ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Григорьева Юрия Александровича "Геометрические методы исследования интегрируемых и суперинтегрируемых систем в классической механике", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 теоретическая физика.

Представленная к защите диссертация посвящена геометрическим методам исследования интегрируемых и суперинтегрируемых систем классической механики. Под такими системами понимаются конечномерные гамильтоновы системы с достаточным числом сохраняющихся интегралов движения. Одним из самых универсальных методов интегрирования уравнений движения для таких систем является метод разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби, который с момента создания и до настоящего времени является предметом научных исследований. Основная сложность в применении этого метода на практике состоит в том, что, как было указано еще его создателем К. Якоби: "...Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит во введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого правила...".

Тем не менее, за полтора века был разработан адекватный дифференциально-геометрический аппарат, не только проливающий свет на причины, позволившие решить те или иные задачи, но и позволяющий получать новые результаты — например строить семейства новых интегрируемых систем, или классифицировать известные. Таким образом, избранная автором тема диссертационной работы является актуальной для многих областей современной теоретической физики.

Текст диссертации занимает около сотни страниц и состоит из введения, обзора литературы, четырех глав, и списка литературы, включающего 103 источника.

Во введении приведены обоснование актуальности выбранной темы диссертации, аргументирована научная новизна и практическая значимость результатов исследований. Там же представлены выносимые на защиту научные положения.

В обзоре литературы дан исторический обзор теории интегрируемых систем – с начала её развития в XIX веке до настоящего времени.

В первой главе вводятся необходимые обозначения и приводятся основные определения теории интегрируемых систем, в частности, понятие переменных разделения; сформулирована классическая теорема Лиувилля в необходимой для дальнейшего форме. Там же обсуждаются системы Штеккеля и разделение переменных в системах с гамильтонианом соответствующего вида, приводится критерий интегрируемости системы Леви-Чивита, и его современная трактовка для систем с гамильтонианом натурального вида.

Вторая глава посвящена обсуждению метода разделения переменных для L-систем. Геометрические характеристики пространства, в котором задана система, связаны с возможностью разделения переменных через L-тензор – конформный тензор Киллинга с нулевым кручением Нийенхейса. Автор диссертации реализовал, предложенный Бененти, алгоритм построения L-тензоров, переменных разделения и интегралов движения. Алгоритм Бененти был доведен автором до практической реализации с применением систем компьютерной алгебры. Работа созданного автором программного комплекса опробована на ряде известных интегрируемых систем с дополнительными, квадратичными по импульсам, интегралами. В работе приведены результаты для систем Неймана и Холта, на примере которых можно увидеть применение алгоритма к системам, не являющимся L-системами в изначальной формулировке. Рассмотрение результатов работы программного обеспечения для уже изученных другими методами интегрируемых систем позволила проверить корректность его работы. Программы эти использовались в следующих главах диссертации.

Третья глава посвящена построению и классификации суперинтегрируемых систем на основе теорем сложения. Для классификации применены результаты Ришело о существовании дополнительных интегралов для систем уравнений Абеля на гиперэллиптических якобианах. В частности, автор построил полную классификацию систем типа Эйлера на комплексной евклидовой плоскости. Обобщая эти результаты на более общие системы уравнений Абеля, предложен метод построения различных семейств суперинтегрируемых систем типа Ришело, связанных с различными базовыми ортогональными криволинейными системами координат.

Четвёртая глава посвящена построению переменных разделения в рамках бигамильтонова подхода для двух систем классической механики: обобщённой системы Энона-Эйлеса и обобщённой системы с потенциалом четвёртой степени. Для системы Энона-Эйлеса, заданной гамильтонианом и вторым интегралом движения, существовали переменные разделения для случая, когда два из параметров равны нулю и, соответственно, часть членов в гамильтониане и интеграле отсутствует, а также существовало исследование системы с помощью аппарата матриц Лакса. В данной главе этот результат был воспроизведён в рамках бигамильтонова подхода, а затем были получены новые переменные разделения и разделённые уравнения для наиболее общего случая. Для этого условия нахождения интегралов движения в биинволюции относительно скобок Пуассона и условия совместимости скобок Пуассона были записаны в виде уравнений на бивекторы Пуассона, решения которых удалось получить в явном виде, а затем изменения в уравнениях от введения дополнительных членов были скомпенсированы каноническим преобразованием координат.

Полученная бигамильтонова структура позволила вычислить переменные разделения и построить разделённые уравнения. Этот подход был также успешно применён к обобщённой системе с потенциалом четвёртой степени, для которой были построены новые переменные разделения для общего случая, и выписаны разделённые уравнения.

К числу недостатков работы можно отнести полное отсутствие обсуждения квантовых аналогов рассматриваемых систем, хотя известно, что метод разделения позволяет достаточно просто построить квантовый аналог как интегралов движения, так и разделенных уравнений.

Хочется так же заметить, что автор интересуется лишь нахождением переменных разделения, построением и классификацией интегрируемых систем, обладающих такими переменными. В то же время, возможность построения переменных разделения имеет большое значение и при изучении динамики, так как позволяет получить более просто устроенные решения уравнений движения, найти переменные действие-угол, провести качественный анализ разделённых уравнений. Естественно, что эти вопросы требуют отдельной работы, но автору всё же следовало бы наметить пути применения полученных им результатов в смежных областях.

В заключение отмечу, что в диссертационной работе были получены новые интегрируемые системы, переменные разделения, и разделённые уравнения. Квалифицированное использование современного математического аппарата и систем компьютерной алгебры при проведении вычислений свидетельствует об обоснованности результатов, представленных в диссертации.

Научная значимость результатов состоит в развитии геометрических методов исследования интегрируемых и суперинтегрируемых систем, которые могут применяться для нахождения переменных разделения систем классической механики, а также для задач классификации и поиска новых интегрируемых и суперинтегрируемых систем. Созданное в рамках диссертационной работы программное обеспечение позволяет легко применять эти методы для важных классов интегрируемых систем.

Высказанные выше замечания носят частный характер и не влияют на положительную оценку диссертационной работы. В целом, представленная диссертация представляет собой выполненную на высоком научном уровне законченную научно-квалификационную работу на актуальную тему. Диссертация содержит решение задач, имеющих существенное значение для современной теоретической физики. Результаты прошли достаточную апробацию на научных конференциях и семинарах и своевременно опубликованы в ведущих рецензируемых научных журналах. При написании диссертации автор ссылается на источники заимствования материалов и отдельных результатов, приведённые в библиографическом списке. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Принимая во внимание актуальность темы диссертации Григорьева Ю. А., научную новизну и значимость полученных результатов, считаю, что представленная диссертационная работа соответствует всем критериям, установленным “Положением о порядке присуждения учёных степеней”, и её автор заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – “теоретическая физика”.

Доктор физ.-мат. наук М.В.Бабич

Подпись руки М.В. Бабича

УДОСТОВЕРЯЮ

Помощник директора

ПОМИ РАН ____________ А.Н. Антонова

"21" июня 2022 г.