Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Григорьев Юрий Александрович

Геометрические методы исследования интегрируемых и суперинтегрируемых систем в классической механике

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2012

Работа выполнена в *Санкт-Петербургском государственном университете.*

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук, профессор, Цыганов Андрей Владимирович*
Официальные оппоненты:	*Бабич Михаил Васильевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, ведущий научный сотрудник;*
	Борисов Алексей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, Удмуртский государственный университет, заведующий сектором
Ведущая организация:	*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук (ИМАШ РАН)*

Защита состоится «____» ____________ 2012 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д 212.232.24* при *Санкт-Петербургском государственном университете* по адресу: *199004, Санкт-Петербург, Средний пр., д. 41/43, ауд. 304*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Санкт-Петербургского государственного университета.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета *Аксенова Е. В.*

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Исследование интегрируемых систем с момента постановки задачи разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби и поиска интегралов движения систем классической механики являлось одной из самых сложных проблем теоретической физики. После первых успехов для множества известных к тому времени и некоторых вновь построенных интегрируемых систем прогресс в этой области замедлился, поскольку общего метода исследования заданной интегрируемой системы не было обнаружено, и нахождение переменных разделения превратилось в своего рода искусство, в котором каждый из исследователей должен был выбирать различные методы решения для различных систем, не имея возможности предвидеть результаты применения этих методов и очертить круг действий (таких, как замены переменных, переход к промежуточным координатам), необходимых для успешности исследования.

Нахождение переменных разделения для конечномерных интегрируемых систем оставалось скорее искусством, чем научным методом на протяжении более века, хотя в течение этого времени были построены подробные классификации интегрируемых систем по виду интегралов движения, и выявлена связь теории интегрируемых систем с некоторыми классами нелинейных систем. Метод решения обратной задачи рассеяния, построенный во второй половине XX века, позволил найти явные решения для широкого класса нелинейных уравнений, а последующий перенос многих его положений на квантовый случай предоставил возможность его применения для построения точных решений большого количества интегрируемых систем, описывающих модели квантовой механики, квантовой теории поля и статистической физики.

Дальнейшее изучение возможностей переноса методов исследования интегрируемых систем с классических на квантовые случаи позволило выделить основные элементы таких схем, вернуться к исследованным ранее классическим системам и сделать первые шаги к пониманию причин успеха или неудачи в разделении переменных для тех или иных систем. Внутренние симметрии систем и вообще методы задания систем и пространств, в которых интегрируемые системы определены, оказали определяющее влияние на развитие методов разделения переменных в 1980-е годы. Найденные инвариантные характеристики интегрируемых систем позволили создать новый математический аппарат для решения классической задачи, в котором оказались естественным образом взаимосвязаны функциональный анализ, теория функций, алгебраическая, дифференциальная и пуассонова геометрия, теория групп и алгебр Ли.

Быстрое развитие в конце XX и начале XXI века компьютерных средств, разработанных для решения различных математических задач, в частности, пакетов компьютерной алгебры общего назначения, позволило в полной мере использовать найденные связи между теорией интегрируемых систем и другими областями математической физики. Возможность использовать компьютеры для сложных и объёмных расчётов оказалась ключевой для применения формализованных методов исследования интегрируемых систем, позволив как применять их для уже изученных систем с интегралами высоких степеней по импульсам, так и с гораздо меньшими усилиями исследовать обширные классы в том числе и новых интегрируемых систем.

Таким образом, современные хорошо формализуемые методы исследования интегрируемых систем являются одним из актуальных направлений в теории квантовых и классических интегрируемых систем. Интерес к таким методам определяется не только практическим значением метода для разделения переменных в заданной системе классической механики, но и теоретическими возможностями построения новых интегрируемых систем и более полного понимания их организации, как для классического, так и для квантового случая.

