Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра Высшей геометрии

*В. С. Кальницкий, Ю. Р. Романовский, А. А. Солынин,
М. Ю. Никанорова, И. М. Амрани*

Основы тензорного анализа

Учебное пособие
Дисциплина [051246]
"Дифференциальная геометрия и тензорный анализ"
по специальности 03.05.01 Астрономия
учебный план рег. № 19/5012/1

Санкт-Петербург
2020

УДК 514
В. С. Кальницкий, Ю. Р. Романовский, А. А. Солынин, М. Ю. Никанорова, И. М. Амрани
Основы тензорного анализа. - СПб., 2020. - С. 28.

Рецензент: доцент, к.ф.-м.н. Маслова Юлия Валерьевна

*Печатается по рекомендации УМК по УГСН 03.00.00 Физика и астрономия
от 28 января 2020 года*

Данное методическое пособие является непосредственным продолжением пособия "Основы тензорного исчисления". Оно включает понятие аффинного пространства, понятие тензорного поля на аффинном пространстве, способ задания полей в криволинейных координатах, операции внешнего дифференцирования форм и порожденные ими в евклидовом случае операции векторного анализа (градиент, ротор, диверегенция), а также технику их вычисления в криволинейных координатах. В качестве приложения приводится инвариантная запись уравнений гидромеханики, т.е. такая запись, в которой принимают участие лишь инвариантно определенные действия над тензорными полями. Развитая техника применяется к задаче обтекания сферы идеальной несжимаемой жидкостью. Текст содержит упражнения, полезные для закрепления материала.

Пособие рассчитано на студентов третьего курса, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования специалитета "Астрономия".

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Систематический курс тензорного анализа следовало бы начать с определений гладкого многообразия, касательного расслоения и других основополагающих понятий. Однако не секрет, что эти понятия сами по себе являются тонкими и требуют определенного времени привыкания к ним. При первом знакомстве с предметом такой подход вовсе не обязателен и даже мало желателен. Поэтому стремление к безупречной общности уступает здесь место следующей скромной цели, которую ставили перед собой авторы данного пособия: в кратком курсе объяснить простейшие конструкции в самой простой ситуации, в которой эти конструкции возможны. Придерживаясь этой цели, мы стартуем в первом параграфе со сведений об аффинном пространстве. С одной стороны понятие аффинного пространства легко усваивается, а с другой стороны его можно рассматривать как простейшую модель многообразия, в которой касательный вектор отождествляется с направленным отрезком, соединяющим пару точек. Словом, аффинное пространство представляет собой тот самый простой случай, где имеются и точки и векторы, т.е. имеется все необходимое для задания тензорных полей и определения действий над ними. Во втором параграфе мы вводим понятие гладкого тензорного поля призвольного типа (p, q) на аффинном пространстве и указываем способ задания такого поля в криволинейных координатах. В третьем параграфе мы упоминаем внешний дифференциал гладкой функции как естественный пример ковекторного поля, т.е. тензорного поля типа $(1, 0)$. В четвертом параграфе мы определяем операции внешнего дифференцирования тензорных полей специального типа, называемых дифференциальными p-формами. В пятом параграфе мы показываем, что в евклидовом случае эти внешние дифференциалы порождают операции векторного анализа (градиент, ротор, дивергенция) и обсуждаем технику их вычисления в криволинейных координатах. В двух последних параграфах собраны некоторые приложения. В шестом параграфе мы приводим примеры уравнений гидромеханики, записанных в инвариантном виде. В такой записи вместо частных производных по тем или иным координатам фигурируют лишь инвариантно определенные тензорные операции. В седьмом параграфе мы применяем развитую технику к задаче обтекания сферы идеальной несжимаемой жидкостью.

Данное учебное пособие является непосредственным продолжением пособия "Основы тензорного исчисления", где собраны необходимые для построения анализа алгебраические понятия и конструкции. Опыт показывает, что главная часть материала по тензорному анализу (как и в случае тензорной алгебры) может быть изложена примерно в трех лекциях. Отбор материала был продиктован желанием осветить простейшие операции дифференцирования тензорных полей, с участием которых составлены уравнения гидромеханики.

§1. Аффинное пространство

Для построения теории тензорных полей одних векторов недостаточно. Требуются еще и точки. Простейшей моделью, вмещающей в себе и точки и векторы, служит так называемое аффинное пространство. Это понятие обычно вводится и изучается в курсах алгебры и аналитической геометрии. Напомним кратко ряд связанных с ним определений.

В качестве мотивировки строгих математических определений приведем следующие интуитивные представления. В окружающем нас пространстве $\mathcal{A}$ любые две точки A, B мы можем соединить направленным отрезком с началом в A и концом в B. Все равные по длине и одинаково направленные отрезки мы воспринимаем как один свободный вектор $\mathbf{v}$, которому разрешается параллельно себе перемещаться в пространстве $\mathcal{A}$. Совокупность таких свободных векторов вместе с естественно определенными операциями сложения и умножения на число доставляет нам пример трехмерного векторного пространства V. Прикладывая свободный вектор $\mathbf{v} \in V$ к точке $A \in \mathcal{A}$, можно найти новую точку $B \in \mathcal{A}$, получающуюся из A сдвигом на $\mathbf{v}$. Прикладывая затем к точке $B \in \mathcal{A}$ другой вектор $\mathbf{w} \in V$, можно таким же образом найти третью точку $C \in \mathcal{A}$. Но эта точка получается из исходной точки A сдвигом на суммарный вектор $\mathbf{v}+\mathbf{w}$. Таким образом, окружающее нас пространство есть множество точек $\mathcal{A}$ и совокупность всевозможных его сдвигов V. Композиция сдвигов не зависит от порядка, в котором они выполняются. Формализация этих представлений приводит к следующему определению.

