коэффициентов $\{B_u\}_{m_u}$ и блочные матрицы $\{A_{uv}\}_{m_u\times m_u}$. Здесь u — номер группы, v — номер блока в пределах группы, $u,v\in\{0,1,2\}$:

$$C_u=\begin{pmatrix}c_{u,1}\\c_{u,2}\\\cdots\\c_{u,m_u}\end{pmatrix},\ B_u=\begin{pmatrix}b_{u,1}\\b_{u,2}\\\cdots\\b_{u,m_u}\end{pmatrix},\ A_{uv}=\begin{pmatrix}a_{uv,1,1}&&&\\a_{uv,2,1}&a_{uv,2,2}&&\\\cdots&\cdots&\cdots&\\a_{uv,m_u,1}&a_{uv,m_u,2}&\cdots&a_{uv,m_u,m_u}\end{pmatrix}.\quad(8)$$

Таким образом, в каждой выделенной группе содержится по три блока весовых параметров A_{uv}. Представление (в виде табл. 1) метода (4)–(6), который в дальнейшем будем обозначать RKS$q[m_0,m_1,m_2]$ (q — порядок метода), наглядно показывает структурные особенности системы, алгоритмическое их использование при реализации и выводе. Матрицы A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{12} — строго нижнетреугольные, а A_{10}, A_{20}, A_{11}, A_{21}, A_{22} — нижнетреугольные.

Таблица 1. **Метод RKS$q[m_0, m_1, m_2]$ интегрирования системы (1)–(3)**

C_u	A_{uv}			B_u
C_0	A_{00}	A_{01}	A_{02}	B_0
C_1	A_{10}	A_{11}	A_{12}	B_1
C_2	A_{20}	A_{21}	A_{22}	B_2

Если в исходной системе отсутствует одна любая $\kappa \in \{0, 1, 2\}$ из групп уравнений, то табличное представление не содержит параметров, связанных с этой группой: C_κ, B_κ, $A_{\kappa\kappa}$, $A_{u\kappa}$, $A_{\kappa v}$, $u, v \in \{0, 1, 2\} \backslash \{\kappa\}$.

При отсутствии же в исходной системе (1)–(3) структурно выделенных групп уравнений (2), (3) рассматриваемый метод вырождается в явный метод Рунге—Кутты с параметрами $A \equiv A_{00}$, $B \equiv B_0$, $C \equiv C_0$, $M \equiv m_0$.

Условия порядка. В рамках метода (4)–(6) шестого порядка как число условий порядка, связывающих параметры метода, так и количество самих параметров метода зависит от количества выделенных групп уравнений в исходной системе (1)–(3).

Известно, что условия порядка для семистадийного метода ($m_0 = 7$) Рунге—Кутты шестого порядка образуют систему 37 нелинейных уравнений с 35 неизвестными параметрами: C_0, B_0, A_{00}.

При построении шестиэтапных ($m_1 = 6$, $m_2 = 6$) методов шестого порядка [6–9] для систем (1)–(3), не содержащих общей группы уравнений (1), условия порядка образуют систему 74 нелинейных алгебраических уравнений с 61 неизвестным параметром C_1, C_2, B_1, B_2, A_{12}, A_{21} при $l = 1, n = 2$. Если же $l > 1, n - l > 1$, то число нелинейных уравнений в условиях порядка возрастает до 292, а неизвестных параметров C_1, C_2, B_1, B_2, $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ — до 103.

Условия порядка для метода RKS6[7, 6, 6] (4)–(6) интегрирования полной канонической формы (1)–(3) структурно разделенных уравнений с использованием предположений

$$\sum_{\xi=1}^{\eta} a_{uv,\nu,\xi} = c_{u,\nu}, \quad u, v \in \{0, 1, 2\}, \quad \nu = 1, \ldots, m_u, \tag{9}$$

$$\eta = \begin{cases} \nu - 1, & \text{если } (u, v) \in \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,2)\}, \\ \nu, & \text{если } (u, v) \in \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2)\}, \end{cases}$$

представляют собой систему 1224 нелинейных алгебраических уравнений, устанавливающих связь шести групповых параметров C_u, B_u с девятью блочными весовыми коэффициентами A_{uv} :

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} c_{q,\nu}^{v} = \frac{1}{v+1}, \quad v = 0, 1, \ldots, 5, \qquad q, p, r, e, t \in \{0, 1, 2\};$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} c_{q,\nu}^{\lambda} \sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} c_{p,\mu} = \frac{1}{2 \cdot (3+\lambda)}, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3;$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} c_{q,\nu}^{\lambda} \sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} c_{p,\mu}^{2} = \frac{1}{3(4+\lambda)}, \quad \lambda = 0, 1, 2;$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} c_{q,\nu}^{\lambda} \sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{pr,\mu,\xi} c_{r,\xi} = \frac{1}{6(4+\lambda)}, \quad \lambda = 0, 1, 2;$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} c_{q,\nu}^{\theta} \left(\sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} c_{p,\mu}\right) \cdot \left(\sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} c_{p,\mu}\right) = \frac{1}{4(5+\theta)}, \quad \theta = 0, 1;$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} c_{q,\nu}^{\theta} \sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} c_{p,\mu}^{3} = \frac{1}{4(5+\theta)}, \quad \theta = 0, 1;$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} \sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} c_{p,\mu}^{\lambda} \sum_{\xi} a_{pr,\mu,\xi} c_{r,\xi}^{u} = \frac{1}{10(\lambda+u)(1+u)},$$
$$(\lambda, u) \in \{(0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (2,1)\};$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} \sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} c_{p,\mu}^{\lambda} \sum_{\xi} a_{pr,\mu,\xi} c_{r,\xi}^{u} \sum_{\psi} a_{rs,\xi,\psi} c_{s,\psi}^{\rho} = \frac{1}{60(\lambda+2u+2\rho)},$$
$$(\lambda, u, \rho) \in \{(0,0,1), (1,0,1), (0,1,1)\};$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} \left(\sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} c_{p,\mu}\right) \cdot \left(\sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} c_{p,\mu}^{2}\right) = \frac{1}{36}, \tag{10}$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} \sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} c_{p,\mu}^{4} = \frac{1}{30},$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} \left(\sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{pr,\mu,\xi} c_{r,\xi}\right) \cdot \left(\sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} c_{p,\mu}\right) = \frac{1}{72},$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} c_{q,\nu} \sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{pr,\mu,\xi} c_{r,\xi}^{\lambda} = \frac{1}{24(1+\lambda)}, \quad \lambda = 1, 2;$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} \sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} \left(\sum_{\xi} a_{pr,\mu,\xi} c_{r,\xi}\right) \cdot \left(\sum_{\xi} a_{pr,\mu,\xi} c_{r,\xi}\right) = \frac{1}{120},$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} c_{q,\nu} \sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{pr,\mu,\xi} \sum_{\psi} a_{re,\xi,\psi} c_{e,\psi} = \frac{1}{144},$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} \sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{pr,\mu,\xi} \sum_{\psi} a_{re,\xi,\psi} c_{e,\psi}^{2} = \frac{1}{360},$$

$$\sum_{\nu} b_{q,\nu} \sum_{\mu} a_{qp,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{pr,\mu,\xi} \sum_{\psi} a_{re,\xi,\psi} \sum_{\phi} a_{et,\psi,\phi} c_{t,\phi} = \frac{1}{720}.$$

Количество параметров метода, подлежащих определению, равно 216.