Цель диссертационной работы состоит в развитии геометрических методов исследования интегрируемых по Лиувиллю систем классической механики.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Реализован метод построения переменных разделения и интегралов движения для L-систем.
2. Разработан метод классификации интегрируемых систем типа Штеккеля.
3. Исследованы методы поиска новых интегрируемых систем.
4. Предложен метод классификации суперинтегрируемых систем типа Штеккеля, основанный на теоремах сложения.
5. Создан метод разделения переменных для широкого класса бигамильтоновых систем с интегралами движения старших степеней.
6. Данный метод применён к конкретным системам с интегралами высоких порядков по импульсам.

Научная новизна В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Создана практическая реализация алгоритма построения переменных разделения и интегралов движения для L-систем на основе методов бигамильтоновой геометрии.
2. Построена классификация систем типа Эйлера на основе теорем сложения.
3. Предложен метод построения суперинтегрируемых систем типа Ришело.
4. Осуществлено разделение переменных для обобщённой системы с потенциалом четвёртой степени и интегралом четвёртой степени по импульсам.

Практическая значимость Диссертация носит теоретический характер. В то же время прикладное программное обеспечение, представленное в диссертации, может быть использовано для исследования интегрируемых и суперинтегрируемых систем с интегралами второго и более высоких порядков по импульсам. Метод классификации интегрируемых систем, основывающийся на использовании теорем сложения, может быть применён для исследования существующих и построения новых суперинтегрируемых систем. Метод исследования, основанный на использовании оператора рекурсии, позволяет находить переменные разделения для широкого класса бигамильтоновых систем.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Практическая реализация алгоритма построения переменных разделения и интегралов движения для L-систем на основе методов бигамильтоновой геометрии.
2. Классификация систем типа Эйлера на основе теорем сложения.
3. Метод построения суперинтегрируемых систем типа Ришело.
4. Разделение переменных для обобщённой системы с потенциалом четвёртой степени и интегралом четвёртой степени по импульсам.

Апробация работы Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. The third International Conference Superintegrable Systems in Classical and Quantum Mechanics, Prague, 5-9 May, 2008;
2. XIII International Conference “Symmetry Methods in Physics”, Dubna, Russia, July 6-9, 2009;
3. Second International Conference Geometry, Dynamics, Integrable Systems, Belgrade, 7 – 13 September 2010;
4. International Conference Geometry, Dynamics, Integrable Systems, Belgrade, 2 – 7 September 2008;

а также на семинарах в ОИЯИ, МГУ, СПбГУ и УдГУ.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 статьях в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендуемых ВАК для опубликования основных научных результатов диссертаций [A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7].

Личный вклад автора Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 4 глав и библиографии. Общий объем диссертации 92 страницы. Библиография включает 103 наименования на 11 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Обзор литературы описывает основные этапы развития теории интегрируемых систем и важнейшие полученные в данной области результаты.

В первой главе вводятся основные определения теории разделения переменных для систем классической механики. Приведены теоремы Лиувилля о полной интегрируемости системы и теорема Штеккеля. Осуществляется постановка задачи разделения переменных для систем с гамильтонианом натурального вида и приводится критерий Леви-Чивита для таких систем.

Во второй главе обсуждается реализация метода разделения переменных, основанного на бигамильтоновом подходе к построению переменных разделения и интегралов движения для L-систем. Рассматриваются примеры использования разработанного автором программного обеспечения, реализующего этот метод в среде символьных вычислений Maple, для разделения переменных в системах Неймана и Холта.

