Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра Высшей геометрии

*В. С. Кальницкий, Ю. Р. Романовский, А. А. Солынин,
М. Ю. Никанорова, Д. Ю. Волков*

Основы тензорного исчисления

Учебное пособие
Дисциплина [051246]
"Дифференциальная геометрия и тензорный анализ"
по специальности 03.05.01 Астрономия
учебный план рег. № 19/5012/1

Санкт-Петербург
2020

УДК 514
В. С. Кальницкий, Ю. Р. Романовский, А. А. Солынин, М. Ю. Никанорова, Д. Ю. Волков
Основы тензорного исчисления. - СПб., 2020. - С. 31.

Рецензент: доцент, к.ф.-м.н. Маслова Юлия Валерьевна

Печатается по рекомендации УМК по УГСН 03.00.00 Физика и астрономия
от 28 января 2020 года

Данное методическое пособие является элементарным введением в алгебраическую теорию тензоров. Оно включает векторную алгебру, понятие тензора и ряд содержательных примеров, основные алгебраические операции над тензорами, внешнюю алгебру кососимметрических тензоров, отождествления тензоров разного типа в евклидовом пространстве. К каждому разделу приводятся упражнения для закрепления материала.

Пособие рассчитано на студентов третьего курса, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования специалитета "Астрономия".

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Физические и геометрические величины представляются нам в виде некоторого набора числовых компонент. Эти компоненты зависят от той системы координат, которую выбрал исследователь. Однако сами физические и геометрические величины имеют бескоординатный смысл и никак не зависят от этого выбора. Описать математическую связь между различными представлениями одной и той же величины в различных системах координат и означает описать саму величину. Математическая теория, изучающая такого рода величины и связи, называется тензорным исчислением. А величины, возникающие в этой теории, называются тензорами. Самым простым и наглядным примером тензора является вектор, бескоординатным образом которого служит направленный отрезок или стрелка. Выбор системы координат дает возможность представить вектор числовым столбцом. Выбор же иной системы координат приведет к столбцу с иными компонентами, хотя сам вектор никак не изменился. Таким образом, вектор — это не столбец чисел, а бесконечная совокупность столбцов, отвечающих разным системам координат. Все эти представления связаны между собой специальным правилом, которое и отражает сущность величины, называемой вектором.

Исторически возникновение тензорного исчисления было подготовлено в XIX веке развитием теории дифференциальных квадратичных форм поверхностей (К. Гаусс) и геометрии многомерных метрических пространств (Б. Риман). В современной форме тензорное исчисление появляется в работах итальянского математика Г. Риччи-Курбастро, однако широкое распространение его идеи получили лишь после появления общей теории относительности А. Эйнштейна (1915-16 гг.), математическая часть которой целиком основана на тензорном исчислении.

Существует немало книг с развернутым изложением теории тензоров. Авторы этого краткого пособия ставили перед собой более чем скромную цель: напомнить основные конструкции векторной алгебры, ввести понятие тензора, снабдить его содержательными примерами, определить основные алгебраические операции над тензорами, задать структуру внешней алгебры на множестве кососимметрических тензоров, описать естественные отождествления тензоров разного типа в евклидовом пространстве. Знакомство с этим материалом дает лишь самое первое представление о предмете и может служить основой для работы с углубленной литературой.

Пособие возникло в процессе подготовки лекций и семинарских занятий для студентов астрономов 3-го года обучения СПбГУ. Материал пособия вошел в состав обязательного курса дифференциальной геометрии и тензорного анализа, читавшегося в осеннем семестре с 2018 года. Опыт показывает, что главная часть этого материала может быть изложена примерно в трех лекциях. Отбор материала был продиктован желанием, не погружаясь в массу подробностей, осветить алгебраические тензорные конструкции. Освоение этих конструкций способствует развитию бескоординатного взгляда на уравнения, облегчает запись уравнений в криволинейных координатах, а вместе с дифференциальным исчислением тензоров позволяет составлять подобные уравнения в искривленном пространстве.

§1. Элементы векторной алгебры

Изложение курса тензорной алгебры основано на таких понятиях как вектор, векторное пространство и евклидово векторное пространство. Хотя эти понятия и являются предметом детального изучения в курсах алгебры и аналитической геометрии, мы позволили себе коротко напомнить их здесь. С одной стороны, это делает изложение более замкнутым. А с другой стороны, это позволяет начать с обсуждения простейших примеров, мотивирующих общее понятие тензора. Такие мотивировки особенно важны для начинающих, на которых и рассчитано данное пособие.

Вектором называется элемент *векторного пространства*, т.е. множества V, на котором заданы операции *сложения* и *умножения на вещественное число*, удовлетворяющие следующим естественным свойствам:

1^o $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \quad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$;

2^o $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \quad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$;

3^o существует вектор $\mathbf{0} \in V$ такой, что $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in V$;

4^o $\forall\, \mathbf{v} \in V$ существует вектор $-\mathbf{v} \in V$ такой, что $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$;

5^o $c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = c\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$ и $\forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$;

6^o $c_1(c_2\mathbf{v}) = (c_1c_2)\mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in V$ и $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

7^o $(c_1 + c_2)\mathbf{v} = c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in V$ и $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

8^o $1\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in V$.

