ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.929
MSC 34K20

Устойчивость однородных нестационарных систем дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием

А. В. Екимов, О. Н. Чижова, У. П. Зараник

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Екимов А. В., Чижова О. Н., Зараник У. П.* Устойчивость однородных нестационарных систем дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 415–424.
https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.401

Рассматриваются однородные дифференциально-разностные системы с периодическими коэффициентами и линейно возрастающим временным запаздыванием. Эти системы можно представить как модель распространения эпидемии среди населения. Кроме того, системы с линейно возрастающим запаздыванием описывают динамику работы информационного сервера, смесительного бака, процесс образования пробок на кольцевой дороге и т. д. Вводится понятие усредненной системы. Такой подход позволяет свести анализ задачи устойчивости по Ляпунову нулевого решения исходной системы к исследованию нулевого решения усредненной системы. Сформулированы достаточные условия устойчивости стационарной системы. К изучению устойчивости исходной системы применен подход Разумихина. Построена функция Ляпунова. В результате получены новые достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения нестационарных однородных систем с линейно возрастающей задержкой времени. Эти условия являются обобщением известных результатов для линейных систем с линейно возрастающей временной задержкой.

Ключевые слова: однородная дифференциально-разностная система, линейное запаздывание, асимптотическая устойчивость.

Введение. В последнее время в центре внимания исследователей все чаще оказываются системы дифференциально-разностных уравнений, содержащие переменные, в том числе и неограниченные, линейно зависящие от времени, запаздывания аргумента. Это объясняется большим количеством ситуаций, когда запаздывание в модели нельзя считать постоянной величиной. Например, системы, описывающие взаимодействие объектов, расходящихся друг от друга, содержат транспортное запаздывание аргумента — время, необходимое для передачи информации от одного объекта к другому, которое линейно возрастает при увеличении расстояния между объектами. Системы и уравнения с линейным запаздыванием аргумента появляются в математических моделях радиоактивного распада [1], работы информационного сервера [2] и смесительного бака [3], движения по кольцевой автомобильной дороге [4] и в ряде других случаев. Следует отметить, что многие из этих моделей являются нелинейными, причем разложение правых частей по степеням искомых функций не имеет линейных членов относительно них или же матрица при линейных слагаемых не позволяет использовать теоремы об устойчивости и неустойчивости по линейному приближению [1, 5, 6]. В этих случаях первым, в широком смысле, приближением оказываются системы уравнений с однородными правыми частями, что объясняет необходимость их всестороннего рассмотрения [7–9].

Заметим, что системы нелинейных уравнений, содержащие линейное запаздывание времени, до последнего времени остаются мало изученными.

Важной проблемой, возникающей при их исследовании, является проблема устойчивости, поскольку наличие в системе неограниченного запаздывания может привести к потере этого свойства. Теоремы об устойчивости однородных систем без запаздывания были доказаны в работах [10–12]. Уточнение известных критериев устойчивости по первому, в широком смысле, приближению систем без запаздывания приводится А. Ю. Александровым [13]. Отдельные классы уравнений и систем с однородной правой частью и линейным запаздыванием аргумента описаны в работах [2, 14, 15].

В данной статье рассматривается нелинейная нестационарная система уравнений с однородными периодическими правыми частями и линейным запаздыванием аргумента. Такая система, в частности, может служить математической моделью распространения эпидемии в некоторой популяции. Действительно, некоторые болезни, например ВИЧ, сифилис, герпес и др., имеют спящий период, длительность которого может быть неограниченной.

Для исследования тривиального решения на устойчивость были использованы метод функционалов Ляпунова—Красовского [16] и подход Разумихина [17], что позволило свести задачу к рассмотрению усредненной стационарной системы и получить некоторые достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения.

Модель распространения эпидемии. Дифференциальные уравнения с однородными правыми частями могут применяться при моделировании самых различных процессов. Рассмотрим модель распространения эпидемии в некоторой популяции. Через $x(t)$ обозначим число заболевших особей в момент времени t. Динамику процесса естественно описать дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x),$$

где $f(t,0) = g(t,0) = 0$.