При рассмотрении системы классической механики необходимо учитывать влияние метрики, задаваемой метрическим тензором $\mathbf{G}$, на возможность разделения переменных. Введя через тензорное уравнение Киллинга

$$[\mathbf{K}, \mathbf{G}] = 0$$

тензор Киллинга $\mathbf{K}$, можно построить конформный тензор Киллинга

$$\mathbf{L} = \mathbf{K} + f(q)\mathbf{G},$$

где функцию f называют потенциалом, с нулевым кручением Ниейенхейса

$$T^m_{ij} \equiv 2L^\alpha_i \partial_\alpha L^m_j - 2L^m_\alpha \partial_i L^\alpha_j = 0\,,$$

который называется L-тензором или тензором Бененти. Важность L-тензора для задачи разделения переменных состоит в том, что он с помощью конструктивной процедуры, предложенной Бененти, порождает пространство Киллинга-Штеккеля тензоров $\mathbf{K_m}$, уравнения на которые сводятся к уравнениям Леви-Чивита, и которые, с другой стороны, связаны с расслоением риманова пространства $\mathcal{Q}$ на гиперповерхности, образующие веб Штеккеля.

Собственные значения тензора Бененти являются переменными разделения для интегрируемой системы, а каноническое поднятие тензора Бененти на кокасательное расслоение $T^*\mathcal{Q}$ — оператор рекурсии — позволяет с помощью рекуррентной процедуры построить все интегралы движения системы.

Для нахождения L-тензора данной системы с гамильтонианом натурального вида $H = T + V$ уравнения на его компоненты были сведены к виду

$$d(\mathtt{i}_{X_T} d\,\theta - T d\sigma_1) = 0$$
$$d(\mathtt{i}_{X_V} d\,\theta - V d\sigma_1) = 0,$$

где $\theta = \sum_{i,j=1}^n L^i_j\, p_i dq^j$ — L-деформация стандартной 1-формы Лиувилля, а $\sigma_1 = \operatorname{tr}\mathbf{L}$. Эта система уравнений решается в системе символьных вычислений

Maple после преобразования к системе уравнений в частных производных на компоненты L-тензора. В результате был реализован конструктивный алгоритм построения переменных разделения и соответствующих интегралов движения для данного гамильтониана натурального вида H.

Созданное программное обеспечение было применено для нахождения переменных разделения для различных L-систем и показало свою эффективность, позволяя получить переменные разделения и интегралы движения за несколько минут в автоматическом режиме. В работе приведены более сложные примеры для системы Неймана и системы Холта, потребовавшей предварительной замены переменных, сводящей её к системе Штеккеля.

Результаты второй главы опубликованы в работах [A1, A2, A5, A6].

В третьей главе рассматривается метод построения и классификации суперинтегрируемых систем. После краткого обзора результатов Эйлера, впервые связавшего решение дифференциального уравнения с теоремой сложения, приводится классификация систем типа Эйлера, а затем обсуждается метод построения дополнительных интегралов движения для уравнений Абеля и построения соответствующих суперинтегрируемых систем классической механики.

Систематическое исследование суперинтегрируемых систем началось с результата Эйлера, который установил, что дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{X}} + \frac{\mathrm{dy}}{\sqrt{Y}} = 0,$$

где $X = a\mathrm{x}^4 + 4b\mathrm{x}^3 + 6c\mathrm{x}^2 + 4d\mathrm{x} + e$, и Y так же зависит от y, связано с интегралом движения

$$F(\mathrm{x},\mathrm{y}) = a\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2 + 2b\mathrm{xy}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) + c(\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2) + 2d(\mathrm{x}+\mathrm{y}) + e = 0,$$

задающим классическую траекторию движения.

Для классификации суперинтегрируемых систем типа Эйлера рассмотрим гиперэллиптическую кривую

$$\mu^2 = P(\lambda), \qquad \text{где} \qquad P(\mathrm{x}) = X,$$

которая после замены переменных порождает заданные через матрицу Штеккеля $\mathbf{S}$ разделённые уравнения для систем штеккелевского типа

$$p_j = \sqrt{\sum_{k=1}^{2} H_k \mathbf{S}_{kj} + U_j(q_j)}\,.$$

Решения этих уравнений требуется ограничить, используя теоремы сложения Эйлера и получая в итоге уравнения

$$\kappa_j u_j v_j' = \alpha_2 v_j^4 + 4\beta_2 v_j^3 + 6\gamma_2 v_j^2 + 4\delta_2 v_j + \epsilon_2\,, \qquad \kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = \pm 1,$$

на функции $u(q), v(q)$, задающие замену переменных в гиперэллиптической кривой, и коэффициенты $\alpha_2, \beta_2, \dots, \epsilon_2$, с которыми в полученное уравнение входят интегралы движения H_1 и H_2.