Определение. *Аффинное пространство* — это множество $\mathcal{A}$ элементов произвольной природы, называемых *точками*, для которого задано векторное пространство V и правило

$$A, B \ \mapsto \ \mathbf{v} = \overrightarrow{AB},$$

сопоставляющее произвольной упорядоченной паре точек $A, B \in \mathcal{A}$ вектор $\mathbf{v} \in V$. Это правило должно подчиняться двум условиям:

1^o. Всякие точка $A \in \mathcal{A}$ и вектор $\mathbf{v} \in V$ задают ровно одну точку $B \in \mathcal{A}$ такую, что

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{v};$$

2^o. Для любых трех точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ справедливо равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\ .$$

Векторное пространство V называется *ассоциированным* с аффинным пространством $\mathcal{A}$.

Примером аффинного пространства, отличным от окружающего нас пространства материальных точек, является множество $\mathcal{A}$ решений линейного неоднородного уравнения. При этом в роли ассоциированного векторного пространства V выступает множество решений соответствующего однородного уравнения. А правило, сопоставляющее паре точек вектор, скрывается за следующим очевидным утверждением: разность любых двух решений неоднородного уравнения есть решение соответствующего однородного уравнения.

Размерностью аффинного пространства $\mathcal{A}$ называется размерность ассоциированного с ним векторного пространства V. Далее мы всюду предполагаем, что размерность равна трем. И предлагаем самостоятельно следить за тем, где это предположение существенно.

Аффинной координатной системой в $\mathcal{A}$ называется совокупность $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, состоящая из точки $O \in \mathcal{A}$ и базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ассоциированного векторного пространства V. Точка O называется *началом кооординат.* Выбрав начало и базис, мы можем связать с каждой точкой $A \in \mathcal{A}$ ее *радиус-вектор*, т.е. вектор, соединяющего начало O с точкой A. Координаты этого вектора называются *аффинными координатами точки* A. Иными словами, аффинными координатами точки A являются числа x^1, x^2, x^3 такие, что

$$\overrightarrow{OA} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3.$$

Ориентацией на аффинном пространстве $\mathcal{A}$ называется класс одинаково ориентированных аффинных координатных систем. Две аффинных координатных системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ считаются одинаково ориентированными, если одинаково ориентированы их базисы. *Ориентированным аффинным пространством* называется такое аффинное пространство, на котором фиксирована одна из двух возможных ориентаций. По определению эта ориентация называется *положительной*.

Евклидовым точечным пространством называется аффинное пространство $\mathcal{A}$, в ассоциированном векторном пространстве V которого задана операция скалярного умножения. Эту операцию называют *евклидовой структурой* на $\mathcal{A}$. В присутствии евклидовой структуры определено понятие длины вектора $|\mathbf{v}|$. Следовательно в этом случае можно определить также *расстояние между двумя точками* $A, B \in \mathcal{A}$:

$$|AB| = |\mathbf{v}|, \qquad \mathbf{v} = \overrightarrow{AB}.$$

§2. Тензорные поля и их координатные представления

На аффинном пространстве могут быть заданы гладкие тензорные поля произвольного типа (p, q).

Определение 1. *Тензорным полем типа* (p, q) называется отображение

$$T : \mathcal{A} \to \mathbf{T}^q_p(V)$$

аффинного пространства $\mathcal{A}$ в множество тензоров типа (p, q) на ассоциированном векторном пространстве V. Иными словами можно сказать, что на $\mathcal{A}$ задано тензорное поле, если каждой точке $A \in \mathcal{A}$ сопоставлен свой, т.е. зависящий от A, тензор T_A одного и того же типа (p,q):

$$A \mapsto T_A \in \mathbf{T}^q_p(V).$$

Тензор T_A называется значением поля T в точке A.

Пример 1. Если T_A есть скаляр, т.е. тензор типа $(0, 0)$, то поле T называется скалярным. Такое поле сопоставляет каждой точке ни от чего более независящее число, а поэтому есть не что иное, как функция на пространстве $\mathcal{A}$. Физическим примером может служить распределение давления по пространству, заполненному жидкостью или газом.

Пример 2. Если T_A есть вектор из V, т.е. тензор типа $(0, 1)$, то поле T называется векторным. Такое поле сопоставляет каждой точке вектор, который при переходе к соседней точке может менять свою величину и направление. Физическим примером может служить распределение скоростей в установившемся потоке жидкости или газа. Другим физическим примером является силовое поле, которое каждой точке пространства сопоставляет вектор силы, действующей на попавшую в эту точку частицу.

Пример 3. Если T_A есть ковектор на V, т.е. тензор типа $(1, 0)$, то поле T называется ковекторным. Здесь каждой точке сопоставляется линейная функция на векторном пространстве V. Поскольку различные векторы $\mathbf{v}$ из V сдвигают фиксированную точку A в различные точки B аффинного пространства $\mathcal{A}$, линейную функцию $T_A : V \to \mathbb{R}$ можно понимать как функцию всевозможных таких сдвигов, т.е.

$$\overrightarrow{AB} \quad \mapsto \; T_A\left(\overrightarrow{AB}\right) \in \mathbb{R}.$$

Простой физический пример возникает на евклидовом пространстве в присутствии силового поля $\mathbf{f} : \mathcal{A} \to V$. В этом случае для каждой точки A определена линейная функция

$$T_A\left(\overrightarrow{AB}\right) = \mathbf{f}_A \cdot \overrightarrow{AB},$$

вычисляющая работу силы $\mathbf{f}_A$ на перемещении $\overrightarrow{AB}$. Естественный пример ковекторного поля, не требующий евклидовой структуры, будет подробно разобран в § 3.

Заметим, что данное выше определение никак не предполагает плавного изменения значения T_A тензорного поля T при плавном изменении точки A. Для того, чтобы придать такому предположению точный смысл, нам потребуется понятие регулярной параметризации аффинного пространства $\mathcal{A}$.

Зафиксируем начало $O \in \mathcal{A}$ и свяжем с каждой точкой $A \in \mathcal{A}$ ее радиус-вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$.