Функция $f(t,x)$ характеризует факторы, способствующие распространению вируса. В простейших моделях полагают, что $f(t,x) = ax$, где $a > 0$ — постоянная. Пропорциональность $f(t,x)$ числу заболевших существенно упрощает реальную картину, но далеко не всегда адекватно отражает ситуацию. Выберем в качестве $f(t,x)$ следующую функцию:

$$f(t,x) = a(t)x^{\mu}(t),$$

в которой $a(t)$ — периодическая функция с периодом T такая, что $\frac{1}{T}\int\limits_0^T a(\tau)d\tau = \bar{a} > 0$. Постоянную $\bar{a}$ естественно считать коэффициентом заболеваемости. Постоянная $\mu > 0$ характеризует скорость распространения эпидемии. Функция $g(t,x)$ отражает факторы, препятствующие распространению эпидемии (природные факторы, укрепление иммунитета, изоляция заболевших особей и т. д.). Положим, что $g(t,x) = b(t)x^\sigma(t)$, где $b(t+T) = b(t)$; $\frac{1}{T}\int\limits_0^T b(\tau)d\tau = \bar{b} < 0$. Постоянная $\bar{b}$ — коэффициент выздоровления, σ — постоянная. При $\mu = \sigma$ получаем дифференциальное уравнение с однородной правой частью. Поскольку мероприятия по борьбе с эпидемией (например, вакцинация), как правило, не дают мгновенного эффекта, то естественно учесть запаздывание. В простейшем случае запаздывание можно считать постоянным. С учетом этого модель можно представить в виде

$$\dot{x} = a(t)x^\mu(t) + b(t)x^\sigma(t-\tau).$$

В дальнейшем возможен переход к переменному запаздыванию. В частности, если учитывать спящий период, то запаздывание можно считать линейно возрастающим, т. е.

$$\dot{x}(t) = a(t)x^\mu(t) + b(t)x^\sigma(\alpha t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Перейдем к описанию векторной модели распространения эпидемии. Пусть n популяций сосуществуют на общей территории, подверженной воздействию вируса. Вектор состояния системы обозначим через $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$. Здесь $x_i(t)$ — число заболевших особей i-й популяции в момент времени t. Динамику процесса представим в виде системы дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = A(t)f(x(t)) + B(t)g(x(\alpha t)), \tag{1}$$

в которой $A(t)$, $B(t)$ — $(n\times n)$-непрерывные матрицы с T-периодическими элементами, описывающие внутрипопуляционные и межпопуляционные факторы, влияющие на распространение эпидемии. Вектор-функции f, g выбираем следующим образом:

$$f(x) = (x_1^\mu, \dots, x_n^\mu)^T, \quad g(x) = (x_1^\sigma, \dots, x_n^\sigma)^T.$$

Примем, что

$$\bar{A} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T A(\tau)d\tau, \quad \bar{B} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T B(\tau)d\tau.$$

Анализ устойчивости нулевого решения системы (1) в терминах параметров усредненной модели позволит выявить существенные факторы, влияющие на динамику эпидемии:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}\cdot f(x(t)) + \bar{B}\cdot g(x(\alpha t)).$$

Предварительные результаты. Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений с однородными правыми частями

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) + G(x(\alpha t)), \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

где векторные функции $F(t,x)$, $G(x)$ непрерывно дифференцируемы по своим аргументам и являются положительно однородными функциями порядка $\mu > 1$, при этом μ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем.

Кроме того, будем считать функцию $F(t,x)$ периодической по первому аргументу, т. е. $F(t + T,x) \equiv F(t,x)$ при всех $t \in (-\infty;+\infty)$.

Известно [2], что нулевое решение уравнения

$$\dot{x}(t) = -\beta x^{\mu}(t) + \gamma x^{\mu}(\alpha t) \tag{3}$$

асимптотически устойчиво по Ляпунову, если $\mu = \frac{2p+1}{2q+1} > 1$, $\beta > 0$ и $|\gamma| < \beta$.

