УДК 514.76

А.М. Жукова, Г.Ю. Панина

РАВНОВЕСНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОГО ПОЛИГОНАЛЬНОГО ШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА

Жукова А.М., Панина Г.Ю. **Равновесные положения плоского полигонального шарнирного механизма**

Аннотация. Равновесные положения плоского полигонального шарнирного механизма суть его вписанные конфигурации. Мы приводим формулу для индекса Морса вписанной конфигурации и характеризуем устойчивые положения равновесия.

Ключевые слова: полигональный шарнирный механизм, равновесное положение, ориентированная площадь, индекс Морса.

Panina G., Zhukova A. **Equilibrium configurations of a planar polygonal linkage.**

Abstract. Equilibrium shapes of a planar polygonal linkage are cyclic configurations. We present a formula for the Morse index and characterize stable equilibrium configurations.

Keywords: polygonal linkage, equilibrium shape, signed area, Morse index.

1. Основные понятия и соответствия. *Плоским полигональным шарнирным механизмом* называется набор из n жестких стержней, соединенных по циклу шарнирами.

Мы изучаем только плоские конфигурации и плоские изгибания шарнирного механизма. Хотя конструкции данной статьи обобщаемы для размерности 3, ситуация в трехмерном пространстве существенно отличается от плоской [4].

Шарнирный механизм допускает различные плоские формы, совокупность которых есть *конфигурационное пространство шарнирного механизма.* В общем случае конфигурационное пространство является гладким многообразием, размерность которого равна числу степеней свободы шарнирного механизма, т. е. $n-3$.

Мы изучаем шарнирные механизмы с помощью теории Морса. Однако наша цель — сделать изложение доступным для читателя, не знакомого с этой теорией. Поэтому мы приводим ряд соответствий, позволяющих понять физический смысл происходящего. По этой же причине мы приводим по две формулировки некоторых утверждений: 1) на языке теории Морса и 2) соответствующий перевод на язык физики.

В нашей постановке задачи шарнирные механизмы лежат в некоторой плоскости, в которой происходят их изгибания. При этом разрешаются самопересечения и самоналожения ребер шарнирного механизма.

Возможна иная постановка задачи, когда изучаются изгибания шарнирного механизма, исключающие самопересечения. Обе формализации (как с самопересечением, так и без него) реализуемы технически, поэтому обе постановки задачи об изгибаниях шарнирного механизма оправданы с точки зрения практических приложений. Однако в данной статье мы ограничимся изгибаниями, при которых самопересечения допустимы.

Общая парадигма такова: припишем конфигурацям шарнирного механизма некоторую функцию энергии и изучим его изгибания в индуцированном силовом поле. Мы рассматриваем шарнирный механизм как плоский контейнер, наполненный газом. Газ создает давление на ребра механизма согласно закону Паскаля. Совокупность сил, приложенных к его ребрам, порождает некоторое изгибание механизма, которое стабилизируется в положении равновесия. В процессе изгибания механизм старается занять возможно большую площадь, т.е. его движения описываются градиентным потоком функции площади.

Положение равновесия может оказаться как устойчивым (малое шевеление шарнирного механизма возвращает его в то же положение), так и неустойчивым (после малого шевеления механизм соскальзывает в некоторое другое положение равновесия). Индекс Морса положения равновесия (т.е. размерность пространства малых шевелений, после которых шарнирный механизм возвращается в то же самое положение равновесия) естественно рассматривать как меру устойчивости положения равновесия.

Отметим однако, что согласно формализации, для конфигурации с самопересечениями физическая интерпретация несколько иная (и в некотором смысле, контринтуитивная): давление газа в разных областях, ограниченных механизмом, пропорционально индексу обхода. Так, например, в центральной части «звезды» (рис. 2) давление в 2 раза больше, чем в ее лучевых областях.

Описанная выше физическая картина точки зрения теории Морса выглядит так: «На конфигурационном пространстве полигонального шарнирного механизма рассмотрим ориентированную площадь как функцию Морса и изучим ее критические точки, индексы Морса критических точек и морсовы потоки».

Следующие определения формализуют описанные объекты:

Определение 1. *Полигональным шарнирным механизмом* называется набор из n положительных вещественных чисел $l_1, l_2, .., l_n$, реализуемых в виде длин сторон некоторого многоугольника.

Определение 2. *Конфигурацией* шарнирного механизма называется набор из n точек на плоскости $P = (p_1, p_2, .., p_n)$, таких, что $|p_i, p_{i+1}| = l_i$. При этом первые две точки зафиксированы: $p_1 = (0, 0)$ и $p_2 = (l_1, 0)$.

Конфигурация называется *вписанной*, если все ее вершины лежат на некоторой окружности.

Совокупность конфигураций с зафиксированными вершинами p_1 и p_2 есть *пространство модулей* шарнирного механизма (оно может быть рассмотрено как некоторое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n-4}$). В общем случае пространство модулей является гладким многообразием, размерность которого равна $n - 3$.