Существует всего пять различных решений этого уравнения, и, накладывая дополнительные ограничения на метрику системы, например, требуя, чтобы кинетическая часть гамильтониана принимала вид

$$T = \sum \left(\mathbf{S}^{-1}\right)_{1j} p_j^2 = p_x p_y,$$

получим полную классификацию суперинтегрируемых систем типа Эйлера.

В качестве иллюстрации этого метода построены все суперинтегрируемые системы типа Эйлера на комплексном евклидовом пространстве $E_2(\mathbb{C})$ с гамильтонианом

$$H_1 = p_x p_y + V(x, y)$$

и вещественными потенциалами.

Обобщением результатов Эйлера можно считать теоремы сложения для уравнений Абеля. Следуя Ришело, рассмотрим гиперэллиптическую кривую

$$\mathrm{y}^2 = f(\mathrm{x}) \equiv A_{2n}\mathrm{x}^{2n} + A_{2n-1}\mathrm{x}^{2n-1} + \dots + A_1\mathrm{x} + A_0$$

и систему из $n-1$ дифференциального уравнения Абеля на этой кривой

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathrm{x}_1}{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}+\frac{d\mathrm{x}_2}{\sqrt{f(\mathrm{x}_2)}}+\dots+\frac{d\mathrm{x}_n}{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}=0,\\
&\frac{\mathrm{x}_1 d\mathrm{x}_1}{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}+\frac{\mathrm{x}_2 d\mathrm{x}_2}{\sqrt{f(\mathrm{x}_2)}}+\dots+\frac{\mathrm{x}_n d\mathrm{x}_n}{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\mathrm{x}_1^{n-2} d\mathrm{x}_1}{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}+\frac{\mathrm{x}_2^{n-2} d\mathrm{x}_2}{\sqrt{f(\mathrm{x}_2)}}+\dots+\frac{\mathrm{x}_n^{n-2} d\mathrm{x}_n}{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}=0\,.
\end{aligned}$$

Переходя с помощью произвольных подстановок, аналогичных таковым для систем типа Эйлера, к координатам λ_i, μ_i, рассматриваем коэффициенты гиперэллиптических кривых как линейные функции интегралов системы. Решая полученные уравнения относительно интегралов движения, получаем интегралы типа Штеккеля, и, таким образом, определяем вид матрицы Штеккеля в переменных λ. Практическое применение данного метода осложнено тем, что конечным результатом должна быть система, выраженная в исходных физических переменных, а не в абстрактных переменных разделения.

Основные ортогональные системы криволинейных координат в евклидовом пространстве определяются функцией

$$e(\lambda)=\frac{\prod_{i=1}^{N}(\lambda-q_j)}{\prod_{j=1}^{M}(\lambda-e_j)}=\frac{\phi(\lambda)}{u(\lambda)}\,,\qquad M=N,N\pm1,$$

где $\phi(\lambda)=\prod_{i=1}^{N}(\lambda-q_j)$ и $u(\lambda)=\prod_{j=1}^{M}(\lambda-e_j)$ — полиномы. Если разделённые уравнения в таких координатах имеют вид

$$p_i^2\,u(q_i)^2=\frac{1}{2}\left[u(\lambda)\cdot\left(H_1\,\lambda^k+\sum_{i=2}^{N}H_i\,\lambda^{n-i}\right)-\alpha(\lambda)\right]_{\lambda=q_i},$$