В математике и ее применениях имеется много содержательных примеров этого общего понятия. Часто они возникают как пространства вещественнозначных функций, определенных на точках того или иного множества. На таких пространствах существуют естественные операции (поточечного) сложения и умножения на число, которые, конечно же, обладают всеми перечисленными свойствами. Важной характеристикой этих и других векторных пространств является число измерений или размерность. Точное определение этой характеристики опирается на следующее понятие.

Базисом векторного пространства называется упорядоченный набор его элементов таких, что любой вектор можно однозначно представить в виде конечной суммы данных элементов, домноженных на некоторые вещественные числа. Эти числа называются *координатами вектора* в данном базисе.

Не во всяком векторном пространстве существует базис, состоящий из конечного числа элементов. Такая ситуация возникает, например, в пространстве всех многочленов от одной переменной (степень многочлена может быть произвольной). Если же базис конечной длины $n \in \mathbb{N}$ существует, то любой другой базис тоже конечен и имеет ту же длину n, которая называется *размерностью* пространства. В этом случае говорят, что пространство *конечномерно*, и пишут $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Мы будем рассматривать только конечномерные пространства. Более того, мы всюду предполагаем, что $\dim V = 3$. При этом векторы можно представлять себе как направленные отрезки или стрелки, исходящие из одной точки. Эта точка играет роль векторного нуля $\mathbf{0}$. Умножение стрелки на число сводится к ее растяжению, а сложение стрелок производится по хорошо известному со школы правилу параллелограмма. Что касается свойств 1^o – 8^o, то их изначально наблюдали в этом примере и затем уже превратили в список аксиом. Базис можно представлять себе как упорядоченную тройку стрелок, не лежащих в одной плоскости. Предположение о трехмерности пространства сделано не только для того, чтобы привлечь интуицию вместе с наглядными геометрическими образами. Часть конструкций, о которых пойдет речь, возможна только в случае трех измерений. С другой стороны, немало понятий и методов легко обобщаются на случай произвольной размерности. Поэтому мы советуем самостоятельно отмечать те места, где размерность пространства можно превратить в параметр, принимающий любые натуральные значения.

Выбор базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в пространстве V позволяет отождествить любой вектор $\mathbf{v} \in V$ с набором его координат, т.е. чисел v^1, v^2, v^3 таких, что

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v^i\mathbf{e}_i = v^i\mathbf{e}_i.$$

Здесь использовано обозначение Эйнштейна, которое предполагает суммирование по повторяющемуся индексу. Мы будем систематически использовать это удобное обозначение на протяжении всего пособия. Во всех случаях каждый из индексов суммирования будет возникать один раз вверху и один раз внизу.

Скалярным произведением на векторном пространстве называется операция, сопоставляющая любой паре векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ вещественное число $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ и удовлетворяющая условиям
симметричности

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V,$$

линейности
$(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{v} = c_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}) + c_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}) \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$,
положительной определенности

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in V,$$

где равенство достигается только в случае $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Евклидовым векторным пространством называется такое векторное пространство, на котором задана операция скалярного умножения. Эту операцию принято называть также *евклидовой структурой* на V. Следует сразу же подчеркнуть, что далеко не всегда векторные пространства возникают вместе с (Богом данной) евклидовой структурой. В качестве примеров можно привести пространства решений линейных уравнений или систем. А искусственное (т.е. не продиктованное разумными соображениями) введение скалярного умножения в ряде случаев может только затемнить суть дела. Поэтому мы рекомендуем с самого начала стараться отделять понятия и факты, требующие евклидовой структуры, от тех, которые в ней не нуждаются.

В присутствии евклидовой структуры на V можно говорить о длинах векторов
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$
и об углах между ними
$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1|\,|\mathbf{v}_2|}.$$

Упражнение 1. Докажите, что определение угла корректно: $|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2| \leq |\mathbf{v}_1|\,|\mathbf{v}_2| \ \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.

Выбор базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в пространстве V позволяет вычислять скалярное произведение в координатах. Для этого нужно составить таблицу скалярного умножения базисных векторов, т.е. таблицу чисел
$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j.$$
Умножение произвольных векторов
$$\mathbf{v}_1 = v_1^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v}_2 = v_2^j \mathbf{e}_j$$
сводится к табличному с помощью условия линейности
$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (v_1^i \mathbf{e}_i) \cdot (v_2^j \mathbf{e}_j) = v_1^i v_2^j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = g_{ij} v_1^i v_2^j.$$
Это вычислительное правило принимает наиболее простой вид, когда базис является *ортонормированным*, т.е. таким, что таблица чисел g_{ij} состоит из единиц на главной диагонали и нулей вне

этой диагонали. Геометрически это значит, что векторы базиса имеют единичную длину и попарно ортогональны. В этом случае скалярное произведение векторов совпадает с суммой произведений одноименных координат.