Определение 3. *Ориентированная площадь* конфигурации $P = (p_1, p_2, .., p_n)$, где $p_i = (x_i, y_i)$, задается формулой

$$A(P) = (x_1y_2 - x_2y_1) + \ldots + (x_ny_1 - x_1y_n).$$

2. Словарь соответствий.

- Конфигурационное пространство — это совокупность всех положений шарнирного механизма.
- Размерность конфигурационного пространства — это степень свободы изгибаний.
- Критическая точка — это положение равновесия функции энергии.
- Индекс Морса критической точки — это (в некотором смысле) степень устойчивости критической конфигурации.
- Индекс Морса, равный $n - 3$, — это устойчивое положение равновесия, т.е. локальный минимум функции энергии.

Для вписанной конфигурации мы вводим следующие обозначения (рис. 1):

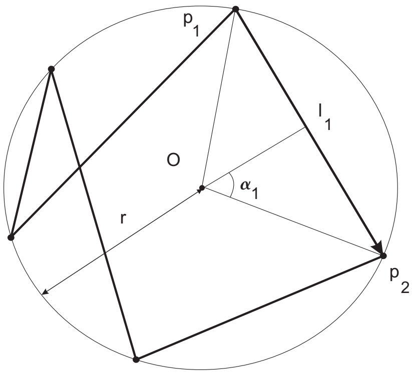

Рис. 1: Использование основных обозначений.

α_i — половина центрального угла, опирающегося на сторону p_i, p_{i+1}.

$m(P)$ — индекс Морса функции A в точке P.

$\omega(P)$ — степень конфигурации P как замкнутой ломаной относительно центра описанной окружности.

ε_i — ориентация вектора $\overrightarrow{(p_i, p_{i+1})}$ относительно центра описанной окружности.

$e(P)$ — число векторов $\overrightarrow{(p_i, p_{i+1})}$, положительно ориентированных относительно центра.

Нам понадобится следующая метрическая характеристика:

$$\delta P = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \tan \alpha_i;$$

$$d(P) = \operatorname{sign}(\delta P).$$

Утверждение 1. [5]

1. *Критические точки функции площади плоского полигонального шарнирного механизма суть вписанные конфигурации.*

2. *Устойчивые положения плоского полигонального шарнирного механизма суть вписанные конфигурации.*

Утверждение 2. [6]

1. *Степень устойчивости циклической конфигурации шарнирного механизма равна*

$$m(P) = \begin{cases} e(P) - 1 - 2\omega(P), & \text{если } \delta(P) > 0; \\ e(P) - 2 - 2\omega(P), & \text{если } \delta(P) < 0. \end{cases}$$

2. *Индекс Морса функции площади для циклической конфигурации равен*

$$m(P) = \begin{cases} e(P) - 1 - 2\omega(P), & \text{если } \delta(P) > 0; \\ e(P) - 2 - 2\omega(P), & \text{если } \delta(P) < 0. \end{cases}$$

Утверждение 3. [6] *Циклическая конфигурация шарнирного механизма является устойчивым положением равновесия, если* $\delta(P) > 0$ *и* $n - 2 = e(P) - 2\omega(P)$, *или же*
$\delta(P) < 0$ *и* $n - 1 = e(P) - 2\omega(P)$.

3. Пример. Конфигурационное пространство равностороннего пятизвенного шарнирного механизма есть поверхность рода 4 (сфера с четырьмя ручками). Согласно известным соображениям теории Морса, любая функция Морса на такой поверхности имеет по крайней мере десять критических точек.

В случае, когда функцией Морса является ориентированная площадь, в силу утверждения 1, критические точки легко перечислить (рис. 2).

Согласно утверждению 3, последние две конфигурации (положительно и отрицательно ориентированные звезды) являются точками устойчивого равновесия. Физический смысл таков: при любом малом шевелении первой из звезд ее площадь уменьшается. Иными словами, эта конфигурация — локальный максимум ориентированной площади.

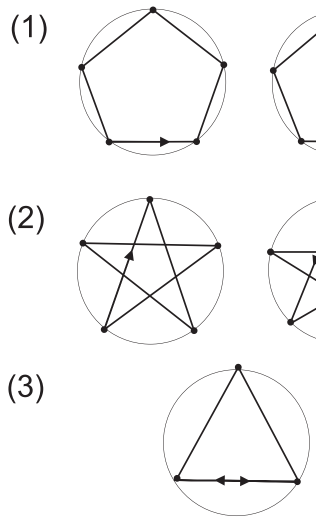

Рис. 2: Положения равновесия равностороннего пятизвенного шарнирного механизма.

Литература

1. *Elerdashvili E., Jibladze M., Khimshiashvili G.* Cyclic configurations of pentagon linkages // Bull. Georgian Acad. Sci. 2008. Vol. 2, N 4, P. 13–16.

2. *Farber M., Schütz D.* Homology of planar polygon spaces // Geom. Dedicata. 2007. Vol. 125, N 18, P. 75–92.

3. *Gibson C., Newstead P.* On the geometry of the planar 4-bar mechanism // Acta Appl. Math. 1986. Vol. 7, N 23, P. 113–135.

4. *Khimshiashvili G., Panina G., Siersma D., Zhukova A.* Critical points of robot arms and polygonal linkages in 3D (готовится).