Приведем некоторые достаточные условия асимптотической устойчивости для стационарной системы с однородными порядка $\mu > 1$ правыми частями

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + G(x(\alpha t)). \tag{4}$$

Пусть указанные функции удовлетворяют оценкам

$$a_1\|x\|^{\mu} \leqslant \|F(x)\| \leqslant a_2\|x\|^{\mu}, \quad b_1\|x\|^{\mu} \leqslant \|G(x)\| \leqslant b_2\|x\|^{\mu},$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — положительные постоянные.

Теорема 1 [17]**.** *Если существует положительно определенная, положительно однородная порядка $k > 2$ функция $V(x) \in C^2(R^n)$, удовлетворяющая условиям:*

- $\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T \cdot F(x) = W(x)$ *— отрицательно определенная функция,*
- $\max\limits_{V(y)\leqslant V(x)} \left\{ \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T \cdot G(y) + W(x) \right\} \leqslant -d\|x\|^{k+\mu-1}$,

то нулевое решение системы (4) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Замечание. Для функций, удовлетворяющих теореме 1, выполнены следующие неравенства:

$$b_1\|x(\alpha t)\|^{\mu} \leqslant \|G(x(\alpha t))\| \leqslant b_2\|x(\alpha t)\|^{\mu}, \quad c_1\|x(t)\|^k \leqslant V(x(t)) \leqslant c_2\|x(t)\|^k,$$

$$c_3\|x(t)\|^{k-1} \leqslant \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \leqslant c_4\|x(t)\|^{k-1}, \quad p_1\|x(t)\|^{k+\mu-1} \leqslant W(x(t)) \leqslant p_2\|x(t)\|^{k+\mu-1}.$$

Здесь величины c_1, c_2, c_3, c_4, p_1, p_2 — положительные постоянные.

Следствие. Если функции $V(x)$ и $W(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то существует число $R > 1$ такое, что справедливо неравенство

$$\max_{V(y)\leqslant RV(x)} \left\{ \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T \cdot G(y) + W(x) \right\} \leqslant -\frac{1}{2}d\|x\|^{k+\mu-1}.$$

Пример 1. Уравнение (3) удовлетворяет условиям теоремы 1, если выбрать функцию $V(x) = x^4$. Из [10] следует, что тривиальное решение уравнения (3) будет асимптотически устойчиво, если производная от этой функции, в силу уравнения (3), будет определенно отрицательной на решениях данного уравнения, подчиняющихся условию Разумихина, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$x^4(\alpha t) \leqslant x^4(t). \tag{5}$$

Продифференцируем функцию $V(x) = x^4$, в силу уравнения (3), и получим

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3)} = -4\beta x^{\mu+3}(t) + 4\gamma x^3 x^{\mu}(\alpha t). \tag{6}$$

Из условия (5) будет следовать, что $|x(\alpha t)| \leqslant |x(t)|$. Теперь можно оценить правую часть равенства (6):

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3)} \leqslant 4(-\beta+|\gamma|)x^{\mu+3}.$$

Очевидно, правая часть неравенства определенно отрицательна и удовлетворяет условиям теоремы 1 при выполнении неравенств $\beta > 0$ и $|\gamma| < \beta$.

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений с постоянными матрицами

$$\dot{x}(t) = P\begin{pmatrix} x_1^\mu(t) \\ x_2^\mu(t) \\ \vdots \\ x_n^\mu(t) \end{pmatrix} + Q\begin{pmatrix} x_1^\mu(\alpha t) \\ x_2^\mu(\alpha t) \\ \vdots \\ x_n^\mu(\alpha t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Если существует положительно определенная диагональная матрица $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ такая, что

$$\max\left\{(\lambda_1 x_1^\mu \quad \lambda_2 x_2^\mu \quad \ldots \quad \lambda_n x_n^\mu)\cdot\left(P\begin{pmatrix} x_1^\mu(t) \\ x_2^\mu(t) \\ \vdots \\ x_n^\mu(t) \end{pmatrix} + Q\begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_n^\mu \end{pmatrix}\right)\right\} \leqslant -d\|x\|^{2\mu} \tag{8}$$

при условиях $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^{\mu+1} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^{\mu+1}$, то нулевое решение системы (7) будет асимптотически устойчивым.