Для поиска решения нелинейной системы сделаем первые предположения для весовых $b_{u,2}$ и узловых $c_{u,1}$ параметров:

$$b_{u,2} = 0, \quad c_{u,1} = 0, \quad u = 0, 1, 2. \tag{11}$$

Далее потребуем, чтобы искомые параметры метода удовлетворяли индивидуально подобранным (для каждой группы C_u, B_u и каждого блока весовых коэффициентов A_{uv}) упрощающим ограничениям. Такое условие связано с алгоритмическим использованием структурных особенностей, которое изменило структуру связей параметров в условиях порядка (9), (10). Блочный выбор упрощающих ограничений, представленный в форме табл. 2, демонстрирует это.

Таблица 2. **Упрощающие ограничения для условий порядка** (10)

$w=3,\ldots,7;\ \tau=0,1,2$	$\theta=0,1;\ \xi=1,2;\ \mu=2,\ldots,6$	$s=1,\ldots,6;\ p=3,\ldots,6$
$\sum\limits_{\nu=1}^{w-1} a_{00,w,\nu} c_{0,\nu}^{\tau} = \frac{c_{0,w}^{\tau+1}}{\tau+1}$, $\sum\limits_{\nu=3}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu}^{\xi} a_{00,\nu,2} = 0$, $\sum\limits_{\nu=s+1}^{7} b_{0,\nu} a_{00,\nu,s} =$ $= b_{0,s}\left(1-c_{0,s}\right)$	$\sum\limits_{\nu=1}^{w-1} a_{01,w,\nu} c_{1,\nu}^{\theta} = \frac{c_{0,w}^{\theta+1}}{\theta+1}$, $\sum\limits_{\nu=3}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu}^{2} a_{01,\nu,2} = 0$, $\sum\limits_{\nu=s+1}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu}^{\theta} a_{01,\nu,s} =$ $= \frac{b_{1,s}\left(1-c_{1,s}^{\theta+1}\right)}{\theta+1}$	$\sum\limits_{\nu=1}^{w-1} a_{02,w,\nu} c_{2,\nu}^{\theta} = \frac{c_{0,w}^{\theta+1}}{\theta+1}$, $\sum\limits_{\nu=3}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu}^{2} a_{02,\nu,2} = 0$, $\sum\limits_{\nu=s+1}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu}^{\theta} a_{02,\nu,s} =$ $= \frac{b_{2,s}\left(1-c_{2,s}^{\theta+1}\right)}{\theta+1}$
$\sum\limits_{\nu=1}^{\mu} a_{10,\mu,\nu} c_{0,\nu}^{\tau} = \frac{c_{1,\mu}^{\tau+1}}{\tau+1}$, $\sum\limits_{\nu=2}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu}^{\xi} a_{10,\nu,2} = 0$, $\sum\limits_{\nu=s}^{6} b_{1,\nu} a_{10,\nu,s} =$ $= b_{0,s}\left(1-c_{0,s}\right)$	$\sum\limits_{\nu=1}^{\mu} a_{11,\mu,\nu} c_{1,\nu}^{\theta} = \frac{c_{1,\mu}^{\theta+1}}{\theta+1}$, $\sum\limits_{\nu=2}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu}^{2} a_{11,\nu,2} = 0$, $\sum\limits_{\nu=s}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu}^{\theta} a_{11,\nu,s} =$ $= \frac{b_{1,p}\left(1-c_{1,p}^{\theta+1}\right)}{\theta+1}$	$\sum\limits_{\nu=1}^{p-1} a_{12,p,\nu} c_{2,\nu}^{\theta} = \frac{c_{1,p}^{\theta+1}}{\theta+1}$, $\sum\limits_{\nu=\mu}^{6} b_{1,\nu} a_{12,\nu,\mu-1} =$ $= b_{2,\mu-1}\left(1-c_{2,\mu-1}\right)$
$\sum\limits_{\nu=1}^{\mu} a_{20,\mu,\nu} c_{0,\nu}^{\tau} = \frac{c_{2,\mu}^{\tau+1}}{\tau+1}$, $\sum\limits_{\nu=2}^{6} b_{2,\nu} c_{2,\nu}^{\xi} a_{20,\nu,2} = 0$, $\sum\limits_{\nu=s}^{6} b_{2,\nu} a_{20,\nu,s} =$ $= b_{0,s}\left(1-c_{0,s}\right)$	$\sum\limits_{\nu=1}^{\mu} a_{21,\mu,\nu} c_{1,\nu}^{\theta} = \frac{c_{2,\mu}^{\theta+1}}{\theta+1}$, $\sum\limits_{\nu=2}^{6} b_{2,\nu} c_{2,\nu}^{2} a_{21,\nu,2} = 0$, $\sum\limits_{\nu=s}^{6} b_{2,\nu} c_{2,\nu}^{\theta} a_{21,\nu,s} =$ $= \frac{b_{1,s}\left(1-c_{1,s}^{\theta+1}\right)}{\theta+1}$	$\sum\limits_{\nu=1}^{\mu} a_{22,\mu,\nu} c_{2,\nu}^{\theta} = \frac{c_{2,\mu}^{\theta+1}}{\theta+1}$, $\sum\limits_{\nu=s}^{6} b_{2,\nu} c_{2,\nu}^{\theta} a_{22,\nu,s} =$ $= \frac{b_{2,s}\left(1-c_{2,s}^{\theta+1}\right)}{\theta+1}$

Использование упрощающих ограничений в рамках структурного подхода подробно рассматривалось в [1, 2]. Здесь, опуская детали, приведем лишь окончательный результат — систему-следствие, которая состоит из 47 уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{m_u} b_{u,\nu} c_{u,\nu}^{p} = \frac{1}{p+1}, \qquad u \in \{0,1,2\},\ p = 0,1,\ldots,5;$$

$$\sum_{\nu=5}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu} \sum_{\mu=4}^{\nu-1} a_{00,\nu,\mu} \sum_{\xi=3}^{\mu-1} a_{0\theta,\mu,\xi} c_{\theta,\xi}^{2} = \frac{1}{72}, \quad \theta = 0,1;$$

$$\sum_{\nu=4}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu-1} a_{00,\nu,\mu} c_{0,\mu}^{3} = \frac{1}{24};$$

$$\sum_{\nu=4}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu-1} a_{00,\nu,\mu} \sum_{\xi=2}^{\mu-1} a_{0\rho,\mu,\xi} c_{\rho,\xi}^{2} = \frac{1}{72}, \quad \rho = 1,2;$$

$$\sum_{\nu=4}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu}^{2} \sum_{\mu=3}^{\nu-1} a_{01,\nu,\mu} c_{1,\mu}^{2} = \frac{1}{18};$$

$$\sum_{\nu=3}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu}^{2} \sum_{\mu=2}^{\nu-1} a_{02,\nu,\mu} c_{2,\mu}^{2} = \frac{1}{18};$$

$$\sum_{\nu=4}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu} a_{10,\nu,\mu} \sum_{\xi=3}^{\mu-1} a_{00,\mu,\xi} c_{0,\xi}^2 = \frac{1}{72};$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{\rho,\nu} c_{\rho,\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu} a_{\rho 0,\nu,\mu} c_{0,\mu}^3 = \frac{1}{24}, \quad \rho = 1, 2;$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu} a_{10,\nu,\mu} \sum_{\xi=2}^{\mu-1} a_{0\rho,\mu,\xi} c_{\rho,\xi}^2 = \frac{1}{72}, \quad \rho = 1, 2;$$

$$\sum_{\nu=4}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=4}^{\nu} a_{10,\nu,\mu} \sum_{\xi=3}^{\mu-1} a_{01,\mu,\xi} c_{1,\xi}^2 = \frac{1}{72};$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu}^2 \sum_{\mu=3}^{\nu} a_{10,\nu,\mu} c_{0,\mu}^2 = \frac{1}{18};$$