Определение 2. *Параметризацией пространства* $\mathcal{A}$ (или его части) называется дифференцируемая зависимость $\mathbf{r}$ от трех вещественных переменных x^1, x^2, x^3. Параметризация $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$ называется *регулярной*, если в каждой точке A векторы

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3}$$

некомпланарны, т.е. образуют базис векторного прстранства V. Этот базис мы будем называть *сопровождающим базисом* в точке A. Переменные x^1, x^2, x^3 будем называть *криволинейными координатами* точек аффинного пространстве $\mathcal{A}$.

Простейший пример регулярной параметризации происходит из аффинной координатной системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Здесь переменными x^1, x^2, x^3 служат аффинные координаты точек, т.е.

$$\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3.$$

В евклидовом случае в качестве базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ обычно используют ортонормированный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и отвечающие ему декартовы координаты x, y, z, т.е.

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Для всякой аффинной системы координат сопровождающий базис при переходе от точки к точке остается неизменным. В частности, в декартовых координатах имеем

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}.$$

Такие координаты едва ли можно назвать криволинейными. Однако в евклидовом пространстве нередко ипользуют настоящие криволинейные координаты. Напомним два классических примера.

Пример 1. Цилиндрические координаты r, φ, z дают параметризацию
$$\mathbf{r}(r, \varphi, z) = r\cos\varphi\,\mathbf{i} + r\sin\varphi\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
с сопровождающим базисом
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}, & |\mathbf{e}_r| &= 1,\\ \mathbf{e}_\varphi &= -r\sin\varphi\,\mathbf{i} + r\cos\varphi\,\mathbf{j}, & |\mathbf{e}_\varphi| &= r,\\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k}, & |\mathbf{e}_z| &= 1, \end{aligned}$$
который уже заметным образом меняется при переходе от одной точки к другой. Тем не менее векторы $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ остаются попарно ортогональными во всех точках. Вырождение наступает лишь при $r = 0$. Поэтому параметризация является регулярной всюду, кроме точек оси Oz.

Пример 2. Сферические координаты R, φ, θ дают параметризацию
$$\mathbf{r}(R, \varphi, \theta) = R\cos\varphi\cos\theta\,\mathbf{i} + R\sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{j} + R\sin\theta\,\mathbf{k}$$
с сопровождающим базисом
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R &= \cos\varphi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{j} + \sin\theta\,\mathbf{k}, & |\mathbf{e}_R| &= 1,\\ \mathbf{e}_\varphi &= -R\sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{i} + R\cos\varphi\cos\theta\,\mathbf{j}, & |\mathbf{e}_\varphi| &= R\cos\theta,\\ \mathbf{e}_\theta &= -R\cos\varphi\sin\theta\,\mathbf{i} - R\sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{j} + R\cos\theta\,\mathbf{k}, & |\mathbf{e}_\theta| &= R, \end{aligned}$$
который тоже меняется при переходе от точки к точке. Векторы $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta$ попарно ортогональны всюду. Вырождение наступает на оси Oz. В остальных точках параметризация является регулярной.

Определение 3. *Компонентами* тензорного поля $A \mapsto T_A$ типа (p, q) в координатах x^1, x^2, x^3 называются компоненты $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ тензора T_A относительно сопровождающего базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в точке A.

Определение 4. Тензорное поле $A \mapsto T_A$ называется *гладким*, если его компоненты $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ гладко зависят от координат x^1, x^2, x^3 точки A.

Замечание. В этом пособии под гладкой зависимостью мы подразумеваем существование непрерывных частных производных любого порядка.

Утверждение. *Гладкость поля не зависит от выбора регулярной параметризации.*

Доказательство. Сначала проверим, что замена координат

$$x^i = x^i(z^1, z^2, z^3) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

связывающая новую регулярную параметризацию $\mathbf{r}(z^1, z^2, z^3)$ с исходной, является дифференцируемой. В самом деле, новая регулярная параметризация порождает свой сопровождающий базис

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^1}, \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^2}, \quad \mathbf{e}'_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^3},$$

который выражается через исходный по формуле $\mathbf{e}'_i = c_i^k \mathbf{e}_k$ с помощью невырожденной матрицы перехода $\|c_i^j\|$. Сравнивая эту формулу с правилом цепочки

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^i} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k},$$

мы видим, что матрица перехода есть не что иное, как матрица Якоби преобразования координат т.е. $\partial x^k / \partial z^i = c_i^k$. Отсюда и следует гладкость замены. Кроме того отсюда следует, что при этой замене компоненты тензорного поля типа (p, q) преобразуются по правилу [1]:

$$\frac{\partial x^{k_1}}{\partial z^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_q}}{\partial z^{j_q}} T'^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = \frac{\partial x^{l_1}}{\partial z^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_p}}{\partial z^{i_p}} T^{k_1 \ldots k_q}_{l_1 \ldots l_p}.$$

Разрешая эту систему относительно новых (штрихованных) компонент, получаем

$$T'^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = \frac{\partial z^{j_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial z^{j_q}}{\partial x^{k_q}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial z^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_p}}{\partial z^{i_p}} T^{k_1 \ldots k_q}_{l_1 \ldots l_p}.$$

Теперь уже видно, что дифференцируемая зависимость исходных компонент от координат x^1, x^2, x^3 обеспечивает дифференцируемую зависимость новых компонент от координат z^1, z^2, z^3. $\square$

§3. Дифференциал функции

Пусть $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ есть гладкая функция на $\mathcal{A}$. Регулярная параметризация $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$ превращает функцию f в функцию трех переменных $f(x^1, x^2, x^3)$. Сопоставим каждой точке $A \in \mathcal{A}$ набор из трех числовых компонент

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right).$$

Другая регулярная параметризация $\mathbf{r}(z^1, z^2, z^3)$ превращает функцию f в функцию трех других переменных $f(z^1, z^2, z^3)$. Той же точке $A \in \mathcal{A}$ будет соответствовать другой числовой набор

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z^1}, \frac{\partial f}{\partial z^2}, \frac{\partial f}{\partial z^3}\right).$$

Связь между двумя числовыми наборами можно легко обнаружить, если учесть, что новая параметризация получается из исходной после замены координат $x^i = x^i(z^1, z^2, z^3)$. В самом деле, применяя правило цепочки, находим

$$\frac{\partial f}{\partial z^i} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

В традиционных обозначениях

$$T'_i = \frac{\partial f}{\partial z^i}, \qquad T_k = \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

правило цепочки принимает вид когредиентного закона

$$T'_i = \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\, T_k,$$

т.е. закона преобразования компонент тензорного поля типа $(1, 0)$. Следовательно в каждой точке $A \in \mathcal{A}$ числа (T_1, T_2, T_3) служат координатами некоторого ковектора на V относительно базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, сопровождающего параметризацию $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$. Этот ковектор называют *дифференциалом* функции f в точке A и обозначают символом df_A.