Доказательство заключается в проверке условий теоремы 1 для функции $V(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^{\mu+1}$.

Дифференцируя функцию $V(x)$, в силу системы (7), получаем левую часть неравенства (8). Так как оценка добавочного слагаемого $(\mu+1)(\lambda_1 x_1^\mu \quad \lambda_2 x_2^\mu \ \ldots \ \lambda_n x_n^\mu)\times$ $\times QX^\mu(\alpha t)$ через неравенство Разумихина приводит к выполнению (8), это означает, что производная от функции $V(x)$, в силу системы (7), определенно отрицательна. Следовательно, нулевое решение системы (7) будет асимптотически устойчивым.

Основные результаты. ***Скалярный случай.*** Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = -\tilde{\beta}(t)\cdot x^3(t) + \gamma x^3(\alpha t), \tag{9}$$

где $\tilde{\beta}(t)$ — периодическая функция с периодом T, т. е. $\tilde{\beta}(t+T) \equiv \tilde{\beta}(t)$; γ — постоянная. Введем среднее значение функции $\beta = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{\beta}(t)dt$.

Теорема 2. *Если выполняется условие* $|\gamma| < \beta$, *то нулевое решение уравнения* (9) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(t, x(t)) = x^4(t) - 4x^6(t)\int\limits_0^t \left(\beta - \tilde{\beta}(\tau)\right)d\tau.$$

Найдя производную этой функции вдоль решений уравнения (9), получим, что

$$\left.\tfrac{dV(t,x(t))}{dt}\right|_{(9)} = 4x^3(t)\cdot\left(-\tilde{\beta}(t)x^3(t) + \gamma x^3(\alpha t)\right) - 4x^6(t)\left(\beta - \tilde{\beta(t)}\right) -$$
$$- 4\left(x^6(t)\right)'\cdot\int\limits_0^t\left(\beta - \tilde{\beta}(\tau)\right)d\tau = -4\beta x^6(t) + 4\gamma x^3(t)\cdot x^3(\alpha t) -$$

$$- 24x^5(t)\left(-\tilde\beta(t)\cdot x^3(t)+\gamma x^3(\alpha t)\right)\cdot\int\limits_0^t\left(\beta-\tilde\beta(\tau)\right)d\tau.$$

Введем величину $\hat\beta(t)=\int\limits_0^t\left(\beta-\tilde\beta(\tau)\right)d\tau$, которая, очевидно, будет удовлетворять условиям $\hat\beta(t+T)\equiv\hat\beta(t)$ и $|\hat\beta(t)|\leqslant B<\infty$. Тогда на множестве $|x(t)|<H<\infty$ будут справедливы следующие оценки:

$$x^4(t)\left(1-4H^2B\right)\leqslant V(t,x(t))\leqslant x^4(t)\left(1+4H^2B\right).$$

Далее определим из условия Разумихина $V(\sigma,x(\sigma))\leqslant mV(t,x(t)),\ \ \sigma\leqslant t,\ \ m>1$, что

$$x^4(\alpha t)\leqslant mx^4(t)\left(\frac{1+4H^2B}{1-4H^2B}\right),$$

где $\inf\limits_{m>1;H>0} m\left(\frac{1+4H^2B}{1-4H^2B}\right)=1$.

Введем теперь величину $M=\sqrt[4]{m\frac{1+4H^2B}{1-4H^2B}}$, откуда следует, что $|x(\alpha t)|\leqslant M|x(t)|$. Тогда можно оценить производную функции $V(t,x(t))$ на решениях уравнения (9):

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV(t,x(t))}{dt}\right|_{(9)}&\leqslant 4(-\beta+\gamma)x^6(t)+24B(\tilde\beta(t)+\gamma M)x^8(t)\leqslant\\&\leqslant -4x^6(t)\left[(\beta-\gamma)-(6B\tilde\beta+\gamma M)x^2(t)\right].\end{aligned}\qquad(10)$$

Так как $|x(t)|<H$, то постоянную H можно считать настолько малой, что величина в квадратных скобках в неравенстве (10) будет положительной. Применяя теорему 1, завершаем доказательство.