$$\sum_{\nu=4}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu-1} a_{12,\nu,\mu} \sum_{\xi=3}^{\mu} a_{20,\mu,\xi} c_{0,\xi}^2 = \frac{1}{72};$$

$$\sum_{\nu=4}^{6} b_{2,\nu} c_{2,\nu} \sum_{\mu=4}^{\nu} a_{20,\nu,\mu} \sum_{\xi=3}^{\mu-1} a_{0\theta,\mu,\xi} c_{\theta,\xi}^2 = \frac{1}{72}, \quad \theta = 0, 1;$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{2,\nu} c_{2,\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu} a_{20,\nu,\mu} \sum_{\xi=2}^{\mu-1} a_{0\rho,\mu,\xi} c_{\rho,\xi}^2 = \frac{1}{72}, \quad \rho = 1, 2;$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu}^2 \sum_{\mu=2}^{\nu} a_{11,\nu,\mu} c_{1,\mu}^2 = \frac{1}{18};$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu}^2 \sum_{\mu=2}^{\nu-1} a_{12,\nu,\mu} c_{2,\mu}^2 = \frac{1}{18};$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=2}^{\nu-1} a_{12,\nu,\mu} c_{2,\mu}^r = \frac{1}{(1+r)(3+r)}, \quad r = 1, 2, 3;$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=2}^{\nu-1} a_{12,\nu,\mu} \sum_{\xi=2}^{\mu} a_{2\rho,\mu,\xi} c_{\rho,\xi}^2 = \frac{1}{72}, \quad \rho = 1, 2;$$

$$\sum_{\nu=4}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu-1} a_{12,\nu,\mu} \sum_{\xi=3}^{\mu} a_{21,\mu,\xi} c_{1,\xi}^2 = \frac{1}{72};$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{2,\nu} c_{2,\nu}^2 \sum_{\mu=2}^{\nu} a_{2\rho,\nu,\mu} c_{\rho,\mu}^2 = \frac{1}{18}, \quad \rho = 1, 2,$$

и 198 упрощающих ограничений, представленных в табл. 2.

Общее число уравнений системы-следствия в 5 раз меньше исходной системы условий порядка и равно 245. Число неизвестных параметров $c_{u,\nu}, b_{u,\nu}, a_{uv,\nu,g},\ u, v \in \{0, 1, 2, \}$, с учетом (9), (11) сократилось до 210. Однако система-следствие сохранила характерные структурные особенности исходной системы условий порядка (10):

разбиение на блоки, а также нелинейность связей неизвестных параметров метода внутри девяти блоков и между ними.

Теорема. *В рамках метода* (4)–(6) *при интегрировании полной канонической формы* (1)–(3)*систем структурно разделенных уравнений существует метод шестого порядка* RKS6[7, 6, 6] *с числом этапов* $M = (7, 6, 6)$.

Для д о к а з а т е л ь с т в а этого утверждения достаточно найти любое частное решение системы-следствия. Фиксируем часть узловых параметров

$$c_{0,2} = a_{00,2,1} = a_{01,2,1} = a_{02,2,1} = \frac{2}{15}, \quad c_{1,2} = c_{2,2} = c_{0,3} = c_{1,3} = \frac{1}{5},$$

$$c_{2,3} = c_{0,4} = \frac{1}{3}, \quad c_{0,5} = \frac{2}{3}, \quad c_{0,7} = c_{1,6} = c_{2,6} = 1.$$

Полагая $c_{2,4} = \alpha$, $c_{0,6} = \beta$ ($\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1]$), находим еще неопределенные узловые параметры $c_{1,4}$, $c_{1,5}$, $c_{2,5}$ из условий совместности уравнений системы-следствия:

$$c_{1,4} = \frac{5\,\alpha - 2}{5\,(2\,\alpha - 1)}, \quad c_{1,5} = c_{2,5} = \frac{4\,\alpha - 3}{5\,\alpha - 4}.$$

Большая размерность нелинейной системы-следствия со 190 неизвестными параметрами $b_{u,\nu}$, $a_{uv,\nu,g}$ вынуждает опустить ход построения решения и ограничиться лишь приведением его результата — самого решения.

При таким образом определенных узловых параметрах $c_{v,w}$ оно образует двухпараметрическое (относительно α и β) семейство методов RKS6[7, 6, 6](α, β):

$$b_{0,1} = \frac{3+5\beta}{120\beta}, \quad b_{0,2} = 0, \quad b_{0,3} = \frac{625(1-2\beta)}{672(1-5\beta)}, \quad b_{0,4} = \frac{27}{80(3\beta-1)},$$

$$b_{0,5} = \frac{27}{280}\frac{(11-15\beta)}{(2-3\beta)}, \quad b_{0,7} = \frac{50\beta-47}{480(\beta-1)}, \quad b_{0,6} = 1 - \sum_{\nu=1,\,\nu\neq 6}^{7} b_{0,\nu},$$

$$b_{1,1} = \frac{15\alpha^2 - 18\alpha + 5}{12\,(5\alpha-2)(4\alpha-3)}, \quad b_{1,2} = 0, \quad b_{1,3} = \frac{125(1+5\alpha^2-5\alpha)}{48(3\alpha-1)(15\alpha-11)},$$

$$b_{1,6} = \frac{15\alpha^2 - 27\alpha + 11}{48(5\alpha-3)(\alpha-1)}, \quad b_{1,4} = \frac{125(2\alpha-1)^5}{12(3\alpha-1)(15\alpha^2-20\alpha+7)(5\alpha-2)(5\alpha-3)},$$

$$b_{2,1} = \frac{1-20\alpha+25\alpha^2}{60\alpha(4\alpha-3)}, \quad b_{2,2} = 0, \quad b_{2,4} = \frac{1}{60(3\alpha-1)(3+5\alpha^2-8\alpha)\alpha(\alpha-1)},$$

$$b_{2,3} = \frac{81(1+5\alpha^2-5\,\alpha)}{40(3\alpha-1)\,(7\alpha-5)}, \quad b_{2,6} = \frac{9-15\alpha+5\alpha^2}{120(\alpha-1)^2}, \quad b_{\xi,5} = 1 - \sum_{\nu=1,\,\nu\neq 5}^{6} b_{\xi,\nu}, \;\; \xi = 1, 2.$$

Дополнительные ограничения ($0 \leqslant c_{q,\nu} \leqslant 1$ и $0 \leqslant b_{q,\nu} \leqslant 1$) на узловые и весовые параметры метода сужают область определения α и β :

$$\alpha \in \left(\frac{2-\sqrt{3}}{5}, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{5-\sqrt{5}}{10}\right), \qquad \beta \in \left(\frac{11}{15}, \frac{47}{50}\right). \tag{12}$$

Выпишем параметры девяти блоков A_{uv}, u, $v \in \{0,1,2\}$ метода RKS6[7, 6, 6] :