Определение 1. Ковекторное поле, значение которого в каждой точке $A \in \mathcal{A}$ совпадает с дифференциалом df_A функции f в этой точке, называют *дифференциалом* функции f на пространстве $\mathcal{A}$ и обозначают символом df.

Заметим, что всякая регулярная параметризация $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$ на пространстве $\mathcal{A}$ задает на этом пространстве три функции

$$x^i : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Функция x^i сопоставляет точке $A \in \mathcal{A}$ значение i-го параметра. Например, если точка A имеет радиус-вектор $\mathbf{r}(9, 5, 7)$, то $x^1(A) = 9$, $x^2(A) = 5$, $x^3(A) = 7$.

Определение 2. Функции $x^i : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называются *координатными*, а их дифференциалы dx^i называтся *координатными ковекторными полями.*

Утверждение. *В присутствии регулярной параметризации*

$$\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$$

ковекторное поле df выражается через координатные ковекторные поля dx^i по формуле:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\, dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}\, dx^3.$$

Доказательство. Рассмотрим сопровождающий базис $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$ и три отвечающие ему координатные формы, т.е. такие 1-формы ε^i, что

$$\varepsilon^j(\mathbf{e}_i) = \delta^j_i.$$

Напомним [1], что всякий ковектор ω выражается через координатные формы по правилу

$$\omega = T_1\, \varepsilon^1 + T_2\, \varepsilon^2 + T_3\, \varepsilon^3,$$

где T_1, T_2, T_3 являются координатами ω в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. А поскольку координаты ковектора $\omega = df$ в сопровождающем базисе совпадают с частными производными функции f, мы имеем

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}\, \varepsilon^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\, \varepsilon^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}\, \varepsilon^3.$$

В частности, при $f(x^1, x^2, x^3) = x^i$ отсюда следует, что

$$dx^i = \varepsilon^i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Смысл этого равенства состоит том, что значение координатного ковекторного поля dx^i в каждой точке $A \in \mathcal{A}$ совпадает с координатной формой ε^i относительно сопровождающего базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ пространства V. Подставляя dx^i вместо ε^i в предыдущую формулу для дифференциала df, мы получаем то, что и требовалось доказать. $\square$

Упражнение. Докажите формулу дифференцирования произведения:

$$d(fg) = g\,df + f\,dg.$$

В заключение параграфа обсудим геометрический (т.е. бескоординатный) смысл дифференциала. Согласно определению 1, задать дифференциал функции $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ на пространстве $\mathcal{A}$ означает задать в каждой точке $A \in \mathcal{A}$ линейную функцию $df_A : V \to \mathbb{R}$. Раскрыть смысл этой линейной функции помогает следующий факт, доказательство которого обычно приводят в курсе анализа. Пусть $B \in \mathcal{A}$ есть произвольная точка, близкая к точке A. Тогда приращение функции f находится по формуле:

$$f(B) - f(A) = df_A\left(\overrightarrow{AB}\right) + o(|AB|) \qquad (B \to A).$$

Здесь первое слагаемое есть значение линейной функции df_A на векторе $\overrightarrow{AB}$. Второе слагаемое, обозначенное символом $o(|AB|)$, есть величина, которая при стремлении точки B к точке A имеет более высокий порядок малости, чем расстояние $|AB|$ между этими точками. Допуская определенную вольность речи, последнюю формулу нередко комментируют так: дифференциал вычисляет главную линейную часть приращения функции при малых приращениях аргумента.

§4. Внешнее дифференцирование форм

Рассмотренная в предыдущем параграфе операция дифференцирования функций, т.е. скалярных полей, имеет полезный аналог в классе тензорных полей, значениями которых являются внешние p-формы.

Определение 1. *Дифференциальной p-формой ω* на $\mathcal{A}$ называется гладкое тензорное поле

$$A \mapsto \omega_A \in \Lambda_p(V),$$

значение которого в каждой точке $A \in \mathcal{A}$ есть внешняя p-форма ω_A на V.

Утверждение 1. *В присутствии регулярной параметризации $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$ дифференциальные p-формы на $\mathcal{A}$ выражаются через координатные ковекторные поля dx^i по формулам:*

$$\begin{array}{rcll} \omega & = & T_1\, dx^1 + T_2\, dx^2 + T_3\, dx^3 & (p = 1), \\ \omega & = & T_{23}\, dx^2 \wedge dx^3 + T_{31}\, dx^3 \wedge dx^1 + T_{12}\, dx^1 \wedge dx^2 & (p = 2), \\ \omega & = & T_{123}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 & (p = 3). \end{array}$$

где компоненты T_i, T_{ij}, T_{ijk} дифференцируемо зависят от x^1, x^2, x^3.