где $\alpha(\lambda)=\sum_{j=0}^{2N}\alpha_j\,\lambda^j$ — произвольный полином, и $k=n$, то соответствующий максимально суперинтегрируемый гамильтониан

$$H_1=T+V=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{res}\Big|_{\lambda=q_i}\frac{1}{e(\lambda)}\cdot p_i^2-\sum_{i=1}^{N}\mathrm{res}\Big|_{\lambda=q_i}\frac{\alpha(\lambda)}{u^2(\lambda)e(\lambda)}$$

представляется в натуральном виде в физических декартовых координатах на пространстве $\mathbb{E}_n$

$$H_1 = T + V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_{x_i}^2 + \sum_{i=0}^{M} \operatorname{res}\Big|_{\lambda=e_i} \frac{\alpha(\lambda)}{u^2(\lambda)\, e(\lambda)},$$

таким образом, можно построить полную классификацию суперинтегрируемых систем типа Ришело в основных системах координат.

Для различных систем координат (параболической, эллиптической, вытянутой сфероидальной, параболоидальной, вырожденной эллиптической) можно легко построить суперинтегрируемую систему с потенциалом

$$V = \sum \operatorname{res}\Big|_{\lambda=e_i} \frac{\alpha(\lambda)}{u^2(\lambda)\, e(\lambda)}, \qquad u(\lambda) = \prod_{j=1}^{M} (\lambda - e_j)\,,$$

определяемым через производящую функцию $e(\lambda)$ системы координат и произвольный полином $\alpha(\lambda)$. При этом интегралы движения H_k системы и дополнительные интегралы движения Ришело являются полиномами второй степени по импульсам

$$K_1 = \left[\frac{u_1 p_1}{F'(v_1)} + \cdots + \frac{u_n p_n}{F'(v_n)}\right]^2 - A_{2n-1}(v_1 + \cdots + v_n) - A_{2n}(v_1 + \cdots + v_n)^2$$

и

$$\begin{aligned} K_2 = {} & \left[\frac{u_1 p_1}{v_1^2 F'(v_1)} + \cdots + \frac{u_n p_n}{v_n^2 F'(v_n)}\right]^2 v_1^2 v_2^2 \cdots v_n^2 \\ & - A_1\left(\frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right) - A_0\left(\frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right)^2 . \end{aligned}$$

что позволяет найти суперинтегрируемые системы с гамильтонианом натурального вида на римановых многообразиях постоянной кривизны, используя теорию ортогональных систем координат и соответствующих тензоров Киллинга, описанную во второй главе.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [A3, A4].

В четвёртой главе рассматривается метод разделения переменных для более широкого класса интегрируемых систем, использующий общие для всех интегрируемых систем геометрические принципы и разные интегралы движения, отвечающие конкретным интегрируемым системам. Накладывая ограничения на форму бивектора Пуассона бигамильтоновой системы с гамильтонианом натурального вида, для системы Энона-Эйлеса и обобщённой системы с потенциалом четвёртой степени, с помощью данного метода оказалось возможным по двум заданным интегралам движения системы построить переменные разделения для системы и получить разделённые уравнения.

Рассматривая бигамильтоновы системы с двумя совместимыми скобками Пуассона $\{.,.\}$ и $\{.,.\}'$, можно заметить, что во многих случаях задающий вторую скобку бивектор Пуассона имеет натуральный вид, то есть представим в виде суммы геодезического бивектора P'_T и потенциального бивектора, связанного с потенциалом V.

$$P' = P'_T + \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{ij} \\ & \\ -\Lambda_{ji} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Lambda_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial \Lambda_{kj}}{\partial q_i} \right) p_k \end{pmatrix}.$$

Геодезический бивектор Пуассона P'_T при этом определяется матрицей размерности $n \times n$ на $T^*\mathcal{Q}$ и функциями x, y и z:

$$P'_T = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{x}_{jk}(q) \frac{\partial \Pi_{jk}}{\partial p_i} - \mathrm{y}_{ik}(q) \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial p_j} & \Pi_{ij} \\ & \\ -\Pi_{ji} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi_{kj}}{\partial q_i} \right) \mathrm{z}_k(p) \end{pmatrix}.$$

Заданные условия на нахождение интегралов системы в инволюции относительно скобок Пуассона и нахождение бивекторов Пуассона в инволюции относительно скобок Схоутена позволяют найти в явном виде бивекторы Пуассона системы.