параметры блока A_{00} :

$$a_{00,3,1}=\frac{1}{20},\quad a_{00,7,2}=\frac{15(10\beta-7)}{4(50\beta-47)},\quad a_{00,4,2}=\frac{-5}{36},$$

$$a_{00,6,1}=-\frac{\beta(180\beta^3-221\beta^2+77\beta-9)}{4},\quad a_{00,6,2}=\frac{15\,\beta\,(5\,\beta^2-5\,\beta+1)}{4},\quad a_{00,5,1}=\frac{23}{54},$$

$$a_{00,6,4}=\frac{9\beta(4\beta-3)(3\beta-1)(1-5\beta)}{4},\quad a_{00,7,5}=\frac{36(45\beta^2-72\beta+29)}{7(3\beta-2)(50\beta-47)},\quad a_{00,5,2}=\frac{-5}{18},$$

$$a_{00,6,5}=\frac{3(3\beta-2)(3\beta-1)\beta(5\,\beta-1)}{7},\quad a_{00,7,1}=\frac{350\,\beta^2-317\,\beta+48}{4\,\beta\,(47-50\,\beta)},\quad a_{00,5,3}=\frac{-35}{54},$$

$$a_{00,7,3}=\frac{10(1025\beta^2-1185\beta+316)}{7(5\beta-1)(50\beta-47)},\quad a_{00,7,4}=\frac{54(5\beta-3)(3\beta-2)}{(1-3\beta)(50\beta-47)},\quad a_{00,4,1}=\frac{11}{108};$$

параметры блока A_{01} :

$$a_{01,3,1}=\frac{1}{10},\quad a_{01,4,1}=\frac{1}{18},\quad a_{01,4,2}=\frac{-5}{54},\quad a_{01,5,2}=\frac{-5}{27},\quad a_{01,7,6}=0,$$

$$a_{01,5,1}=\frac{10\alpha-11}{27(5\alpha-2)},\quad a_{01,6,5}=\frac{5\beta(3\beta-2)(5\beta-1)(\alpha-1)(5\alpha-4)^3(3\beta-1)}{6(15\alpha-11)(4\alpha-3)(15\alpha^2-20\alpha+7)},$$

$$a_{01,5,3}=\frac{35\alpha}{27(3\alpha-1)},\quad a_{01,7,3}=\frac{20((25\,\beta-30)\alpha^2+(77-85\,\beta)\alpha+(50\,\beta-41)}{(3\alpha-1)(15\alpha-11)(50\beta-47)},$$

$$a_{01,6,2}=\frac{5\beta(5\beta^2-5\beta+1)}{2},\quad a_{01,7,1}=\frac{(-200\beta+140)\alpha^2+(650\beta-483)\alpha-380\beta+286}{2(50\beta-47)(4\alpha-3)(5\alpha-2)},$$

$$a_{01,7,2}=\frac{5(10\beta-7)}{2(50\beta-47)},\quad a_{01,7,5}=\frac{20(10\alpha\beta-9\alpha-8\beta+7)(5\alpha-4)^3}{(50\beta-47)(4\alpha-3)(15\alpha-11)(15\alpha^2-20\alpha+7)},$$

$$a_{01,6,3}=\frac{5(5\beta-1)(\alpha^2(225\beta^2-450\beta+215)-\alpha(405\beta^2-660\beta+271)+180\beta^2-246\beta+84)\beta}{6(15\alpha-11)(3\alpha-1)},$$

$$a_{01,6,4}=\frac{5\beta(\beta(75\alpha^2-135\alpha+60)-65\alpha^2+110\alpha-47)(3\beta-1)(1-5\beta)(2\alpha-1)^2}{6(3\alpha-1)(5\alpha-2)(15\alpha^2-20\alpha+7)};$$

параметры блока A_{02} :

$$a_{02,3,1}=\frac{1}{10},\quad a_{02,4,1}=\frac{1}{18},\quad a_{02,4,2}=\frac{5}{18},\quad a_{02,7,6}=0,$$

$$a_{02,6,3}=\frac{3((15\alpha^2-27\alpha+12)\beta-3\alpha^2+13\alpha-8)\,\beta(3\beta-1)(1-5\beta)}{2(3\,\alpha-1)(7\alpha-5)},$$

$$a_{02,5,1}=\frac{2(5\beta+1)\alpha-7+7\beta}{9(15\beta-11)\alpha},\quad a_{02,6,4}=\frac{(5\beta-1)(3\beta-1)(15\alpha(1-\beta)+12\beta-11)\beta}{6\alpha(3\alpha-1)(5\alpha-3)},$$

$$a_{02,5,2}=\frac{5(5\,\beta+1)}{9(11-15\beta)},\quad a_{02,7,4}=\frac{4((15\alpha^2-24\alpha+11)\beta-15\alpha^2+23\alpha-10)}{\alpha(50\beta-47)(3\alpha-1)(5\alpha-3)(1-\alpha)},$$

$$a_{02,5,4}=\frac{-7+7\,\beta}{9(3\alpha-1)\alpha(15\beta-11)},\quad a_{02,6,5}=\frac{(3\beta-1)(5\alpha-4)^3(5\beta-1)(3\beta-2)\beta}{6(5\alpha-3)(7\alpha-5)(4\alpha-3)},$$

$$a_{02,6,2}=\frac{5\beta(15\beta^2-5\beta+1)}{6},\quad a_{02,7,3}=\frac{108(5\alpha-4)(1-\alpha)\beta+108\alpha^2-468\alpha+288}{(7\alpha-5)(50\beta-47)(3\alpha-1)},$$

$$a_{02,7,2}=\frac{5(10\beta+1)}{2(50\beta-47)},\quad a_{02,7,1}=\frac{(120\beta-180)\alpha^2+(241-206\beta)\alpha+88\beta-80}{2(4\alpha-3)(50\beta-47)\alpha};$$

параметры блока A_{10} :

$$a_{10,2,1}=\frac{1}{20},\quad a_{10,3,1}=\frac{1}{20},\quad a_{10,3,2}=\frac{3}{20},$$

$$a_{10,4,1}=\frac{(5\,\alpha-2)(35\alpha^2-31\alpha+7)}{100(2\,\alpha-1)^3},\quad a_{10,6,4}=\frac{(-225\alpha^2+630\alpha-279)\beta+345\alpha^2-642\alpha+255}{5(3\beta-1)(15\alpha^2-27\alpha+11)},$$

$$a_{10,4,2}=\frac{3(2-5\alpha)(5\alpha^2-5\alpha+1)}{20(2\,\alpha-1)^3},\quad a_{10,6,1}=\frac{(75\beta+120)\alpha^2+(45\beta-192)\alpha-49\beta+72}{20\beta(15\alpha^2-27\alpha+11)},$$

$$a_{10,4,3}=\frac{(\alpha-1)(3\alpha-1)(5\alpha-2)}{4(2\alpha-1)^3},\quad a_{10,6,3}=\frac{25\,((45\alpha^2-90\alpha+35)\beta-39\alpha^2+66\alpha-25)}{7(5\beta-1)(15\alpha^2-27\alpha+11)},$$

$$a_{10,5,2} = \frac{15(4\alpha-3)(5\alpha^2-5\alpha+1)}{4(5\alpha-4)^3}, \quad a_{10,6,5} = \frac{18(5\alpha-3)((15\alpha-21)\beta-13\alpha+17)}{35(-2+3\beta)(15\alpha^2-27\alpha+11)},$$
$$a_{10,5,3} = \frac{25\alpha(\alpha+1)(15\alpha-11)(4\alpha-3)}{28(5\alpha-4)^4}, \quad a_{10,5,4} = \frac{3\,(11-15\,\alpha)\,(4\,\alpha-3)\,(5\,\alpha^2+25\,\alpha-16)}{20\,(5\,\alpha-4)^4},$$
$$a_{10,6,2} = -\frac{15\,(5\,\alpha^2-5\,\alpha+1)}{4\,(15\,\alpha^2-27\,\alpha+11)}, \quad a_{10,5,1} = \frac{(3-4\alpha)(575\alpha^3-655\alpha^2+95\alpha+56)}{20(5\alpha-4)^4};$$