Общий случай. Теперь будем исследовать систему (2)

$$\dot x(t)=F\left(t,x(t)\right)+G\left(x(\alpha t)\right),\quad t\geqslant t_0\geqslant 0,\quad 0<\alpha<1.$$

Введем величину $\hat F(x)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t,x(t))dt$.

Теорема 3. *Если для системы*

$$\dot x(t)=\hat F(x(t))+G(x(\alpha t))$$

выполнены условия теоремы 1, то нулевое решение системы (2) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем систему (2) в виде

$$\dot x(t)=\hat F(x(t))+G(x(\alpha t))+F(t,x(t))-\hat F(x(t)).\qquad(11)$$

Рассмотрим функцию

$$v(t,x(t))=V(x(t))-\left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)}\right)^T\int\limits_0^t\left(F(\tau,x(t))-\hat F(x(t))\right)d\tau,\qquad(12)$$

где $V(x)$ — функция из теоремы 1; верхний индекс T обозначает транспонирование.

Введем векторную функцию

$$\tilde{F}(t, x(t)) = \int\limits_0^t \Big(F(\tau, x(t)) - \hat{F}(x(t))\Big)\, d\tau. \tag{13}$$

Можно заметить, что функция (13) будет T-периодической, ограниченной и однородной, при этом $q_1\|x(t)\|^\mu \leqslant \|\tilde{F}(t, x(t))\| \leqslant q_2\|x(t)\|^\mu$, где величины q_1, q_2 — положительные постоянные, а функция (12) удовлетворяет оценкам

$$c_1\|x(t)\|^k \left(1 - c_4 q_2\|x(t)\|^{\mu-1}\right) \leqslant v(t, x(t)) \leqslant c_2\|x(t)\|^k \left(1 + c_4 q_2\|x(t)\|^{\mu-1}\right)$$

и, следовательно, является определенно положительной в достаточно малой окрестности нуля $\|x(t)\| < H_0$. Производная функции (12) на решениях системы (11) будет иметь вид

$$\begin{gathered}\dot{v}(t, x(t))\Big|_{(11)} = \left(\tfrac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)}\right)^T \Big[\hat{F}(x(t)) + G(x(\alpha t))\Big] - \\ - \left(\tfrac{\partial^2 V(x(t))}{\partial x(t)^2}[F(t, x(t)) + G(x(\alpha t))]\right)^T \int\limits_0^t \Big(F(\tau, x(t)) - F(\hat{x}(t))\Big)\, d\tau - \\ - \left(\tfrac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)}\right)^T \int\limits_0^t \tfrac{\partial\left(F(\tau, x(t)) - \hat{F}(x(t))\right)}{\partial x} d\tau [F(t, x(t)) + G(x(\alpha t))].\end{gathered} \tag{14}$$

Введем матрицу

$$P(t, x(t)) = \int\limits_0^t \frac{\partial\Big(F(\tau, x(t)) - \hat{F}(x(t))\Big)}{\partial x} d\tau. \tag{15}$$

Матрица (15) будет T-периодической, ограниченной и однородной, при этом выполнено $\|P(t, x(t))\| \leqslant l\|x(t)\|^{\mu-1}$, где l — положительная постоянная величина.