Упражнение 2. Найдите правило вычисления скалярного произведения в случае, когда базисные векторы по-прежнему имеют единичную длину, а углы между ними равны 60°.

Ориентацией на пространстве V называется класс одинаково ориентированных базисов. Напомним, что базисы являются одинаково ориентированными, если векторы одного из них можно непрерывно продеформировать в одноименные векторы другого так, чтобы все промежуточные тройки оставались некомпланарными. Легко видеть, что на любом пространстве существуют ровно две ориентации. В самом деле, базис

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3$$

нельзя продеформировать в базис

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3,$$

т.к. третьему вектору по дороге пришлось бы лечь в плоскость $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Не менее очевидно, что любой другой базис

$$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$$

можно продеформировать в один из двух указанных, совмещая векторы

$$\mathbf{e}'_1 \mapsto \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}'_2 \mapsto \mathbf{e}_2$$

и определяя полупространство, в которое при этом попадает $\mathbf{e}'_3$.

Упражнение 3. Докажите, что два базиса, связанные заменой

$$\begin{array}{rcccl}
\mathbf{e}'_1 & = & c_1^1\mathbf{e}_1 + c_1^2\mathbf{e}_2 + c_1^3\mathbf{e}_3 & = & c_1^k\mathbf{e}_k, \\
\mathbf{e}'_2 & = & c_2^1\mathbf{e}_1 + c_2^2\mathbf{e}_2 + c_2^3\mathbf{e}_3 & = & c_2^k\mathbf{e}_k, \\
\mathbf{e}'_3 & = & c_3^1\mathbf{e}_1 + c_3^2\mathbf{e}_2 + c_3^3\mathbf{e}_3 & = & c_3^k\mathbf{e}_k,
\end{array}$$

одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда определитель матрицы перехода положителен, т.е.

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{vmatrix} > 0.$$

Ориентированным векторным пространством называется такое векторное пространство, на котором фиксирована одна из двух возможных ориентаций. По определению эта ориентация называется *положительной.*

На трехмерном ориентированном евклидовом пространстве можно определить операции векторного и смешанного умножения.

Векторным произведением двух векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ называется третий вектор $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ такой, что

(1) его направление ортогонально сомножителям, т.е.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2 = 0,$$

(2) длина совпадает с площадью параллелограмма, построенного на сомножителях, т.е.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{vmatrix},$$

(3) упорядоченная тройка $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}$ положительно ориентирована.

Смешанным произведением трех векторов называется число

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3.$$

Нетрудно понять, что это число совпадает с объемом параллелепипеда, построенного на тройке сомножителей, если тройка ориентирована положительно. В противном случае это число отличается от объема знаком.

Упражнение 4. Докажите, что в координатах смешанное произведение находится по правилу

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 = T_{123} \begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{vmatrix},$$

где $T_{123} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ есть смешанное произведение базисных векторов, $\mathbf{v}_j = v_j^i \mathbf{e}_i$ $(j = 1, 2, 3)$.

§2. Векторы и ковекторы. Законы преобразования координат

Вектор доставляет нам пример величины, которая может быть описана набором чисел только после того, как в пространстве уже выбран какой-то базис. Другой простейший пример величины такого рода связан с понятием ковектора. В присутствии базиса как векторы так и ковекторы задаются наборами своих координат. Однако качественное различие между этими двумя типами величин проявляется в том, что их координаты при замене базиса преобразуются по разным законам. В терминологии параграфа 3 этот факт будет означать, что вектор и ковектор являются тензорами разных типов.

Определение 1. *Ковектором* на векторном пространстве V называется функция

$$\omega : V \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющая условию линейности

$$\omega(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1\omega(\mathbf{v}_1) + c_2\omega(\mathbf{v}_2)$$

для всех $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.

Определение 2. *Координатами* ковектора ω в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ называются числа

$$\omega_1 = \omega(\mathbf{e}_1), \quad \omega_2 = \omega(\mathbf{e}_2), \quad \omega_3 = \omega(\mathbf{e}_3).$$

Утверждение 1. *Соответствие $\omega \mapsto (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ является взаимно-однозначным.*

Доказательство. Используя свойство линейности, для любого вектора $\mathbf{v}$ находим

$$\omega(\mathbf{v}) = \omega(v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3) = v^1\omega(\mathbf{e}_1) + v^2\omega(\mathbf{e}_2) + v^3\omega(\mathbf{e}_3) =$$

$$= \omega_1 v^1 + \omega_2 v^2 + \omega_3 v^3 = \omega_i v^i.$$

Отсюда видно, что разным ковекторам отвечают разные наборы координат. Кроме того ясно, что любые три числа $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в присутствии все того же базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ служат координатами ковектора ω, определенного правилом: $\omega(\mathbf{v}) = \omega_i v^i$. $\square$