параметры блока A_{11} :

$$a_{11,2,1} = \frac{1}{10}, \quad a_{11,3,1} = \frac{1}{10}, \quad a_{11,3,2} = a_{11,4,2} = a_{11,5,2} = a_{11,6,2} = a_{11,6,6} = 0,$$
$$a_{11,4,1} = -\frac{1}{30\,(2\,\alpha-1)}, \quad a_{11,4,3} = \frac{5\alpha-2}{6(2\alpha-1)}, \quad a_{11,5,5} = \frac{\alpha-1}{2(5\alpha-4)},$$
$$a_{11,5,4} = \frac{5(4\,\alpha-3)(15\alpha-11)\,(2\,\alpha-1)^3}{3(3\,\alpha-1)(5\alpha-4)^3(5\alpha-2)}, \quad a_{11,6,3} = \frac{5(525\alpha^4-1385\alpha^3+1380\alpha^2-615\alpha+103)}{6(15\alpha-11)(3\alpha-1)(15\alpha^2-27\alpha+11)},$$
$$a_{11,5,3} = \frac{5(4\,\alpha-3)(15\,\alpha^3-35\,\alpha^2+20\,\alpha-2)}{6\,(3\,\alpha-1)(5\alpha-4)^3}, \quad a_{11,6,1} = -\frac{200\alpha^4-405\alpha^3+339\alpha^2-151\alpha+30}{6(5\alpha-2)(4\alpha-3)(15\alpha^2-27\alpha+11)},$$
$$a_{11,6,4} = \frac{10\,(2\alpha-1)^3(5\alpha^2-20\,\alpha+11)}{3(15\alpha^2-20\alpha+7)(3\alpha-1)(15\alpha^2-27\alpha+11)\,(5\,\alpha-2)};$$

параметры блока A_{12} :

$$a_{12,2,1} = \frac{1}{5}, \quad a_{12,3,1} = \frac{1}{10}, \quad a_{12,5,4} = \frac{2\,(15\,\alpha-11)(4\alpha-3)(15\alpha^2-20\alpha+7)}{5\,(5\alpha-4)^4(3\alpha-1)(5\alpha-1)\alpha},$$
$$a_{12,4,1} = \frac{(5\,\alpha-2)(5\alpha^2-3\alpha+1)}{50(2\alpha-1)^3}, \quad a_{12,5,1} = \frac{(4\,\alpha-3)(1375\alpha^4-3925\alpha^3+4075\alpha^2-1840\alpha+308)}{10\,\alpha(5\alpha-4)^4},$$
$$a_{12,4,2} = \frac{(5\alpha-2)(5\alpha^2-10\alpha+3)}{20(2\alpha-1)^3}, \quad a_{12,5,3} = \frac{3\,(15\,\alpha-11)(4\alpha-3)(525\alpha^3-1150\alpha^2+805\alpha-184)}{20(5\alpha-4)^4(3\,\alpha-1)},$$
$$a_{12,6,2} = \frac{5(325\alpha^3-740\alpha^2+540\alpha-129)}{2(5\alpha-1)\,(15\alpha^2-27\alpha+11)}, \quad a_{12,6,1} = -\frac{1900\alpha^4-5715\alpha^3+6315\alpha^2-3059\alpha+552}{10\alpha(4\alpha-3)(15\alpha^2-27\alpha+11)},$$
$$a_{12,6,4} = -\frac{4(50\alpha^2-65\alpha+23)}{5\alpha(3\alpha-1)(5\alpha-1)(15\alpha^2-27\alpha+11)}, \quad a_{12,6,5} = \frac{4(5\alpha-4)^4}{5(7\alpha-5)(4\alpha-3)(15\alpha^2-27\alpha+11)};$$

параметры блока A_{20} :

$$a_{20,2,1} = \frac{1}{20}, \quad a_{20,3,1} = \frac{11}{108}, \quad a_{20,3,2} = \frac{-5}{36}, \quad a_{20,4,1} = \frac{\alpha(5\alpha^2-\alpha+1)}{4}, \quad a_{20,4,2} = \frac{15\alpha(5\alpha^2-5\alpha+1)}{4},$$
$$a_{20,4,3} = -\frac{5\alpha(5\alpha-1)(5\alpha-3)}{4}, \quad a_{20,5,3} = -\frac{5(5\alpha-3)(4\alpha-3)(105\alpha^2-85\alpha+8)}{28(5\alpha-4)^4},$$
$$a_{20,5,4} = \frac{3(7\alpha-5)(4\alpha-3)(15\alpha^2-19\alpha+8)}{4(5\alpha-4)^4}, \quad a_{20,6,1} = \frac{(-5\alpha^2+9\alpha-9)\beta+12\alpha^2-24\alpha+12}{4(5\alpha^2-15\alpha+9)\beta},$$
$$a_{20,5,1} = \frac{(4\alpha-3)(5\alpha^3-13\alpha^2+29\alpha-16)}{4(5\alpha-4)^4}, \quad a_{20,6,5} = \frac{9(15\alpha\beta-13\alpha-21\beta+17)(\alpha-1)}{7(5\alpha^2-15\alpha+9)(3\beta-2)},$$
$$a_{20,6,2} = -\frac{15\,(5\,\alpha^2-5\,\alpha+1)}{4\,(5\,\alpha^2-15\,\alpha+9)}, \quad a_{20,6,3} = \frac{(2875\,\alpha^2-3750\,\alpha+1575)\,\beta-1325\,\alpha^2+2250\,\alpha-1065}{14\,(5\,\alpha^2-15\,\alpha+9)\,(-1+5\,\beta)},$$
$$a_{20,5,2} = \frac{15\,(4\,\alpha-3)\,(5\,\alpha^2-5\,\alpha+1)}{4\,(5\,\alpha-4)^3}, \quad a_{20,6,4} = \frac{(-135\,\alpha^2+198\,\alpha-99)\,\beta+99\,\alpha^2-174\,\alpha+87}{2\,(3\,\beta-1)\,(5\,\alpha^2-15\,\alpha+9)};$$

параметры блока A_{21} :

$$a_{21,2,1} = \frac{1}{10}, \; a_{21,3,1} = \frac{1}{18}, \; a_{21,3,2} = \frac{-5}{54}, \; a_{21,4,1} = \frac{(150\alpha^3-230\alpha^2+110\alpha-17)\alpha}{6(5\alpha-2)}, \; a_{21,6,6} = 0,$$
$$a_{21,6,2} = -\frac{5(5\alpha^2-5\alpha+1)}{2(5\alpha^2-15\alpha+9)}, \quad a_{21,6,5} = \frac{5(5\alpha-4)^4(\alpha-1)^2}{(15\alpha-11)(4\alpha-3)(15\,\alpha^2-20\alpha+7)(5\alpha^2-15\alpha+9)},$$

$$a_{21,4,2}=\frac{5\alpha(5\alpha^2-5\alpha+1)}{2},\qquad a_{21,6,3}=\frac{5(600\alpha^4-1365\alpha^3+1150\alpha^2-433\alpha+64)}{3(15\alpha-11)(3\alpha-1)(5\alpha^2-15\alpha+9)},$$
$$a_{21,4,3}=\frac{5\alpha(1-5\alpha-1)(5\alpha-4)}{6},\qquad a_{21,5,4}=\frac{5(2\alpha-1)^2(7\alpha-5)(15\alpha^2-15\alpha+4)(4\alpha-3)}{3(3\alpha-1)(5\alpha-2)(5\alpha-4)^2(15\alpha^2-20\alpha+7)},$$
$$a_{21,5,1}=\frac{135\alpha^3-220\alpha^2+122\alpha-24}{6(5\alpha-2)(5\alpha-4)^2},\qquad a_{21,6,1}=-\frac{(5\alpha-4)(90\alpha^3-115\alpha^2+47\alpha-9)}{6(5\alpha-2)(4\alpha-3)(5\alpha^2-15\alpha+9)},$$
$$a_{21,5,2}=\frac{5(4\alpha-3)(5\alpha^2-5\alpha+1)}{2(5\alpha-4)^3},\qquad a_{21,5,5}=\frac{5(5\alpha-3)(7\alpha-5)(\alpha-1)^2}{2(15\alpha-11)(5\alpha-4)(15\alpha^2-20\alpha+7)};$$