Доказательство. Напомним [1], что внешние p-формы выражаются через координатные 1-формы ε^i по формулам:

$$\begin{array}{rcll} \omega & = & T_1\, \varepsilon^1 + T_2\, \varepsilon^2 + T_3\, \varepsilon^3 & (p = 1), \\ \omega & = & T_{23}\, \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + T_{31}\, \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + T_{12}\, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 & (p = 2), \\ \omega & = & T_{123}\, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 & (p = 3). \end{array}$$

Но в предыдущем параграфе было показано, что координатная 1-форма ε^i относительно сопровождающего базиса $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r}/\partial x^i$ $(i = 1, 2, 3)$ совпадает с дифференциалом координатной функции $x^i : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, т.е. $\varepsilon^i = dx^i$. $\square$

Определение 2. *Внешним дифференциалом* 1-формы ω назовем 2-форму

$$d\omega = dT_1 \wedge dx^1 + dT_2 \wedge dx^2 + dT_3 \wedge dx^3,$$

где dT_i есть дифференциал функции $T_i(x^1, x^2, x^3)$.

Утверждение 2. *Это определение не зависит от выбора регулярной параметризации.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{r}(z^1, z^2, z^3)$ есть другая регулярная параметризация, которая получается из $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$ заменой переменных $x^i(z^1, z^2, z^3)$. В новых координатах та же 1-форма ω

имеет другое представление

$$\omega = T'_1\,dz^1 + T'_2\,dz^2 + T'_3\,dz^3,$$

которое связано с исходным представлением тензорным законом

$$T'_i = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} T_k.$$

Покажем, что дифференциал $d\omega = dT'_i \wedge dz^i$, вычисленный в новых координатах, совпадает с вычисленным в исходных координатах дифференциалом $d\omega = dT_k \wedge dx^k$. Имеем

$$dT'_i \wedge dz^i = d\left(\frac{\partial x^k}{\partial z^i} T_k\right) \wedge dz^i = \left(T_k\, d\frac{\partial x^k}{\partial z^i} + \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\, dT_k\right) \wedge dz^i =$$

$$= \left(T_k\, d\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\right) \wedge dz^i + \left(\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\, dT_k\right) \wedge dz^i =$$

$$= T_k \left(d\frac{\partial x^k}{\partial z^i} \wedge dz^i\right) + dT_k \wedge \left(\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\, dz^i\right) =$$

$$= T_k \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial z^i \partial z^j}\, dz^j \wedge dz^i\right) + dT_k \wedge dx^k = dT_k \wedge dx^k.$$

В этих выкладках мы неоднократно использовали дистрибутивность операции внешнего произведения. Кроме того, в последней строке мы использовали кососкоммутативность этой операции ($dz^i \wedge dz^j = -\,dz^j \wedge dz^i$), а также независимость смешанной частной производной от порядка, в котором она вычисляется. □

Определение 3. *Внешним дифференциалом* 2-формы ω назовем 3-форму

$$d\omega = dT_{23} \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dT_{31} \wedge dx^3 \wedge dx^1 + dT_{12} \wedge dx^1 \wedge dx^2,$$

где dT_{ij} есть дифференциал функции $T_{ij}(x^1, x^2, x^3)$.

Утверждение 3. *Это определение не зависит от выбора регулярной параметризации.*

Доказательство. В новых координатах та же 2-форма ω имеет другое представление

$$\omega = T'_{23}\,dz^2 \wedge dz^3 + T'_{31}\,dz^3 \wedge dz^1 + T'_{12}\,dz^1 \wedge dz^2,$$

которое связано с исходным представлением тензорным законом

$$T'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} T_{kl}.$$

Требуется доказать, что дифференциал, вычисленный в новых координатах, совпадает с дифференциалом, вычисленным в исходных координатах, т.е.

$$dT'_{ij} \wedge dz^i \wedge dz^j = dT_{kl} \wedge dx^k \wedge dx^l.$$

А это равенство проверяется прямым вычислением:

$$dT'_{ij} \wedge dz^i \wedge dz^j = d\left(\frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} T_{kl}\right) \wedge dz^i \wedge dz^j =$$

$$= dT_{kl} \wedge \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\, dz^i \wedge \frac{\partial x^l}{\partial z^j}\, dz^j + T_{kl}\, d\left(\frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}\right) \wedge dz^i \wedge dz^j = dT_{kl} \wedge dx^k \wedge dx^l.$$

Упражнение 1. Восстановите пропущенные выкладки в этом доказательстве.

Упражнение 2. Докажите формулу дифференцирования произведения функции на 1-форму:

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f\, d\omega.$$

Упражнение 3. Докажите формулу дифференцирования произведения двух 1-форм:

$$d(\theta \wedge \omega) = d\theta \wedge \omega - \theta \wedge d\omega.$$

Упражнение 4. Докажите, что дифференциал 1-формы ω совпадает с 2-формой:

$$d\omega = \left(\frac{\partial T_3}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1}\right) dx^3 \wedge dx^1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2.$$

Упражнение 5. Докажите, что дифференциал 2-формы ω совпадает с 3-формой:

$$d\omega = \left(\frac{\partial T_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Множество всех дифференциальных p-форм на $\mathcal{A}$ принято обозначать символом $\Omega^p(\mathcal{A})$. Ради единообразия множество всех гладких функций на $\mathcal{A}$ часто обозначается символом $\Omega^0(\mathcal{A})$. Определенные выше три дифференциала естественным образом выстраиваются в последовательность:

$$\Omega^0(\mathcal{A}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathcal{A}) \xrightarrow{d} \Omega^3(\mathcal{A}).$$

Упражнение 6. Докажите, что дважды взятая операция внешнего дифференцирования дает тождественный нуль: $d \circ d = 0$.