Итак, если в пространстве выбран базис, то каждый вектор $\mathbf{v}$ и каждый ковектор ω можно отождествить с набором чисел:

$$\mathbf{v} \sim (v^1, v^2, v^3), \qquad \omega \sim (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Эти две величины имеют различную природу, но само координатное представление не отражает этого различия. Что же отличает координаты вектора от координат ковектора? Ответ кроется в законах преобразования координат при переходе от одного базиса к другому. Найдем эти преобразования. С этой целью выберем в пространстве V другой базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Тогда тот же вектор $\mathbf{v}$ и тот же ковектор ω отождествятся с некоторыми иными наборами чисел:

$$\mathbf{v} \sim (v'^1, v'^2, v'^3), \qquad \omega \sim (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3).$$

Утверждение 2. *При переходе от одного базиса к другому базису*

$$\mathbf{e}'_i = c_i^k \mathbf{e}_k \qquad (i = 1, 2, 3)$$

координаты вектора преобразуются контрагредиентно:

$$v^i = c_k^i v'^k \qquad (i = 1, 2, 3),$$

а координаты ковектора преобразуются когредиентно:

$$\omega'_i = c_i^k \omega_k \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Доказательство. Для координат вектора $\mathbf{v}$ имеем

$$v^i \mathbf{e}_i = v'^k \mathbf{e}'_k = v'^k (c_k^i \mathbf{e}_i) = (c_k^i v'^k) \mathbf{e}_i,$$

откуда следует контрагредиентный закон $v^i = c_k^i v'^k$. Для координат ковектора ω имеем

$$\omega'_i = \omega(\mathbf{e}'_i) = \omega(c_i^k \mathbf{e}_k) = c_i^k \omega(\mathbf{e}_k) = c_i^k \omega_k,$$

откуда следует когредиентный закон $\omega'_i = c_i^k \omega_k$. $\square$

В матричных обозначениях контрагредиентный закон принимает вид

$$C \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix},$$

где C обозначает матрицу перехода

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{pmatrix}.$$

Когредиентный закон принимает другой вид

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \\ \omega_3' \end{pmatrix} = C^\top \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix},$$

где $C^\top$ обозначает транспонированную матрицу. Возникает естественный вопрос: в каких случаях законы преобразования координат векторов и ковекторов совпадают? Очевидно, это возможно только в тех случаях, когда $C^{-1} = C^\top$, т.е. когда матрица C ортогональна. Напомним, что ортогональные матрицы возникают в евклидовом пространстве при переходе от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису. Следовательно, если в евклидовом пространстве мы ограничимся только ортонормированными базисами, то мы не сможем отличить координаты ковектора от координат вектора.

Упражнение. В евклидовом пространстве зафиксируем вектор $\mathbf{u}$ и каждому базису приведем в соответствие набор из трех числовых компонент

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_3.$$

По какому закону преобразуются эти компоненты при замене базиса?

§ 3. Понятие тензора типа (p, q). Примеры

Подведем итог тому, что было сказано выше про вектор и ковектор. Сходство этих двух геометрических величин заключается в том, что обе они допускают координатное описание, которое полностью зависит от выбора базиса в пространстве. На этом уровне описания они различаются правилом, по которому преобразуются координаты при замене базиса. Инвариантный (т.е. независящий от базиса) смысл этих величин проявляется в наличии такого правила. Эти наблюдения можно превратить в определение широкого класса величин, называемых тензорами. При этом вектор и ковектор явятся простейшими и наиболее наглядными примерами тензоров.

Определение 1. Говорят, что на векторном пространстве V задан *тензор типа* (p, q), если каждому базису приведен в соответствие набор из 3^{p+q} числовых компонент

$$T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

таким образом, что при замене базиса $\mathbf{e}'_i = c^k_i \mathbf{e}_k$ эти компоненты преобразуются по правилу

$$c^{k_1}_{j_1} \ldots c^{k_q}_{j_q} T'^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = c^{l_1}_{i_1} \ldots c^{l_p}_{i_p} T^{k_1 \ldots k_q}_{l_1 \ldots l_p}.$$

Число $p + q$ называется *рангом* тензора. Тензор типа (p, q) принято называть p раз *ковариантным* и q раз *контравариантным.*

Замечание 1. Расшифруем правило преобразования компонент тензора более подробно. Слева перемножаются q элементов матрицы перехода, а справа перемножаются p элементов той же матрицы. Кроме того здесь снова используется обозначение Эйнштейна: по всем q индексам с именем j слева и по всем p индексам с именем l справа ведется суммирование. При этом уравнения, связывающие штрихованные компоненты с нештрихованными, записываются в симметричной форме. При желании эти уравнения можно разрешить в одном из двух возможных направлений.