параметры блока A_{22} :

$$a_{22,2,1}=\frac{1}{10},\quad a_{22,3,1}=\frac{1}{18},\quad a_{22,3,2}=\frac{5}{18},\quad a_{22,4,3}=0,\quad a_{22,4,1}=\frac{1-2\alpha}{6},\quad a_{22,4,2}=\frac{5\,\alpha}{6},$$
$$a_{22,5,2}=-\frac{5(225\alpha^3-510\alpha^2+370\alpha-86)(4\alpha-3)}{6(5\alpha-4)^4},\qquad a_{22,5,4}=\frac{(7\alpha-5)(4\alpha-3)(3\alpha-2)}{3\alpha(5\alpha-4)^4(3\alpha-1)},$$
$$a_{22,5,3}=\frac{27(4\alpha-3)(\alpha-1)(5\alpha-3)(5\alpha^2-5\alpha+1)}{(5\alpha-4)^4(3\alpha-1)},\qquad a_{22,5,5}=\frac{\alpha-1}{2(5\alpha-4)},\qquad a_{22,6,6}=0,$$
$$a_{22,6,5}=\frac{(\alpha-1)(5\alpha-4)^4}{(5\alpha^2-15\alpha+9)(5\alpha-3)(7\alpha-5)(4\alpha-3)},\qquad a_{22,6,2}=\frac{5(45\alpha^2-75\alpha+29)}{6(5\alpha^2-15\alpha+9)},$$
$$a_{22,6,3}=\frac{54(\alpha-1)(2\alpha-1)(5\alpha^2-5\alpha+1)}{(5\alpha^2-15\alpha+9)(1-3\alpha)(7\alpha-5)},\qquad a_{22,6,4}=\frac{30\alpha^2-35\alpha+9}{3\alpha(5\alpha^2-15\alpha+9)(5\alpha-3)(1-3\,\alpha)}.$$

Еще неопределенные 44 параметра метода: $a_{00,3,2}$, $a_{00,4,3}$, $a_{00,5,4}$, $a_{00,6,3}$, $a_{00,7,6}$, $a_{01,3,2}$, $a_{01,4,3}$, $a_{01,5,4}$, $a_{01,6,1}$, $a_{01,7,4}$, $a_{02,3,2}$, $a_{02,4,3}$, $a_{02,5,3}$, $a_{02,6,1}$, $a_{02,7,5}$, $a_{10,2,2}$, $a_{10,3,3}$, $a_{10,4,4}$, $a_{10,5,5}$, $a_{10,6,6}$, $a_{11,2,2}$, $a_{11,3,3}$, $a_{11,4,4}$, $a_{11,5,1}$, $a_{11,6,5}$, $a_{20,2,2}$, $a_{20,3,3}$, $a_{20,4,4}$, $a_{20,5,5}$, $a_{20,6,6}$, $a_{21,2,2}$, $a_{21,3,3}$, $a_{21,4,4}$, $a_{21,5,3}$, $a_{21,6,4}$, $a_{22,2,2}$, $a_{22,3,3}$, $a_{22,4,4}$, $a_{22,5,1}$, $a_{22,6,1}$, $a_{12,3,2}$, $a_{12,4,3}$, $a_{12,5,2}$, $a_{12,6,3}$ находим из ограничений (9):

$$a_{uv,\nu,s}=c_{u,\nu}-\sum_{\xi,\,\xi\neq s}a_{uv,\nu,\xi},\qquad s,\nu\in\{1,\dots,7\}.$$

Значения всех параметров метода шестого порядка определены. Представленное двухпараметрическое семейство RKS6$[7,6,6](\alpha,\beta)$ успешно прошло аналитическую проверку как на системе-следствии, так и на исходной системе условий порядка, что и доказывает утверждение теоремы.

При значениях параметров $\alpha=1/4$, $\beta=7/9$, удовлетворяющих ограничениям (12), в матричной форме (8) выписана расчетная схема RKS6$[7,6,6](1/4,\,7/9)$ шестого порядка:

$$C_0=\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{15}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{7}{9}\\ 1\end{pmatrix},\quad B_0=\begin{pmatrix}\frac{31}{420}\\ 0\\ \frac{3125}{17472}\\ \frac{81}{320}\\ \frac{27}{140}\\ \frac{6561}{29120}\\ \frac{73}{960}\end{pmatrix},\quad A_{00}=\begin{pmatrix}0 &&&&&\\ \frac{2}{15} &&&&&\\ \frac{1}{20} & \frac{3}{20} &&&&\\ \frac{11}{108} & \frac{-5}{36} & \frac{10}{27} &&&\\ \frac{23}{54} & \frac{-5}{18} & \frac{-35}{54} & \frac{7}{6} &&\\ \frac{-119}{324} & \frac{385}{972} & \frac{260}{243} & \frac{-182}{243} & \frac{104}{243} &\\ \frac{1067}{2044} & \frac{-105}{292} & \frac{-5830}{6643} & \frac{108}{73} & \frac{-216}{511} & \frac{4374}{6643}\end{pmatrix},$$

