

## ОТЗЫВ

**официального оппонента на диссертацию Григорьева Юрия Александровича «Геометрические методы исследования интегрируемых и суперинтегрируемых систем в классической механике», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.**

Тема представленной к защите диссертационной работы на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Ю. А. Григорьева относится к важной области теоретической физики – теории интегрируемых по Лиувиллю систем классической механики. Одним из наиболее мощных методов исследования таких систем является метод разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. Поиск переменных разделения для гамильтоновых систем, а также задача поиска общего метода нахождения таких переменных с момента создания этого метода в XIX веке были и остаются предметом серьёзных научных исследований.

Интерес к разделению переменных особенно возрос в последнее время в связи с развитием теории квантовых интегрируемых систем. Перенос некоторых положений с классического на квантовый случай позволил говорить о том, что метод разделения переменных остаётся одним из универсальных методов исследования классических и квантовых интегрируемых систем. Кроме того, в последнее время были достигнуты успехи в построении новых методов разделения переменных, основанных на геометрических и топологических характеристиках исследуемых систем и фазовых пространств, на которых они определены. Такие методы используют различные взаимосвязи гамильтоновых систем с геометрическими, симплектическими и топологическими инвариантами, что позволяет построить строгие формализованные алгоритмы нахождения переменных разделения для достаточно широких классов интегрируемых систем. Более того, информация о связанных с гамильтоновыми системами геометрических

структурах позволяют получать новые интегрируемые системы с интересующими исследователя свойствами и осуществлять классификацию таких систем.

Таким образом, поставленная в диссертации цель – развитие геометрических методов исследования интегрируемых по Лиувиллю систем классической механики – является актуальной для современной теоретической физики.

Прежде, чем перейти к оценке обоснованности сформулированных в диссертации научных положений и выводов, а также их достоверности и новизны, остановимся вкратце на структуре диссертационной работы. Диссертация, изложенная на 92 страницах, состоит из введения, обзора литературы, четырёх глав и списка литературы из 103 наименований.

Во введении излагается цель работы и решаемые задачи, формулируются выносимые на защиту основные результаты и положения, приводится информация об апробации и публикациях, обосновывается научная значимость исследования и новизна результатов.

В обзоре литературы приведёно краткое изложение основных результатов и истории развития основных направлений в теории интегрируемых систем, от первых шагов в развитии этой области теоретической физики и до наших дней.

В первой главе формулируется задача и вводятся основные определения теории классических интегрируемых систем, общие для последующих глав. Вводится понятие интегрируемости по Лиувиллю и суперинтегрируемости, определение гамильтониана натурального вида – системы с таким гамильтонианом, в основном, будут рассматриваться в следующих главах.

Во второй главе обсуждается разделение переменных для  $L$ -систем, или систем Бененти – систем с дополнительным квадратичным по импульсам интегралом движения, возможность разделения переменных в которых можно связать с существованием специфического  $L$ -тензора, способ нахождения которого был предложен Бененти. Автор осуществил

реализацию метода, основанного на этом свойстве системы, в пакете компьютерной алгебры Maple, адаптировав уравнения на L-тензор, предложенные Бененти, к возможностям пакетов компьютерной алгебры. Полученное программное обеспечение было применено к различным интегрируемым системам (в качестве примера приводятся более сложные для применения случаи систем Неймана и Холта) и использовалось в качестве инструмента исследования некоторых систем в следующих главах.

Третья глава посвящена методам построения и классификации суперинтегрируемых систем, основанным на использовании теорем сложения. Метод основан на результатах Ришело, касающихся алгебраических интегралов для дифференциальных уравнений на гиперэллиптических кривых, которые развивали более ранние результаты Эйлера, но которым в настоящее время уделяется мало внимания в исследованиях. Задавая параметры гиперэллиптической кривой, после точечной замены переменных можно добиться того, что дифференциальные уравнения сведутся к уравнениям для определённых систем Штеккеля, построив таким образом классификацию таких суперинтегрируемых систем. Новым результатом в данной главе является классификация систем типа Эйлера с потенциалами, полученными ранее разными исследователями, которые в рамках описанного в данной главе метода можно построить, меняя параметры одной гиперэллиптической кривой и замен переменных. Обобщение результатов Эйлера на уравнения Абеля, предложенное Ришело, позволяет схожим способом получать суперинтегрируемые системы с дополнительными интегралами движения Ришело для заданных базовых ортогональных систем координат, что также является новым результатом и сопровождается большим количеством примеров для конкретных систем координат.

В четвёртой главе обсуждается метод разделения переменных, основанный на нахождении би-гамильтоновой структуры интегрируемой системы. Используя канонический первый бивектор Пуассона, для заданной

гамильтонианом и дополнительным интегралом движения интегрируемой системы можно записать условие нахождения интегралов в инволюции относительно скобок Пуассона и условия совместности скобок Пуассона, которые для некоторых систем оказываются разрешимыми относительно компонент второго бивектора Пуассона. Найденный второй бивектор Пуассона позволяет вычислить оператор рекурсии, а по нему – переменные разделения. Обладая этой информацией о системе, оказывается несложно получить сопряжённые переменным разделения импульсы и построить разделённые уравнения. Этот подход был применён к обобщённой систем Энона–Эйлеса и обобщённой системе с гамильтонианом четвёртого порядка. Используемая каноническая замена переменных, осуществляющая сдвиг бивектора Пуассона, позволила найти переменные разделения и разделённые уравнения для наиболее общего случая, этот результат является новым.

Список литературы включает источники, которые использовались автором для описания текущего положения дел в предметной области исследования и из которых заимствовались отдельные результаты и материалы, использованные в диссертации.

В целом можно сделать заключение, что представленные в работе основные положения являются новыми и хорошо обоснованными, их достоверность обеспечивается корректным использованием активно используемых в данной области математических методов и систем компьютерной алгебры, а также большим количеством примеров применения описываемых результатов не только к новым, но и к уже исследованным другими методами системам, что даёт возможность проверить корректность работы на модельных примерах. Достоверность также подтверждается апробацией основных результатов на конференциях и семинарах и отражением их в ведущих рецензируемых научных журналах по профилю исследования.

К числу недостатков работы можно отнести недостаточное освещение таких современных методов изучения интегрируемых систем как

бифуркационный анализ, топологический и качественный анализ, теорию Морса–Конли–Флоера и т. д. Нахождение взаимосвязей между различными существующими методами исследования и развиваемой автором бигамильтоновой геометрии несомненно позволит автору продвинуться значительно дальше и получить более весомые результаты.

Однако данные замечания не снижают общего достоинства диссертационной работы и не влияют на положительную оценку диссертации, которую несомненно можно считать выполненной на высоком уровне научно-квалификационной работой, посвящённой актуальной для различных областей теоретической физики теме и содержащей решение задач классификации и построения суперинтегрируемых систем и новые результаты разделения переменных для классических интегрируемых систем. Представленные в работе результаты и положения имеют существенное значение для теоретической физики. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором впервые и своевременно опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Таким образом, диссертация Григорьева Ю. А. полностью удовлетворяет критериям, предъявляемым согласно «Положению о порядке присуждения учёных степеней» к диссертации на соискание степени кандидата физико-математических наук, а её автор несомненно заслуживает присуждения ему искомой степени по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Дата: 1 июля 2012 года

Официальный оппонент

Доктор физико-математических наук,  
Профессор,  
Заведующий лабораторией нелинейного  
и конструирования новых средств передачи  
Удмуртского государственного университета

Подпись А. В. Борисов  
верна: начальник отдела  
делопроизводства



А. В. Борисов

Дворская И.Н.