Упражнение 1. Докажите, что

$$T'^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = d^{j_1}_{k_1} \ldots d^{j_q}_{k_q} c^{l_1}_{i_1} \ldots c^{l_p}_{i_p} T^{k_1 \ldots k_q}_{l_1 \ldots l_p},$$

где матрица $D = \|d_k^j\|$ является обратной к матрице перехода $C = \|c_i^k\|$, т.е.

$$d_k^j c_i^k = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Замечание 2. Стоит сразу же обратить внимание на то, что компоненты тензора в одном базисе линейно выражаются через компоненты того же тензора в другом базисе. Отсюда немедленно следует, что на множестве тензоров одного и того же типа, как и на исходном множестве векторов V, корректно определены операции покомпонентного сложения и умножения на число. Причем эти операции удовлетворяют свойствам, подобным 1^o – 8^o. Возникающее таким образом пространство называется пространством тензоров типа (p, q) и обозначается символом $\mathbf{T}_p^q(V)$. Очевидно, $\dim \mathbf{T}_p^q(V) = 3^{p+q}$.

Тензоры ранга ноль. Это скаляры, т.е. величины, которые в любом базисе задаются одним и тем же числом. Примером скаляра может служить длина фиксированого вектора в пространстве, снабженном евклидовой структурой. Каждый может вычислять длину вектора, выбирая свой собственный базис. Но результат не будет зависеть от этого выбора.

Тензоры ранга один. Каждый вектор $\mathbf{v} \in V$ задает тензор типа $(0, 1)$, поскольку его компоненты преобразуются контрагредиентно:

$$c_i^k v'^i = v^k.$$

Вектор — это один раз контравариантный тензор. Каждый ковектор ω на V задает тензор типа $(1, 0)$, поскольку его компоненты преобразуются когредиентно:

$$\omega_i' = c_i^k \omega_k.$$

Ковектор — это один раз ковариантный тензор.

Упражнение 2. Докажите, что всякий тензор первого ранга есть либо вектор, либо ковектор.

Тензоры типа (1,1). Один раз ковариантный и один раз контравариантный тензор можно задать, исходя из понятия линейного оператора. Напомним его здесь.

Определение 2. *Линейным оператором* на V называется отображение
$$T : V \to V,$$
удовлетворяющее условию линейности
$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$$
$\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $\forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.

Утверждение. *Линейный оператор T на V задает тензор типа* $(1,1)$.

Доказательство. В исходном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ оператор T отождествляется с матрицей
$$T \sim M = \begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 & T^1_3 \\ T^2_1 & T^2_2 & T^2_3 \\ T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 \end{pmatrix},$$
в i-ом столбце которой расположены координаты вектора $T(\mathbf{e}_i)$, т.е.
$$T(\mathbf{e}_i) = T^j_i\mathbf{e}_j.$$
В другом базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ тот же оператор T отождествляется с другой матрицей
$$T \sim M' = \begin{pmatrix} T'^1_1 & T'^1_2 & T'^1_3 \\ T'^2_1 & T'^2_2 & T'^2_3 \\ T'^3_1 & T'^3_2 & T'^3_3 \end{pmatrix},$$
компоненты которой определяются по тому же принципу, т.е.
$$T(\mathbf{e}'_i) = T'^j_i\mathbf{e}'_j.$$
Это вместе с линейностью и соотношениями $\mathbf{e}'_i = c^k_i\mathbf{e}_k$ приводит к равенствам
$$T(\mathbf{e}'_i) = T'^j_i\mathbf{e}'_j = T'^j_i(c^k_j\mathbf{e}_k) = (c^k_jT'^j_i)\mathbf{e}_k,$$
$$T(\mathbf{e}'_i) = T(c^l_i\mathbf{e}_l) = c^l_iT(\mathbf{e}_l) = c^l_i(T^k_l\mathbf{e}_k) = (c^l_iT^k_l)\mathbf{e}_k.$$
Сравнивая эти равенства, получаем правило преобразования компонент тензора типа $(1,1)$:
$$c^k_jT'^j_i = T^k_lc^l_i. \quad \square$$

Замечание 3. В матричной форме это равенство имеет вид $CM' = MC$ или
$$M' = C^{-1}MC.$$
Это известное из курса алгебры преобразование подобия, которым (в случае поля комплексных чисел) всякую матрицу M можно привести к жордановой форме. Напомним, что базис, в котором возникает жорданова форма, состоит из собственных и корневых векторов оператора T.

Упражнение 3. Докажите, что всякий тензор типа $(1, 1)$ является линейным оператором на пространстве V.

Упражнение 4. Задайте на V тензор типа $(2, 0)$. Указание: если не получится, внимательней просмотрите предыдущие параграфы.

Упражнение 5. Задайте на V тензор типа $(0, 2)$. Указание: если не получится, внимательно прочитайте последующие параграфы.