$$A_{01} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ \frac{2}{15} & & & & & \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & & & & \\ \frac{1}{18} & \frac{-5}{54} & \frac{10}{27} & & & \\ \frac{34}{81} & \frac{-5}{27} & \frac{-5}{27} & \frac{140}{81} & & \\ \frac{749}{6561} & \frac{385}{1458} & \frac{20930}{21141} & \frac{-58240}{102789} & \frac{605605}{1987254} & \\ \frac{44}{219} & \frac{-35}{146} & \frac{140}{2117} & \frac{4160}{10293} & \frac{113135}{198998} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{02} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ \frac{2}{15} & & & & & \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & & & & \\ \frac{1}{18} & \frac{5}{18} & 0 & & & \\ \frac{16}{27} & \frac{-110}{27} & 0 & \frac{112}{27} & & \\ \frac{-308}{729} & \frac{5845}{1458} & \frac{56}{81} & \frac{-8320}{2187} & \frac{1331}{4374} & \\ \frac{29}{73} & \frac{-395}{146} & \frac{-648}{949} & \frac{5248}{1533} & \frac{22627}{39858} & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{8}{11} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \frac{23}{288} \\ 0 \\ \frac{125}{1392} \\ \frac{1000}{2961} \\ \frac{161051}{392544} \\ \frac{83}{1008} \end{pmatrix}, \quad A_{10} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & & & & \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & 0 & & & \\ \frac{69}{800} & \frac{-9}{160} & \frac{9}{32} & \frac{-9}{800} & & \\ \frac{6118}{73205} & \frac{30}{1331} & \frac{7250}{102487} & \frac{26274}{73205} & \frac{98136}{512435} & \\ \frac{119}{1660} & \frac{-15}{332} & \frac{250}{1079} & \frac{51}{166} & \frac{-72}{415} & \frac{6561}{10790} \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & & & & \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} & & & \\ \frac{1}{15} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{60} & & \\ \frac{3637}{23958} & 0 & \frac{-1340}{3993} & \frac{9280}{11979} & \frac{3}{22} & \\ \frac{-505}{2988} & 0 & \frac{20365}{14442} & \frac{-32320}{35109} & \frac{307461}{452516} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \frac{1}{5} & & & & \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & & & \\ \frac{27}{400} & \frac{39}{160} & \frac{-9}{800} & & \\ \frac{-47852}{73205} & \frac{195970}{14641} & \frac{516954}{73205} & \frac{-1395712}{73205} & \\ \frac{1601}{415} & \frac{-11255}{166} & \frac{-36555}{1079} & \frac{40448}{415} & \frac{14641}{10790} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{8}{11} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{160} \\ 0 \\ \frac{81}{520} \\ \frac{256}{945} \\ \frac{161051}{393120} \\ \frac{89}{1080} \end{pmatrix}, \quad A_{20} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & & & & \\ \frac{11}{108} & -\frac{5}{36} & \frac{10}{27} & & & \\ \frac{17}{256} & \frac{15}{256} & \frac{35}{256} & -\frac{3}{256} & & \\ \frac{1214}{14641} & \frac{30}{1331} & \frac{1070}{14641} & \frac{5226}{14641} & \frac{2808}{14641} & \\ \frac{181}{2492} & -\frac{15}{356} & \frac{1810}{8099} & \frac{111}{356} & -\frac{108}{623} & \frac{19683}{32396} \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & & & & \\ \frac{1}{18} & \frac{-5}{54} & \frac{10}{27} & & & \\ \frac{49}{576} & \frac{5}{128} & \frac{55}{384} & \frac{-5}{288} & & \\ \frac{329}{2178} & \frac{20}{1331} & \frac{-40240}{115797} & \frac{39520}{51183} & \frac{4095}{29986} & \\ \frac{-1067}{6408} & \frac{-5}{178} & \frac{11060}{7743} & \frac{-34360}{37647} & \frac{658845}{970456} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22}=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & & & & \\ \frac{1}{18} & \frac{5}{18} & 0 & & & \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{24} & 0 & \frac{-1}{24} & & \\ \frac{14093}{87846} & \frac{-27980}{43923} & \frac{4536}{14641} & \frac{33280}{43923} & \frac{3}{22} & \\ \frac{-407}{2136} & \frac{1045}{534} & \frac{-324}{1157} & \frac{-2176}{1869} & \frac{43923}{64792} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тестирование. Для проведения численного тестирования на решении $y_0(x) = \exp\left(4\sin x^2\right)$, $y_1(x) = \exp\left(5\sin x^2\right)$, $y_2(x) = \exp\left(\sin x^2\right)$, $y_3(x) = \cos\left(x^2\right)$, $y_4(x) = \sin\left(x^2\right) + 1$, все компоненты которого удовлетворяют начальным условиям $y_s(0) = 1$, $s = 0, 1, \ldots, 4$, построена система дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{lll} y_0^{'} & = x\,y_3\left(y_1\,y_2^{-1} + 7\,y_0\right) & = f_0(x, y_0, y_1, y_2, y_3), \\ y_1^{'} & = 10x\,\exp(5(y_4 - 1))y_3 & = f_1(x, y_3, y_4), \\ y_2^{'} & = 2x\,y_1^{\frac{1}{5}}\,y_3 + \dfrac{1}{4}\ln y_0 - y_4 + 1 & = f_2(x, y_0, y_1, y_3, y_4), \\ y_3^{'} & = -\dfrac{2}{5}x\,\ln\left(y_0\,y_2\right) & = f_3(x, y_0, y_2), \\ y_4^{'} & = 2x\,y_0\,y_1^{-1}\,y_2\,y_3 & = f_4(x, y_0, y_1, y_2, y_3), \\ y_i(0) & = 1,\ x \in [0, T_k],\ i = 0, 1, \ldots, 4, & F = (f_0, f_1, \ldots, f_4)^T. \end{array} \tag{13}$$

Тестовая задача (13) содержит все три группы уравнений полной канонической формы системы (1)–(3). Общая группа уравнений состоит из первого уравнения системы (13). Две пары последующих уравнений этой системы попадают соответственно в первую и вторую структурно выделенные группы уравнений.

Применение метода RKS6[7, 6, 6](1/4, 7/9) для интегрирования системы (13) позволит уменьшить число обращений к процедуре вычисления правой части на единицу для $f_1, \ldots, f_4$ с сохранением порядка метода. Причем в этом случае проверку правильности найденных значений параметров метода проходят параметры всех девяти блоков A_{uv}.

При отказе от алгоритмического использования структурных особенностей системы (13) (все пять уравнений образуют общую группу (1) канонической формы) метод RKS6[7, 6, 6](α, β) вырождается в классический способ распространения метода Рунге—Кутты шестого порядка на системы. Он образует однопараметрическое семейство RKS6[7](β) семиэтапных методов относительно параметра β. Для определенности в дальнейшем будем обозначать RKS6[7](7/9) его расчетную схему при $\beta = 7/9$.

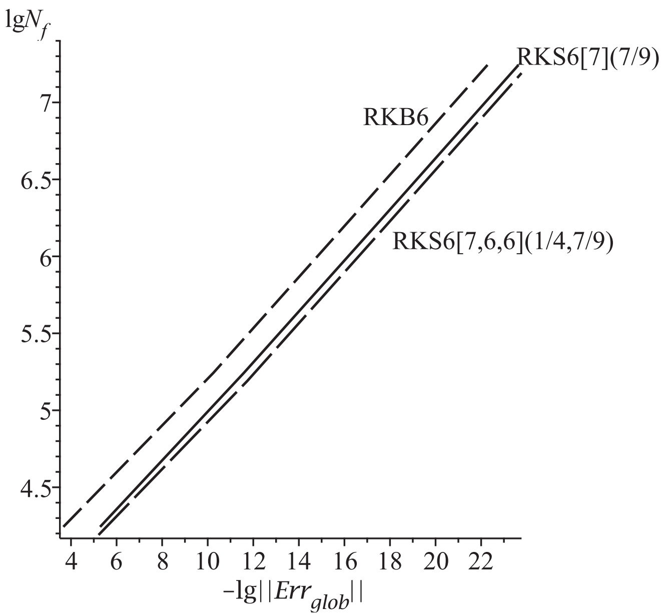
В качестве оппонента методам RKS6[7, 6, 6](1/4, 7/9) и RKS6[7](7/9) была использована семиэтапная расчетная схема RKB6 шестого порядка Бутчера [11].

На решении задачи Коши (13) при $T_k = 5$, $h \in [2 \cdot 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-2}]$ сравнивали результаты применения методов Бутчера RKB6 и полученных в работе расчетных схем RKS6[7, 6, 6](1/4, 7/9), RKS6[7](7/9).

Результаты тестирования по критерию «общее количество вычислений правых частей (N_f)/ глобальная погрешность(Err_{glob})» представлены в табл. 3 и на рисунке.