Рассмотрим обобщённую систему Энона-Эйлеса с гамильтонианом

$$H_1 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{c_1}{8}\, q_2(3q_1^2 + 16q_2^2) + c_2\left(2q_2^2 + \frac{q_1^2}{8}\right) + \frac{c_4}{q_1^2} + \frac{c_5}{q_1^6}$$

и вторым интегралом движения четвёртого порядка по импульсам. Для разделения переменных в этой системе требуется неточечное преобразование, и конструктивного метода разделения переменных для этой системы не существовало.

Решая уравнения относительно компонент бивекторов Пуассона для случая $c_4 = c_5 = 0$, можно найти два решения $\Pi, \Lambda, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$, порождающих бивекторы Пуассона P_1' и P_2' системы. Используя одно из этих решений вместе с каноническим бивектором Пуассона, можно немедленно построить оператор рекурсии N, задающий переменные разделения и определяющий рекуррентные уравнения для вычисления интегралов движения.

В случае $c_{4,5} \neq 0$ применим к бивекторам Пуассона, полученным для предыдущего случая, каноническое преобразование $p_1 \to p_1 + \sqrt{\dfrac{-2c_5}{q_1^6}}$, после чего рассмотрим оператор рекурсии $\hat{N}_2 = \hat{P}_2 P^{-1}$, собственные значения которого являются корнями полинома

$$B(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{c_1 q_2 + c_2}{4} + \frac{2\sqrt{-2c_5}\, p_1}{q_1^5} - \frac{2c_5}{q_1^8}\right)\lambda + \frac{c_1^2(8q_1^2 + q_2)}{16}$$
$$- \frac{c_1(4p_1^2 q_2 - 2q_1 p_1 p_2 - c_2 q_1^2 q_2)}{16q_1^2} - \frac{c_1\sqrt{-2c_5}(4p_1 q_2 - q_1 p_2)}{8q_1^5} + \frac{c_1 c_5 q_2}{2q_1^8}\,,$$

и построим дополнительный полином $A(\lambda) = a_1\lambda + a_0$, являющийся решением уравнений

$$\{B(\lambda), A(\mu)\} = -\frac{\big(d_2\mu^2 + d_1\mu + d_0\big)\, B(\lambda) - \big(d_2\lambda^2 + d_1\mu + d_0\big)\, B(\mu)}{\lambda - \mu}\,,$$

$$\{A(\lambda), A(\mu)\} = 0$$

относительно неизвестных функций $a_{1,0}$, $d_{1,2}$ и d_0. После того, как полином $A(\lambda)$ найден, легко вычислить сопряжённые импульсы и построить обратное каноническое преобразование от переменных разделения к исходным переменным. Разделённые уравнения для системы Энона-Эйлеса имеют вид

$$\Phi(u_k,p_{u_k}) = \Phi_+(u_k,p_{u_k})\Phi_-(u_k,p_{u_k}) - \frac{c_4(c_2-8u_k)}{4} + \frac{c_1^2\sqrt{-2c_5}\,p_{u_k}}{32} = 0\,, \quad k=1,2,$$

где

$$\Phi_\pm(u_k,p_{u_k}) = \left(\frac{c_1^2p_{u_k}^2}{32} - H_1 \pm \frac{\sqrt{H_2}}{2} - \frac{128u_k^3}{c_1^2} + \frac{32c_2u_k^2}{c_1^2}\right)\,.$$