§ 4. Полилинейные функции и ковариантные тензоры

Функции от p векторных аргументов, линейные по каждому из них, доставляют примеры ковариантных тензоров ранга p. Такими примерами исчерпывается множество всех тензоров типа $(p, 0)$.

Определение 1. Вещественнозначная функция двух векторных аргументов $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ называется билинейной, если она удовлетворяет условию линейности по каждому из этих аргументов, т.е.
$$\omega(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2, \mathbf{v}) = c_1\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}) + c_2\omega(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}),$$
$$\omega(\mathbf{v}, c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1\omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) + c_2\omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2),$$
для всех $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.

Утверждение 1. *Каждая билинейная функция задает тензор типа* $(2, 0)$.

Доказательство. Билинейная функция ω сопоставляет каждому базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ набор числовых компонент T_{ij} по правилу

$$T_{ij} = \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

При замене базиса $\mathbf{e}'_i = c_i^l \mathbf{e}_l$ получаем

$$T'_{ij} = \omega(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \omega(c_i^l \mathbf{e}_l, c_j^k \mathbf{e}_k) = c_i^l c_j^k \omega(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_k) = c_i^l c_j^k T_{lk}.$$

А это значит, что числа T_{ij} являются компонентами тензора типа $(2, 0)$. $\square$

Утверждение 2. *Каждый тензор типа* $(2, 0)$ *определяет билинейную функцию.*

Доказательство. Рассмотрим на векторном пространстве тензор типа $(2, 0)$ с компонентами T_{ij} в некотором базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Сопоставим паре векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ с компонентами v_1^i, v_2^j число

$$\omega = T_{ij} v_1^i v_2^j.$$

Это число не зависит от выбора базиса. Действительно, в другом базисе имеем

$$\omega' = T'_{ij} v_1'^i v_2'^j = c_i^l c_j^k T_{lk} v_1'^i v_2'^j = T_{lk} c_i^l v_1'^i c_j^k v_2'^j = T_{lk} v_1^l v_2^k = \omega.$$

Конечно, здесь мы воспользовались тем, что при замене базиса все компоненты преобразуются по тензорному закону:

$$T'_{ij} = c_i^l c_j^k T_{lk}, \quad c_i^l v_1'^i = v_1^l, \quad c_j^k v_2'^j = v_2^k.$$

Таким образом, число ω не зависит от выбора базиса, а зависит лишь от пары векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. По построению функция $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ линейна по каждому своему аргументу. $\square$

Следствие. *Имеется взаимно-однозначное соответствие между тензорами типа* $(2, 0)$ *и билинейными функциями.*

Пример 1. На евклидовом пространстве V задано скалярное умножение (см. § 1), которое можно рассматривать как билинейную функцию

$$\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2.$$

Отвечающий ей тензор типа $(2, 0)$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеет компоненты

$$g_{ij} = \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j,$$

которые называют *метрическими коэффициентами.* А сам тензор принято называть *метрикой.* Квадрат длины вектора $\mathbf{v}$ выражается через компоненты метрического тензора по формуле

$$|\mathbf{v}|^2 = g_{ij} v^i v^j,$$

где v^1, v^2, v^3 — координаты вектора $\mathbf{v}$ в том же базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Заметим, что метрика является симметрическим тензором, т.е. $g_{ij} = g_{ji}$, поскольку $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i$.

Замечание. Матрица g_{ij}, является невырожденной, т.к. ее определитель является определителем Грама тройки некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Напомним, что определитель Грама тройки вычисляет квадрат объема параллелепипеда, построенного на этой тройке.

Упражнение 1. Каждому базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ отвечает набор из девяти числовых компонент g^{ij}, образующих матрицу, обратную к матрице g_{ij}, т.е.

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j.$$

Докажите, что g^{ij} есть тензор типа $(0, 2)$.

Упражнение 2. Докажите, что для любого ковектора ω число

$$|\omega|^2 = g^{ij} \omega_i \omega_j$$

не зависит от выбора базиса и является положительным. Иными словами, тензор g^{ij} есть метрика на пространстве ковекторов, которое называется двойственным к V и обозначается специальным символом V^*, т.е. $V^* = \mathbf{T}^0_1(V)$.

Пример 2. На ориентированном евклидовом пространстве V определено векторное умножение (см. § 1), которое вместе с фиксированным вектором $\mathbf{u} \in V$ задает билинейную функцию

$$\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2).$$

С геометрической точки зрения ω есть ориентированный объем параллелепипеда, построенного на трех векторах $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, т.е. $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \pm$ объем. Знак $+(-)$ соответствует положительно (отрицательно) ориентированной тройке векторов. С физическиой точки зрения $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ есть поток жидкости через ориентированную площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. По абсолютной величине этот поток равен объему жидкости, протекающей со скоростью $\mathbf{u}$ через площадь параллелограмма за единицу времени. Знак потока соответствует одному из двух его возможных направлений: положительному или отрицательному. Отвечающий билинейной функции $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ тензор типа $(2,0)$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеет компоненты

$$T_{ij} = \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j).$$

Этот тензор называется *потоком.* Заметим, что поток является кососимметрическим тензором, т.е. $T_{ij} = -T_{ji}$, поскольку $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i$.