Таблица 3. **Результаты сравнительного тестирования на задаче (13) при $T_k = 5$**

h	$-\lg\|\|Err_{glob}\|\|$			$\lg N_f$		
	RKB6	RKS6[7]	RKS6[7, 6, 6]	RKB6	RKS6[7]	RKS6[7, 6, 6]
0.02000	1.4644532	3.2798024	3.1212636	3.942008		3.8893017
0.01000	3.6635936	5.2766117	5.2095659	4.243038		4.1903316
0.00500	5.7361692	7.2283156	7.2636795	4.544068		4.4913616
0.00250	7.7415254	9.1304082	9.2453172	4.845098		4.7923916
0.00050	12.0775985	13.4183086	13.5655128	5.544068		5.4913616
0.00010	16.2792546	17.6333472	17.7709453	6.243038		6.1903316
0.00002	20.4733089	21.8315212	21.9661853	6.942008		6.8893017



Зависимость нормы полной погрешности от общего количества вычислений правых частей тестовой задачи (13)

Наклоны ломаных на рисунке показывают, что для всех тестируемых методов зависимость глобальной погрешности Err_{glob} от величины шага интегрирования (числа обращений N_f к процедурам вычисления правых частей) имеет шестой порядок. Порядок методов RKS6[7](7/9) и RKS6[7, 6, 6](1/4, 7/9) действительно соответствует заявленному шестому. При этом и RKS6[7](7/9), и метод-оппонент требуют семи вычислений правой части СОДУ на шаге, тогда как RKS6[7, 6, 6](1/4, 7/9) — только шести для компонент решения принадлежащих второй (2) и третьей (3) группам уравнений.

Численное тестирование подтвердило порядок методов RKS6[7, 6, 6](1/4, 7/9) и RKS6[7](7/9) и их работоспособность, а также показало при сравнении результатов применения всех трех расчетных схем (RKB6, RKS6[7](7/9), RKS6[7, 6, 6](1/4, 7/9)), что алгоритмическое использование структурных особенностей (в рамках предложенного здесь метода) позволяет строить экономичные явные одношаговые методы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Олемской И. В.* Модификация алгоритма выделения структурных особенностей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. Вып. 2. С. 55–64.
2. *Olemskoy I. V.* Structural approach to the design of explicit one-stage methods // Comput. Math. Math. Phys. 2003. Vol. 43. P. 918–931.
3. *Eremin A. S., Olemskoy I. V.* An embedded method for integrating systems of structurally separated ordinary differential equations // Comput. Math. Math. Phys. 2010. Vol. 50. N 3. P. 414–427.
4. *Olemskoy I. V.* A fifth-order five-stage embedded method of the Dormand—Prince type // Comput. Math. Math. Phys. 2005. Vol. 45. P. 1140–1150.
5. *Olemskoy I. V.* Fifth-order four-stage method for numerical integration of special systems // Comput. Math. Math. Phys. 2002. Vol. 42. P. 1135–1145.
6. *Olemskoy I. V., Eremin A. S., Ivanov A. P.* Sixth order method with six stages for integrating special systems of ordinary differential equations // 2015 International Conference on Stability and Control Processes in memory of V. I. Zubov. SCP–2015. Proceedings. 2015. P. 110–113.
7. *Olemskoy I. V., Eremin A. S.* An embedded pair of method of orders 6(4) with 6 stages for special systems of ordinary differential equations // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics. ICNAAM 2016. Rodos: American Institute of Physics, 2016. Vol. 1738. Art. N 160010.
8. *Olemskoy I. V., Eremin A. S., Kovrizhnykh N. A.* Embedded methods of order six for special systems of ordinary differential equations // Applied Mathematical Sciences. 2017. Vol. 11(1). P. 31–38. https://doi.org/10.12988/ams.2017.610260
9. *Olemskoy I. V., Kovrizhnykh N. A.* A family of sixth-order methods with six stages // Вестн. С.-Петерб.ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 215–229. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.303
10. *Eremin A. S., Kovrizhnykh N. A., Olemskoy I. V.* An explicit one-step multischeme sixth order method for systems of special structure // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 347. P. 853–864. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.11.053
11. *Hairer E., Nersett S. P., Wanner G.* Solving ordinary differential equation I: Nonstiff problems. 3 ed. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 528 p.

Статья поступила в редакцию 2 ноября 2019 г.
Статья принята к печати 7 ноября 2019 г.

Контактная информация:

Олемской Игорь Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; i.olemskoj@spbu.ru

Коврижных Николай Александрович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; sagoyewatha@mail.ru

Фирюлина Оксана Сергеевна — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; firyulina.oxana@mail.ru

Two-parametric family of sixth order numerical methods for solving systems of ordinary differential equations

I. V. Olemskoy, N. A. Kovrizhnykh, O. S. Firyulina

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab.,
St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Olemskoy I. V., Kovrizhnykh N. A., Firyulina O. S. Two-parametric family of sixth order numerical methods for solving systems of ordinary differential equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 4, pp. 502–517. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.407 (In Russian)

The paper is devoted to the construction of economical explicit sixth-order numerical method for solving structurally partitioned systems of ordinary differential equations. The general form of the method, which algorithmically uses the properties of the system structure, is presented. Conditions of order six, which the parameters of the method must satisfy, are derived. The simplifying conditions are found, which reduces the large nonlinear system of order conditions to a solvable smaller system. A solution with two free parameters is obtained. Economic explicit sixth-order schemes for systems of ordinary differential equations are presented. Numerical tests to compare to known explicit sixth-order one-step methods are performed.

Keywords: order, the order conditions, simplifying conditions.

References

1. Olemskoy I. V. Modifikatsiya algoritma vydeleniya strukturnykh osobennostei [Modification of structural properties detection algorithm]. *Vestnik of Saint Petersburg Universitety. Series 10. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2006, iss. 2, pp. 55–64. (In Russian)

2. Olemskoy I. V. Structural approach to the design of explicit one-stage methods. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2003, vol. 43, pp. 918–931.

3. Eremin A. S., Olemskoy I. V. An embedded method for integrating systems of structurally separated ordinary differential equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 3, pp. 414–427.

4. Olemskoy I. V. A fifth-order five-stage embedded method of the Dormand—Prince type. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2005, vol. 45, pp. 1140–1150.

5. Olemskoy I. V. Fifth-order four-stage method for numerical integration of special systems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2002, vol. 42, pp. 1135–1145.

6. Olemskoy I. V., Eremin A. S., Ivanov A. P. Sixth order method with six stages for integrating special systems of ordinary differential equations. *2015 International Conference on Stability and Control Processes in memory of V. I. Zubov. SCP–2015. Proceedings*, 2015, pp. 110–113.

7. Olemskoy I. V., Eremin A. S. An embedded pair of method of orders 6(4) with 6 stages for special systems of ordinary differential equations. *International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics. ICNAAM 2016.* Rodos, American Institute of Physics Press, 2016, vol. 1738, art. no. 160010.

8. Olemskoy I. V., Eremin A. S., Kovrizhnykh N. A. Embedded methods of order six for special systems of ordinary differential equations. *Applied Mathematical Sciences*, 2017, vol. 11(1), pp. 31–38. https://doi.org/10.12988/ams.2017.610260

9. Olemskoy I. V., Kovrizhnykh N. A. A family of sixth-order methods with six stages. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 3, pp. 215–229. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.303

10. Eremin A. S., Kovrizhnykh N. A., Olemskoy I. V. An explicit one-step multischeme sixth order method for systems of special structure. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, vol. 347, pp. 853–864. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.11.053

11. Hairer E., Nersett S. P., Wanner G. *Solving ordinary differential equation I: Nonstiff problems.* 3 ed. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Press, 2008, 528 p.

Received: November 02, 2019.
Accepted: November 07, 2019.

A u t h o r's i n f o r m a t i o n:

Igor V. Olemskoy — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; i.olemskoj@spbu.ru

Nikolai A. Kovrizhnykh — PhD in Physics and Mathematics, Assistant; sagoyewatha@mail.ru

Oxana S. Firyulina — PhD in Physics and Mathematics, Senior Lecturer; firyulina.oxana@mail.ru