Этот метод также применён для обобщённой системы с потенциалом четвёртого порядка, для которой заданы гамильтониан

$$H_1 = \frac{p_1^2+p_2^2}{2} + \frac{c_1}{4}\left(q_1^4+6q_1^2q_2^2+8q_2^4\right) + \frac{c_2}{2}\left(q_1^2+4q_2^2\right) + \frac{2c_3}{q_2^2} + \frac{c_4}{q_1^2} + \frac{c_5}{q_1^6}$$

и второй интеграл движения четвёртого порядка по импульсам. Для этой системы существуют разделённые уравнения; в зависимости от значений параметров c_4 и c_5 разделённые уравнения имеют штеккелевский или нештеккелевский вид. Далее в главе воспроизведён в рамках бигамильтонова подхода известный результат для случая $c_4=c_5=0$

$$\Phi_-\left(u_1,p_{u_1}\right) = H_1 - \frac{1}{2}\sqrt{H_2} + 2c_1u_1p_{u_1}^2 - \frac{2u_1^2}{c_1} + \frac{2c_2u_1}{c_1} + \frac{2c_1c_3}{u_1} = 0\,,$$
$$\Phi_+\left(u_2,p_{u_2}\right) = H_1 + \frac{1}{2}\sqrt{H_2} + 2c_1u_2p_{u_2}^2 - \frac{2u_2^2}{c_1} + \frac{2c_2u_2}{c_1} + \frac{2c_1c_3}{u_2} = 0\,.$$

а затем для случая $c_{4,5}\neq 0$ получены новые нештеккелевские разделённые уравнения

$$\Phi\left(u_k,p_{u_k}\right) = \Phi_+\left(u_k,p_{u_k}\right)\Phi_-\left(u_k,p_{u_k}\right) + c_4\left(2u_k-c_2\right) - 2\sqrt{-2c_5}p_{u_k}u_kc_1 = 0\,,$$

где

$$\Phi_\pm\left(u_k,p_{u_k}\right) = H_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{H_2} + 2c_1u_kp_{u_k}^2 - \frac{2u_k^2}{c_1} + \frac{2c_2u_k}{c_1} + \frac{2c_1c_3}{u_k} = 0$$

Результаты четвёртой главы опубликованы в работе [A7].

Список публикаций

A1. Григорьев Ю. А. Программное обеспечение для построения переменных разделения в уравнении Гамильтона-Якоби // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 4: Физика. Химия. 2010. № 2. С. 107–112.

A2. Григорьев Ю. А., Цыганов А. В. О вычислении переменных разделения в уравнении Гамильтона-Якоби на компьютере // Нелинейная динамика. 2005. Т. 1, № 2. С. 163–179.

A3. Григорьев Ю. А., Цыганов А. В. Об уравнениях Абеля и интегралах Ришело // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 4. С. 463–478.

A4. Grigoryev Yu. A., Khudobakhshov V. A., Tsiganov A. V. On the Euler superintegrable systems // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42, no. 7, 075202. 11 pp.

A5. Grigoryev Yu. A., Tsiganov A. V. Symbolic software for separation of variables in the Hamilton-Jacobi equation for the L-systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2005. Vol. 10, no. 4. Pp. 413–422.

A6. Grigoryev Yu. A., Tsiganov A. V. On the Darboux-Nijenhuis variables for the open Toda lattice // Symmetry, Integrability and Geometry - Methods and Applications. 2006. Vol. 2, 097. 15 pp.

A7. Grigoryev Yu. A., Tsiganov A. V. Separation of variables for the generalized Henon-Heiles system and system with quartic potential // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. Vol. 44, no. 25, 255202. 9 pp.

Подписано к печати 20.06.12. Формат 60 × 84 1/8 .
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 1,00.
Тираж 100 экз. Заказ 5480.

Отпечатано в Отделе оперативной полиграфии химического факультета СПбГУ
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26
Тел.: (812) 428-4043, 428-6919