Упражнение 3. Найдите компоненты потока T_{ij} вектора $\mathbf{u}$ как функции его координат u^1, u^2, u^3 в случае, когда базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ортонормирован и положительно ориентирован.

Определение 2. Вещественнозначная функция от p векторных аргументов $\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ называется p-линейной, если она удовлетворяет условию линейности по каждому из этих аргументов.

Утверждение 3. *Имеется взаимно-однозначное соответствие между тензорами типа $(p,0)$ и p-линейными функциями.*

Упражнение 4. Проверьте последнее утверждение.

Пример 3. На ориентированном евклидовом пространстве определено смешанное произведение векторов, которое можно рассматривать как трилинейную функцию

$$\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3.$$

Эта величина совпадает с ориентированным объемом параллелепипеда, построенного на трех векторах $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Отвечающий ей тензор типа $(3,0)$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеет компоненты

$$T_{ijk} = \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k.$$

Этот тензор называется *элементом объема.* Если среди индексов ijk есть хотя бы два одинаковых, то $T_{ijk} = 0$. В противном случае

$$T_{ijk} = \pm T_{123},$$

где знак $+(-)$ соответствует четной (нечетной) перестановке ijk индексов 123. Заметим, что элемент объема является кососимметрическим тензором, т.е. его компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, поскольку смешанное произведение векторов меняет знак при перестановке любых двух сомножителей. Очевидно, любой кососимметрический тензор типа $(3,0)$ точно так же, как и элемент объема, определяется одним числом T_{123}.

Упражнение 5. Докажите, что число T_{123}, которое однозначно определяет кососимметрический тензор типа $(3,0)$, при замене базиса $\mathbf{e}'_i = c_i^l \mathbf{e}_l$ умножается на определитель матрицы перехода, т.е.

$$T'_{123} = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{vmatrix} T_{123}.$$

§ 5. Алгебраические операции над тензорами

На множестве тензоров можно определить операции произведения и свертки. В евклидовом пространстве эти операции порождают еще одно действие: опускание индексов, которое в принципе позволяет обращать произвольные смешанные тензоры типа (p,q) в ковариантные тензоры типа $(p+q,0)$. Кроме того имеется еще одна важная операция: перестановка индексов, которая дает возможность выделять подклассы тензоров, удовлетворяющих дополнительным условиям симметрии.

Определение 1. *Произведением* двух тензоров $S = S_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ и $T = T_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}$ типов (p,q) и (k,l) соответственно называется тензор $S \otimes T$ типа $(p+k, q+l)$ с компонентами

$$(S \otimes T)_{i_1 \ldots i_{p+k}}^{j_1 \ldots j_{q+l}} = S_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} T_{i_{p+1} \ldots i_{p+k}}^{j_{q+1} \ldots j_{q+l}}$$

в том же базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in V$, в котором заданы компоненты тензоров S, T.

Упражнение 1. Проверьте, что произведение действительно является тензором: при переходе от одного базиса к другому его компоненты преобразуются по тензорному закону.

Пример 1. Тензорное произведение вектора $\mathbf{v}$ на ковектор ω есть оператор $T_i^j = v^j \omega_i$. В этом случае порядок сомножителей значения не имеет, т.е. $\mathbf{v} \otimes \omega = \omega \otimes \mathbf{v}$.

Упражнение 2. Убедитесь в том, что, вообще говоря, произведение тензоров зависит от порядка сомножителей, т.е. $S \otimes T \neq T \otimes S$. Приведите соответствующий пример.

Упражнение 3. Докажите, что тензорное произведение p-линейной функции ω^1 на k-линейную функцию ω^2 есть $(p+k)$-линейная функция $\omega = \omega^1 \otimes \omega^2$, вычисляемая по формуле:

$$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{p+k}) = \omega^1(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)\, \omega^2(\mathbf{v}_{p+1}, \ldots, \mathbf{v}_{p+k}).$$

Определение 2. *Сверткой* тензора $T = T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ типа (p, q) по s-му верхнему и r-му нижнему индексам называется тензор S типа $(p-1, q-1)$ с компонентами

$$S_{i_1 \ldots i_{p-1}}^{j_1 \ldots j_{q-1}} = T_{i_1 \ldots i_{r-1} k i_r \ldots i_{p-1}}^{j_1 \ldots j_{s-1} k j_s \ldots j_{q-1}}.$$

Согласно обозначению Эйнштейна здесь по повторяющемуся индексу k производится суммирование от 1 до 3.

Упражнение 4. Проверьте, что свертка действительно является тензором.