В условиях теоремы 3 можно оценить сверху равенство (14) на множестве $V(y) < RV(x)$:

$$\begin{gathered}\dot{v}(t, x(t))\Big|_{(11)} \leqslant -\tfrac{1}{2}d\|x(t)\|^{k+\mu-1} - \left(\tfrac{\partial^2 V(x(t))}{\partial x^2(t)}[F(t, x(t)) + G(x(\alpha t))]\right)^T \tilde{F}(t, x(t)) - \\ - \left(\tfrac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)}\right)^T P(t, x(t))[F(t, x(t)) + G(x(\alpha t))].\end{gathered} \tag{16}$$

Условие Разумихина [17] для функции (12) запишется в виде $v(\sigma, x(\sigma)) \leqslant v(t, x(t))$ при $\sigma \leqslant t$ или

$$V(x(\sigma)) - \left(\frac{\partial V(x(\sigma))}{\partial(x(\sigma))}\right)^T \int\limits_0^\sigma \Big(F(\tau, x(\sigma)) - \hat{F}(x(\sigma))\Big)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant V(x(t)) - \left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial(x(t))}\right)^T \int\limits_0^t \Big(F(\tau, x(t)) - \hat{F}(x(t))\Big)\, d\tau.$$

Учитывая введенные ранее оценки, получим, что

$$c_1\|x(\sigma)\|^k \left(1 - \frac{c_4 q_2}{c_1}\|x(\sigma)\|^{\mu-1}\right) \leqslant c_2\|x(t)\|^k \left(1 + \frac{c_4 q_2}{c_1}\|x(t)\|^{\mu-1}\right).$$

Обозначим $A = \frac{c_4 q_2}{c_1} > 0$ и выберем величину $H = 1/\sqrt[\mu-1]{2A}$, тогда $1 - AH^{\mu-1} = 1/2$,

$$\|x(\sigma)\| \leqslant \sqrt[k]{\frac{c_2(1+AH^{\mu-1})}{c_1(1-AH^{\mu-1})}}\|x(t)\| = \sqrt[k]{3c_2/c_1}\|x(t)\|.$$

Пусть $B = \max\{\sqrt[k]{3c_2/c_1}, \sqrt[k]{Rc_1/c_2}\}$ и $H_1 = H/B$. Тогда при условии $\|x\| < H_1$ будут выполнены неравенства $\|x(\sigma)\| \leqslant \sqrt[k]{3c_2/c_1}\|x(t)\|$ и $V(x(\sigma)) \leqslant RV(x(t))$ для значений $\sigma \leqslant t$. С учетом того, что $\alpha t \leqslant t$, а также выполнены неравенства $\|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\| \leqslant c_5\|x(t)\|^{k-2}$ и $F(t,x(t)) + G(x(\alpha t)) \leqslant (a_2 + B^\mu b_2)\|x\|^\mu$, проведем дальнейшую оценку правой части неравенства (16):

$$\dot v(t,x(t))\Big|_{(11)} \leqslant \frac{1}{2}d\|x(t)\|^{k+\mu-1} + d_1\|x(t)\|^{k+2\mu-2} + d_2\|x(t)\|^{k+2\mu-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}d\|x(t)\|^{k+\mu-1}\left(1 - \frac{2(d_1+d_2)}{d}\|x(t)\|^{\mu-1}\right).$$

Поскольку $\mu > 1$, найдется величина $H_2 > 0$ такая, что при $\|x(t)\| < H_2$ будет выполнено неравенство $1 - \frac{2(d_1+d_2)}{d}\|x(t)\|^{\mu-1} > 0$.

Обозначим $H = \min\{H_0, H_1, H_2\}$. Тогда при $\|x(t)\| < H\sqrt[k]{\frac{c_1(1-c_4q_2H^{\mu-1})}{c_2(1+c_4q_2H^{\mu-1})}}$ производная определенно положительной функции (12) на решениях системы (2) будет определенно отрицательной величиной, что доказывает теорему.

Заключение. Исследована нелинейная нестационарная система уравнений с однородными периодическими правыми частями и линейным запаздыванием аргумента. С помощью функционалов Ляпунова—Красовского и метода Разумихина построена усредненная стационарная система, для которой получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения.

Литература

1. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения / пер. с англ. А. М. Зверкина, Г. А. Каменского; под ред. Л. Э. Эльцгольца. М.: Мир, 1967. 548 с. (*Bellman R., Cooce K. L.* Differencial-difference equations.)

2. *Жабко А. П., Чижова О. Н.* Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 3. С. 105–115.