§5. Операции векторного анализа

Напомним [1], что в трехмерном ориентированном евклидовом векторном пространстве V определены три естественных изоморфизма

$$\lambda_1 : V \to \Lambda_1(V), \quad \lambda_2 : V \to \Lambda_2(V), \quad \lambda_3 : \mathbb{R} \to \Lambda_3(V).$$

Отображение λ_1 переводит вектор в ковектор (опускает индекс), отображение λ_2 переводит вектор в 2-форму (вычисляет поток), отображение λ_3 переводит число в 3-форму (умножает число на элемент объема). Как следствие, в трехмерном ориентированном евклидовом точечном пространстве $\mathcal{A}$ возникают естественные соответствия между тензорными полями:

$$\lambda_1 : D(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}), \quad \lambda_2 : D(\mathcal{A}) \to \Omega^2(\mathcal{A}), \quad \lambda_3 : \Omega^0(\mathcal{A}) \to \Omega^3(\mathcal{A}),$$

где $D(\mathcal{A})$ обозначает множество всех гладких векторных полей на $\mathcal{A}$. Применение отображений λ_1, λ_2 к векторному полю $\mathbf{u} \in D(\mathcal{A})$ означает применение этих отображений к значению поля $\mathbf{u}_A \in V$ в каждой точке $A \in \mathcal{A}$. Применение отображения λ_3 к функции $f \in \Omega^0(\mathcal{A})$ сводится к умножению значения функции $f(A) \in \mathbb{R}$ на элемент объема пространства V в каждой точке $A \in \mathcal{A}$. Перечисленные соответствия вместе с тремя дифференциалами, определенными в предыдущем параграфе, порождают три операции векторного анализа: градиент, ротор и дивергенцию. В самом деле, составим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathcal{A}) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathcal{A}) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(\mathcal{A}) \\
\uparrow \mathrm{id} & & \uparrow \lambda_1 & & \uparrow \lambda_2 & & \uparrow \lambda_3 \\
\Omega^0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & D(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & D(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{div}} & \Omega^0(\mathcal{A})
\end{array}$$

и определим операции в нижнем ряду так, чтобы эта диаграмма стала коммутативной.

Определение 1. *Градиентом* гладкой функции $f \in \Omega^0(\mathcal{A})$ называется векторное поле $\mathrm{grad}\, f \in D(\mathcal{A})$ такое, что

$$df = \lambda_1(\mathrm{grad}\, f).$$

Определение 2. *Ротором* векторного поля $\mathbf{u} \in D(\mathcal{A})$ называется другое векторное поле $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \in D(\mathcal{A})$ такое, что

$$d\lambda_1(\mathbf{u}) = \lambda_2(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}).$$

Определение 3. *Дивергенцией* векторного поля $\mathbf{u} \in D(\mathcal{A})$ называется гладкая функция $\mathrm{div}\,\mathbf{u} \in \Omega^0(\mathcal{A})$ такая, что

$$d\lambda_2(\mathbf{u}) = \lambda_3(\mathrm{div}\,\mathbf{u}).$$

Упражнение 1. Докажите тождества $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0$ и $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0$.

Упражнение 2. Докажите соотношения

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(fg) &= f\,\mathrm{grad}\, g + g\,\mathrm{grad}\, f, \\
\mathrm{rot}(f\mathbf{u}) &= f\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + \mathrm{grad}\, f \times \mathbf{u}, \\
\mathrm{div}(f\mathbf{u}) &= f\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathrm{grad}\, f \cdot \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Упражнение 3. Докажите, что $\mathrm{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} - \mathbf{u}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$.

Все три операции определены инвариантно, но в каждой системе координат их запись имеет свой особый вид. Наиболее простую форму они преобретают в так называемых *триортогональных* координатах, т.е. в таких координатах x^1, x^2, x^3, что сопровождающий базис

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

пространства V в каждой точке $A \in \mathcal{A}$ является триортогональным, т.е.

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \qquad (i \neq j).$$

При этом длины базисных векторов, т.е. коэффициенты Ламе

$$H_i = |\mathbf{e}_i| \qquad (i = 1, 2, 3),$$

вообще говоря, могут зависеть от x^1, x^2, x^3. Для таких координат легко указать явные вычислительные формулы.

Градиент. Напомним [1], что изоморфизм λ_1 сопоставляет векторному полю

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3$$

дифференциальную 1-форму

$$\lambda_1(\mathbf{u}) = T_1 dx^1 + T_2 dx^2 + T_3 dx^3$$

с компонентами

$$T_1 = H_1^2 u^1, \quad T_2 = H_2^2 u^2, \quad T_3 = H_3^2 u^3.$$

Обращение этого изоморфизма сводится к делению на квадраты чисел Ламе. Этот факт вместе с выражением для дифференциала функции f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\, dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}\, dx^3$$

приводит к явной формуле

$$\operatorname{grad} f = \lambda_1^{-1}(df) = \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial f}{\partial x^1}\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\,\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial f}{\partial x^3}\,\mathbf{e}_3.$$

Ротор. Изоморфизм λ_2 сопоставляет векторному полю

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3$$

дифференциальную 2-форму

$$\lambda_2(\mathbf{u}) = T_{23} dx^2 \wedge dx^3 + T_{31} dx^3 \wedge dx^1 + T_{12} dx^1 \wedge dx^2$$

с компонентами

$$T_{23} = H_1 H_2 H_3 u^1, \quad T_{31} = H_1 H_2 H_3 u^2, \quad T_{12} = H_1 H_2 H_3 u^3.$$

Обращение этого изоморфизма сводится к делению на произведение чисел Ламе. Этот факт вместе с выражением для дифференциала 1-формы $\lambda_1(\mathbf{u})$

$$d\lambda_1(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial T_3}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1}\right) dx^3 \wedge dx^1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2$$

приводит к явной формуле

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \lambda_2^{-1}(d\lambda_1(\mathbf{u})) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ H_1^2 u^1 & H_2^2 u^2 & H_3^2 u^3 \end{vmatrix}.$$

Дивергенция. Изоморфизм λ_3 сопоставляет функции $f(x^1, x^2, x^3)$ дифференциальную 3-форму

$$\lambda_3(f) = H_1 H_2 H_3 f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Обращение этого изоморфизма сводится к делению на произведение чисел Ламе. Этот факт вместе с выражением для дифференциала 2-формы $\lambda_2(\mathbf{u})$

$$d\lambda_2(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial T_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

приводит к явной формуле

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \lambda_3^{-1}(d\lambda_2(\mathbf{u})) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(H_1 H_2 H_3 \, u^i\right).$$

Замечание 1. Декартовы, цилиндрические и сферические координаты являются триортогональными. Коэффициенты Ламе даются формулами:

$H_x = H_y = H_z = 1$ в декартовом случае,
$H_r = 1$, $H_\varphi = r$, $H_z = 1$ в цилиндрическом случае,
$H_R = 1$, $H_\varphi = R\cos\theta$, $H_\theta = R$ в сферическом случае.