5. *Khimshiashvili G., Panina G.* Cyclic polygons are critical points of area // Записки научных семинаров ПОМИ. 2008. Т 360, № 8. С. 238–245.

6. *Panina G., Zhukova A.* Morse index of a cyclic polygon. arXiv:1007.2740v2 [math.MG]

Жукова Алена Михайловна — аспирант математико-механического факультета СПбГУ. millionnaya13@ya.ru; СПбГУ, Университетская наб., д. 7–9, Санкт-Петербург, 199034, РФ. Научный руководитель — Г.Ю. Панина.

Alena M. Zhukova — Ph. D. student of Faculty of Mathematics and Mechanics of SPbSU. millionnaya13@ya.ru; SPbSU, Universitetskaya emb., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russia. Scientific advisor — Panina Yu. Gaiane.

Панина Гаянэ Юрьевна — д-р физ.-мат. наук, в.н.с. лаборатории ИТУР СПИИРАН. Область научных интересов: шарнирные механизмы, математическое моделирование, геометрические алгоритмы, комбинаторная геометрия. Число научных публикаций — 30. gaiane-panina@rambler.ru; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ.

Gaiane Yu. Panina — leading researcher of Laboratory of Informational Technologies for Control and Robotics, SPIIRAS. Research area: linkages, mathematical models, computational geometry, combinatorial geometry. Number of publications — 30. gaiane-panina@rambler.ru; SPIIRAS, 14th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia.

Рекомендовано лабораторией ИТУР СПИИРАН, зав. лаб. А.В. Тимофеев.

Статья поступила в редакцию 12.11.2010.

РЕФЕРАТ

Жукова А.М., Панина Г.Ю. **Равновесные положения плоского полигонального шарнирного механизма.**

Мы изучаем плоские полигональные шарнирные механизмы L с двумя фиксированными вершинами и их изгибания на плоскости с разрешенными самопересечениями.

Шарнирный механизм рассматривается как плоский замкнутый контейнер, наполненный газом. Давление газа индуцирует изгибание шарнирного механизма, описываемое законом Паскаля. Таким образом, имеет смысл говорить о равновесных состояниях, устойчивых равновесных состояниях и о мере устойчивости равновесного состояния.

Естественное математическое описание для этой физической ситуации дает теория Морса. Функция *ориентированной площади* $A(P)$ конфигурации P в общем случае является функцией Морса на конфигурационном пространстве $\mathcal{M}(L)$ шарнирного механизма L.

Уже давно известно, что A достигает глобального максимума в выпуклой, положительно ориентированной (т.е. против часовой стрелки) вписанной конфигурации L. Следовательно, A достигает минимума в *антивыпуклой* (выпуклой, отрицательно ориентированной) вписанной конфигурации L. В данной работе мы изучаем все остальные критические точки A.

Приведем словарь, связывающий теорию Морса с физическим контекстом:

- Конфигурационное пространство (пространство модулей) — это множество всех положений шарнирного механизма.
- Размерность $\mathcal{M}(L)$ — это число степеней свободы.
- Критическая точка — это равновесное (по отношению к давлению газа) состояние.
- Индекс Морса критической точки — это степень устойчивости.
- Индекс Морса, равный $n-3$, — это устойчивое состояние равновесия.

В работе утверждается следующее:

1. Критические точки шарнирного механизма — это вписанные конфигурации.
2. Приведена формула для индекса Морса вписанной конфигурации. Эта формула характеризует устойчивые положения шарнирного механизма.

SUMMARY

Panina G., Zhukova A. **Equilibrium configurations of a planar polygonal linkage.**

We study planar polygonal linkages L with two pinned vertices and their flexes in the plane with allowed self-intersections.

A linkage is considered to be a planar closed container filled with gas. The pressure of the gas induces a flex of the linkage L ruled by Pascal law. Thus it makes sense to speak of equilibrium configurations, stable equilibrium configurations and the measure of stability of an equilibrium configuration.

The natural mathematical framework for this physical situation is the Morse theory. The *signed area* $A(P)$ of a configuration P is generically a Morse function on the configuration space $\mathcal{M}(L)$ of a linkage L.

It is known since long that A achieves its global maximum at the convex positively oriented (that is, oriented counterclockwise) cyclic configuration of L. Consequently, A achieves its minimum at the *anticonvex* (convex negatively oriented) cyclic configuration of L. In the paper we study all other critical points of A, not just the global extrema.

Here is a dictionary which relates Morse theory to the physical context:

- Configuration (or moduli) space = the set of all possible planar shapes of the linkage.
- Dimension of $\mathcal{M}(L)$ = freedom degree of the flexes.
- Critical point = equilibrium (with respect to the gas pressure) shape.
- Morse index of a critical point = measure of stability of an equilibrium shape.
- Morse index of a critical point equals $n-3$ = stable equilibrium shape.

In this framework, the paper states the following:

1. Critical points of a linkage are cyclic configurations, i.e., those that can be inscribed in a circle.
2. We present a formula for the Morse index of a cyclic configuration.
3. The above formula characterizes stable equilibrium configurations of a linkage.