3. *Жабко А. П., Чижова О. Н.* Гибридный метод анализа устойчивости линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием // Вестн. Тамбов. гос. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 4. С. 843–850.

4. *Zhabko A., Chizhova O., Zaranik U.* Stability analysis of the linear time delay systems with linearly increasing delay // Cybernetics and Physics. 2016. Vol. 5. N 2. P. 67–72.

5. *Валеев К. Г.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием, линейно зависящим от аргумента // Сиб. матем. журн. 1964. Т. 5. № 2. С. 75–83.

6. *Laktionov A. A., Zhabko A. P.* Method of difference transformations for differential systems with linear time-delay // Proceeding of the First IFAC Conference LTDS–98. Grenoble, France, 1998. P. 201–205.

7. *Купцова С. Е.* Об асимптотическом поведении решений систем нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений // Труды Средневолжск. матем. об-ва. 2006. Т. 8. № 1. С. 235–243.

8. *Тихомиров О. Г., Темкина Е. В.* Асимптотическое положение покоя для систем однородных нестационарных дифференциальных уравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 3. С. 58–65.

9. *Жабко А. П., Тихомиров О. Г., Чижова О. Н.* Устойчивость асимптотического положения покоя возмущенных однородных нестационарных систем // Журн. Средневолжск. матем. об-ва. 2018. Т. 10. № 1. С. 13–22.

10. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1973. 272 с.

11. *Красовский Н. Н.* Об устойчивости по первому приближению // Прикладная математика и механика. 1955. Т. 19. № 5. С. 516–530.

12. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движений. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 432 с.
13. *Александров А. Ю.* Устойчивость движений неавтономных динамических систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 184 с.
14. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 3. С. 495–508.
15. *Гребенщиков Б. Г., Клечин Ю. И.* Об устойчивости одной однородной нестационарной системы с линейным запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1600–1604.
16. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.
17. *Разумихин Б. С.* Устойчивость систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 4. С. 500–512.

Статья поступила в редакцию 6 июля 2019 г.
Статья принята к печати 7 ноября 2019 г.

Контактная информация:

Екимов Александр Валерьевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.ekimov@spbu.ru

Чижова Ольга Николаевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; o.chizhova@spbu.ru

Зараник Ульяна Петровна — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; u.zaranik@spbu.ru

Stability of homogeneous nonstationary systems of differential-difference equations with linearly time delay.

A. V. Ekimov, O. N. Chizhova, U. P. Zaranik

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Ekimov A. V., Chigova O. N., Zaranik U. P. Stability of homogeneous nonstationary systems of differential-difference equations with linearly time delay. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 4, pp. 415–424. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.401 (In Russian)

These systems can be considered as a model for the spread of the epidemic in the population. In addition, systems with linearly increasing delay describe the dynamics of the information server, mixing tank, the process of formation of traffic jams on the ring road, etc. For the study, the concept of an average system is introduced. This approach allows us to reduce the analysis of the Lyapunov stability problem of the zero solution of the original system to the investigation of the zero solution of the averaged system. Sufficient conditions for stationary system stability are formulated. Then the application of Razumihin's approach to the study of stability original system is used. The Lyapunov function is constructed. As a result, new sufficient conditions for the asymptotic stability of the zero solution of nonstationary homogeneous systems with a linearly increasing time delay are obtained. These conditions are the generalization of well-known results for the linear systems with a linearly increasing time delay.

Keywords: homogeneous differential-difference system, linearly increasing time delay, asymptotic stability.

References

1. Bellman R., Cooke K. L. *Differentsialno-raznostnyie uravneniya* [*Differential-difference equations*]. Moscow, Mir Publ., 1967, 548 p. (In Russian)
2. Zhabko A. P., Chizhova O. N. Analiz ustoychivosti odnorodnogo differentsialno-raznostnogo uravneniya s lineynyim zapazdyivaniem [Stability analysis of homogeneous differential-difference equation

with linear delay]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* 2015, iss. 3, pp. 105–115. (In Russian)

3. Zhabko A. P., Chizhova O. N. Gibridnuj metod analiza ustoichivosti linejnuh differencialno-raznostnuh sistem s linejno vozrastaushchim zapazdyvaniem [Hybrid method of stability analysis of linear difference-differential systems with linear increasing decelerating]. *Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 4, pp. 843–850. (In Russian)

4. Zhabko A., Chizhova O., Zaranik U. Stability analysis of the linear time delay systems with linearly increasing delay. *Cybernetics and Physics*, 2016, vol. 5, no. 2, pp. 67–72.