Замечание 2. На практике вместо самого триортогонального сопровождающего базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ обычно используют нормированный базис

$$\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{H_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Это значит, что компоненты всякого векторного поля измеряют именно в этом ортонормированном базисе, т.е.

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{n}_1 + u^2\mathbf{n}_2 + u^3\mathbf{n}_3.$$

При этом новая компонента u^i получается из прежней компоненты u^i домножением на коэффициент Ламе H_i.

Упражнение 4. Найдите вычислительные формулы для градиента, ротора и дивергенции в триортогональных координатах при условии, что компоненты всех векторных полей измеряются в нормированном сопровождающем базисе $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$.

§6. Инвариантный вид уравнений гидромеханики

Тензоры и операции векторного анализа используются для математического описания физических процессов. В качестве примеров мы приводим два простейших уравнения гидромеханики: уравнение несжимаемости и уравнение Эйлера для установившихся течений идеальной жидкости. Пусть жидкость заполняет некоторую область евклидова пространства $\mathcal{A}$. В каждой точке A этой области можно измерить следующие гидродинамические характеристики.

- Вектор $\mathbf{f}_A$ внешней силы (например, силы тяжести), действующей на жидкую частицу единичной массы в точке A.
- Вектор $\mathbf{u}_A$ скорости течения жидкости в точке A.
- Давление p_A жидкости в точке A.
- Плотность ρ_A жидкости в точке A.

Таким образом, в рассматриваемой пространственной области определены векторные поля $\mathbf{f}$ и $\mathbf{u}$, а также скалярные поля p и ρ. Они связаны между собой уравнением несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

и уравнением Эйлера (в форме Громеки–Лэмба)

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) - \mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p.$$

Стоит сразу же обратить внимание на то, что в указанной записи обоих уравнений не принимает участия никакая выделенная координатная система. Уравнения составлены с помощью инвариантно определенных операций векторной алгебры (скалярное и векторное умножение) и векторного анализа (градиент, ротор, дивергенция). Конечно, расчет каждого конкретного течения следует начинать с выбора тех или иных координат. Этот выбор диктуется спецификой задачи. В §7 мы разберем иллюстративный пример, в котором удачный выбор координат позволяет получить явное описание исследуемого течения. Здесь мы наметим вывод приведенных уравнений и опишем конструкцию, позволяющую строить их решения.

Рассмотрим частицу жидкости объема τ вокруг точки A. За малый промежуток времени t она переместится вдоль векторного поля $\mathbf{u}$ в новое положение и будет иметь объем τ'. Можно показать (см. [3]), что дивергенция поля $\mathbf{u}$ в точке A совпадает со скоростью объемного расширения жидкости в этой точке, т.е.

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ t\to 0}}\frac{\tau'-\tau}{t\tau}.$$

По определению несжимаемой жидкости $\tau' = \tau$, а следовательно $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$.

Уравнение Эйлера является записью второго закона Ньютона. Чтобы пояснить это, введем в пространстве декартовы координаты x^1, x^2, x^3 и обозначим через (u_1, u_2, u_3) и (f_1, f_2, f_3) компоненты векторных полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}$ в этих координатах.

Упражнение 1. Проверьте, что уравнение Эйлера равносильно системе из трех уравнений

$$\rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x^i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Пусть $x^1(t), x^2(t), x^3(t)$ — координаты частицы жидкости объема τ в момент времени t. Тогда i-я компононента вектора $\mathbf{a}$ ускорения частицы есть

$$a_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x^k}\, u_k.$$

Из упражнения 1 следует, что уравнение Эйлера равносильно равенству

$$\rho\mathbf{a} = \rho\mathbf{f} - \operatorname{grad} p.$$

Домножая обе его части на τ, получаем уравнение Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

где $m = \tau\rho$ есть масса жидкой частицы, а $\mathbf{F} = m\mathbf{f} - \tau \operatorname{grad} p$ есть равнодействующая внешней силы $m\mathbf{f}$ и силы $-\tau \operatorname{grad} p$ давления на частицу со стороны жидкости. Структура силы $\mathbf{F}$ отражает следующий факт: уравнение Эйлера моделирует динамику идеальной жидкости, т.е. жидкости, лишенной внутреннего трения.

Упражнение 2. Запишите уравнение Эйлера в сферических и цилиндрических координатах.

Рассмотрим жидкость с заданной постоянной плотностью ρ, находящуюся в заданном потенциальном силовом поле $\mathbf{f} = -\operatorname{grad} F$. Для такой жидкости искомыми являются векторное поле $\mathbf{u}$ и скалярное поле p, которые удовлетворяют системе, составленной из уравнения несжимаемости и уравнения Эйлера. Частные решения этой системы могут быть найдены из формул:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} U, \quad p + \frac{\rho\mathbf{u}^2}{2} + \rho F = \mathrm{const}\,.$$

Первая формула выражает векторное поле $\mathbf{u}$ через скалярное поле U, называемое потенциалом скоростей. Вторая формула, называемая интегралом Эйлера-Бернулли, позволяет выразить давление p через плотность ρ, потенциал F силы $\mathbf{f}$ и скалярный квадрат скорости $\mathbf{u}$.

Упражнение 3. Лапласианом называется оператор $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$. Проверьте, что указанные формулы определяют решение системы из уравнения несжимаемости и уравнения Эйлера, тогда и только тогда, когда потенциал U является гармонической функцией, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U = 0$.

Таким образом, гармонические функции порождают решения системы уравнений гидромеханики с помощью простой явной конструкции. В §7 мы применим эту конструкцию к задаче обтекания сферы.

Упражнение 4. Проверьте, что в любых триортогональных координатах x^1, x^2, x^3, лапласиан вычисляется по формуле

$$\Delta U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i^2} \frac{\partial U}{\partial x^i} \right).$$

§7. Обтекание сферы идеальной несжимаемой жидкостью

Здесь решается задача обтекания неподвижной сферы радиуса R_0 потоком жидкости с заданной постоянной плотностью ρ в отсутствие внешнего силового поля, т.е. $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. В этой задаче требуется найти векторное поле $\mathbf{u}$ и скалярное поле p, которые удовлетворяют системе, составленной из уравнения несжимаемости и уравнения Эйлера. При этом на бесконечности значение поля $\mathbf{u}$ должно равняться заданному вектору скорости набегающего потока $\mathbf{u}_\infty$, а на поверхности сферы нормальная составляющая поля $\mathbf{u}$ должна быть нулевой (условие непротекания сферы). Кроме того на бесконечности давление p должно совпадать с заданной величиной p_∞. Решение поставленной задачи найдем с помощью описанной в §6 конструкции, приводящей к уравнению Лапласа, и вычислительной формулы для лапласиана в сферических координатах R, φ, θ (см. §6, упражнение 4):

$$\Delta U = \frac{1}{R^2 \cos\theta} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \cos\theta \, \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\cos\theta} \, \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos\theta \, \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right].$$

Расположим начало сферической координатной системы в центре обтекаемой сферы, плоскость экватора $\theta = 0$ проведем перпендикулярно вектору $\mathbf{u}_\infty$. Соображения симметрии подсказывают, что при таком выборе координат потенциал U не должен зависеть от φ, т.е. $U = U(R, \theta)$. На самом деле потенциал найдется в еще более узком классе функций, которые имеют вид

$$U = Q(R) \sin\theta.$$

Подставляя это выражение в уравнение Лапласа $\Delta U = 0$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$R^2 Q'' + 2RQ' - 2Q = 0.$$

Его частными решениями являются степенные функции R^k при $k = 1, -2$. Поэтому его общее решение есть $Q(R) = c_1 R + c_2 R^{-2}$. А следовательно

$$U = \left(c_1 R + \frac{c_2}{R^2}\right) \sin\theta.$$

Постоянные c_1 и c_2 определяем из граничных условий. Для этого запишем поле скоростей $\mathbf{u} = \operatorname{grad} U$ в нормированном сопровождающем базисе (см. упражнение 4 параграфа 5):

$$\mathbf{u} = \frac{\partial U}{\partial R}\,\mathbf{n}_R + \frac{1}{R\cos\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\,\mathbf{n}_\varphi + \frac{1}{R}\;\frac{\partial U}{\partial\theta}\,\mathbf{n}_\theta =$$

$$= \left(c_1 - 2\frac{c_2}{R^3}\right)\sin\theta\,\mathbf{n}_R + \left(c_1 + \frac{c_2}{R^3}\right)\cos\theta\,\mathbf{n}_\theta.$$

Устремляя в этом равенстве R к бесконечности, находим

$$\lim_{R\to\infty} \mathbf{u} = c_1\left(\sin\theta\,\mathbf{n}_R + \cos\theta\,\mathbf{n}_\theta\right).$$

Замечая, что единичный вектор $\sin\theta\,\mathbf{n}_R + \cos\theta\,\mathbf{n}_\theta$ коллинеарен вектору $\mathbf{u}_\infty$, и учитывая граничное условие на бесконечности

$$\lim_{R\to\infty} \mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty,$$

получаем значение первой постоянной

$$c_1 = u_\infty,$$

где u_∞ есть длина вектора $\mathbf{u}_\infty$. Значение второй постоянной определяется из условия непротекания сферы. Действительно, радиальная компонента

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \left(c_1 - 2\frac{c_2}{R^3}\right)\sin\theta$$

поля $\mathbf{u}$ на поверхности сферы совпадает с нормальной составляющей, которая по условию непротекания равна нулю. Отсюда находим

$$c_2 = \frac{1}{2}\,c_1 R_0^3 = \frac{1}{2}\,u_\infty R_0^3.$$

Таким образом, обтекающий сферу поток имеет потенциал скоростей

$$U = u_\infty \left(R + \frac{R_0^3}{2R^2} \right) \sin\theta.$$

Давление p выражается через скорость $\mathbf{u} = \operatorname{grad} U$ с помощью интеграла Бернулли

$$p + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} = \mathrm{const}\,.$$

Значение постоянной const определяется из условий на бесконечности.

Упражнение 1. Проверьте, что на сфере скорость течения дается формулой

$$\mathbf{u} = \frac{3}{2}\, u_\infty \cos\theta\ \mathbf{n}_\theta.$$

В частности, векторное поле $\mathbf{u}$ касается меридианов сферы, на полюсах сферы скорость течения равна нулю, а на экваторе она в полтора раза больше скорости набегающего потока.

Упражнение 2. Проверьте, что на сфере давление дается формулой

$$p = p_\infty + \left(1 - \frac{9}{4}\cos^2\theta\right) \frac{\rho u_\infty^2}{2}.$$

В частности, в диаметрально противоположных точках давление одинаково.

Отсюда непосредственно видно, что равнодействующая сил давления потока на сферу равна нулю. Иными словами, сфера не сопротивляется набегающему на нее однородному на бесконечности потоку идеальной несжимаемой жидкости. В этом заключается частный случай известного в гидромеханике парадокса Даламбера (см. [3]).

Список литературы

[1] Кальницкий В.С., Романовский Ю.Р., Солынин А.А., Никанорова М.Ю., Волков Д.Ю. Основы тензорного исчисления. - СПб, 2020. - 31 с.

[2] Кальницкий В.С., Никанорова М.Ю., Романовский Ю.Р. *Дополнительные главы дифференциальной геометрии, Часть 1*, Учебно-методическое пособие, СПб.: СОЛО, 2016. - 30 с.

[3] Валландер С. В., *Лекции по гидроаэромеханике*, Л.: Издательство Ленинградского университета, 1978, 296 с.