5. Valeev K. G. Lineynyie differentsialnyie uravneniya s zapazdyvaniem, lineyno zavisyaschim ot argumenta [Linear differential equations with linear time-delay]. *Siberian Mathematical Journal*, 1964, vol. 5, no. 2, pp. 75–83. (In Russian)

6. Laktionov A. A., Zhabko A. P. Method of difference transformations for differential systems with linear time-delay. *Proceeding of the First IFAC Conference LTDS–98*. France, Grenoble, 1998, pp. 201–205.

7. Kuptsova S. E. Ob asimptoticheskom povedenii reshenij sistem nelinejnuh nestacionarnuh differencialnuh uravnenij [On the asymptotic behavior of nonlinear nonstationary differential equation solutions]. *Proceeding of Middle-Volga Mathematical Society*, 2006, vol. 8, no. 1, pp. 235–243. (In Russian)

8. Tikhomirov O. G., Temkina E. V. Asimptoticheskoe polojenie pokoia dlia sistem odnorodnyhnestatsyonarnyh differentialnyh uravnenii [Asymptotic quiescent position for systems of homogeneousnon-autonomous differential equations]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2014, iss. 3, pp. 58–65. (In Russian)

9. Zhabko A. P., Tikhomirov O. G., Chizhova O. N. Ustoychivost asimptoticheskogo polozheniya pokoya vozmuschennyh odnorodnyh nestatsionarnyh sistem [Stability of the asymptotic quiescent position of perturbed homogeneous nonstationary systems]. *Proceedings of Middle-Volga Mathematical Society*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 13–22. (In Russian)

10. Zubov V. I. *Ustoichivost dvizheniya* [*Stability of motions*]. Moscow, Visshaya shkola Publ., 1973, 272 p. (In Russian)

11. Krasovskij N. N. Ob ustoichivosti po pervomu priblizheniyu [On stability by the first approximation]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1955, vol. 19, no. 5, pp. 516–530. (In Russian)

12. Malkin I. G. *Teoriya ustojchivosti dvizhenij* [*The theory of motion stability*]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1952, 432 p. (In Russian)

13. Alexandrov A. Yu. *Ustoichivost dvizhenij neavtonomnyh dinamicheskih sistem* [*The stability of motion of nonautonomous dynamical systems*]. St. Petersburg, Saint Petersburg State University Publ., 2004, 184 p. (In Russian)

14. Alexandrov A. Yu., Zhabko A. P. Ob asimptoticheskoy ustoychivosti resheniy nelineynyh sistem s zapazdyvaniem [On the asymptotic stability of nonlinear system solutions with delay]. *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 495–508. (In Russian)

15. Grebenschikov B. G., Klechin Yu. I. Ob ustoychivosti odnoy odnorodnoy nestatsionarnoy sistemy s lineynym zapazdyvaniem [Stability of a homogeneous nonstationary system with linear delay]. *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 12, pp. 1600–1604. (In Russian)

16. Krasovskij N. N. *Nekotoryie zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya* [*Some problems of the theory of stability of motion*]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 212 p. (In Russian)

17. *Razumikhin B. S.* Ob ustoichivosti sistem s zapazdyvaniem [Stability of systems with delay]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1956, vol. 20, no. 4, pp. 500–512. (In Russian)

Received: July 06, 2019.
Accepted: November 07, 2019.

Author's information:

Alexander V. Ekimov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; a.ekimov@spbu.ru

Olga N. Chizhova — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; o.chizhova@spbu.ru

Uliana P. Zaranik — PhD in Physics and Mathematics, Senior Lecture; u.zaranik@spbu.ru