Пример 2. Свертка оператора $T = T_i^j$ по его единственному верхнему и единственному нижнему индексам есть тензор типа $(0, 0)$, т.е. скаляр, называемый *следом* и обозначаемый символом $\operatorname{tr} T = T_k^k$. В частности, след оператора $T_i^j = v^j \omega_i$ совпадает со значением ковектора ω на векторе $\mathbf{v}$, т.е. $\operatorname{tr}(\mathbf{v} \otimes \omega) = \omega(\mathbf{v})$. Очевидно, такое число никак не зависит от базиса, в котором его вычисляют.

Упражнение 5. Даны вектор $\mathbf{v} \in V$ и линейный оператор $T : V \to V$. Докажите, что свертка тензора $\mathbf{v} \otimes T$ типа $(1, 2)$ по верхнему индексу вектора и нижнему индексу оператора есть другой вектор $\mathbf{u} \in V$, совпадающий с результатом применения оператора T к исходному вектору $\mathbf{v}$, т.е. $\mathbf{u} = T\mathbf{v}$.

Определение 3. *Опусканием индекса* с помощью метрики g_{ij} называется переход от тензора $T = T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ типа (p, q) к следующему тензору типа $(p + 1, q - 1)$:

$$T^{j_2 \ldots j_q}_{j_1 i_1 \ldots i_p} = g_{j_1 k} T^{k j_2 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}.$$

Опускание индекса можно рассматривать как композицию операций умножения на метрический тензор и свертки. Поэтому опускание индекса тоже является тензорной операцией. Кроме того отсюда видно, что это действие существенно зависит от выбора евклидовой структуры на векторном пространстве V.

Пример 3. Опускание индекса у вектора v^j дает ковектор $\omega_i = g_{ik} v^k$. Это соответствие между векторами и ковекторами будет обсуждаться более подробно в § 7.

Определение 4. *Поднятием индекса* с помощью метрики g_{ij} называется переход от тензора $T = T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ типа (p, q) к следующему тензору типа $(p - 1, q + 1)$:

$$T^{i_1 j_1 \ldots j_q}_{i_2 \ldots i_p} = g^{i_1 k} T^{j_1 \ldots j_q}_{k i_2 \ldots i_p},$$

где g^{ij} есть матрица, обратная к матрице g_{ij}, т.е. $g^{ik} g_{jk} = \delta^i_j$.

В § 4 было отмечено, что g^{ij} является тензором типа $(0, 2)$. Умножение на этот тензор с последующей сверткой и есть поднятие индекса. Поэтому тензорный характер этой операции также не вызывает сомнений.

Пример 4. Поднятие индекса у ковектора ω_i дает вектор $v^j = g^{jk} \omega_k$.

Утверждение. *Композиция операций опускания индекса и его поднятия дает исходный тензор.*

Доказательство. Этот факт легко следует прямо из определений:
$$g^{j_1 l} g_{lk} T^{kj_2\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = \delta^{j_1}_k T^{kj_2\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}. \quad \square$$

Определение 5. Говорят, что тензор S получился из тензора T *перестановкой* двух нижних индексов i_k и i_l, если
$$S^{j_1\ldots j_k\ldots j_l\ldots j_q}_{i_1\ldots i_k\ldots i_l\ldots i_p} = T^{j_1\ldots j_k\ldots j_l\ldots j_q}_{i_1\ldots i_l\ldots i_k\ldots i_p}.$$

Перестановка двух верхних индексов определяется аналогично.

Упражнение 6. Проверьте, что операция перестановки индексов дает тензор.

Пример 5. Перестановка индексов метрики $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ дает тот же тензор g_{ij}. Перестановка индексов потока $T_{ij} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)$ дает противоположный тензор $-T_{ij}$.

Упражнение 7. Убедитесь в том, что перестановка верхнего и нижнего индексов не есть тензорная операция. Приведите соответствующий пример.

§ 6. Внешние формы и кососимметрические тензоры

На трехмерном пространстве V можно определить внешние формы степени $p = 1, 2, 3$. На множестве таких форм имеется кососкоммутативная, дистрибутивная и ассоциативная операция внешнего умножения $\wedge$. Эта операция с учетом соответствия между внешними формами и подклассом ковариантных кососимметрических тензоров вносит в этот подкласс структуру внешней алгебры.

Определение 1. *Внешней* 1*-формой* на V называется линейная функция $\omega : V \to \mathbb{R}$.

Иными словами, 1-форма есть ковектор, т.е. уже знакомый нам тензор. Каждый базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в пространстве V порождает *координатные* 1*-формы* $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ такие, что
$$\varepsilon^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j,$$

где δ^i_j есть символ Кронекера, определенный в § 3. Очевидно,

$$\varepsilon^i(\mathbf{v}) = v^i,$$

где v^i есть i-ая координата вектора $\mathbf{v}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Утверждение 1. *Всякая 1-форма ω выражается через координатные формы $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ по правилу*

$$\omega = T_1\varepsilon^1 + T_2\varepsilon^2 + T_3\varepsilon^3.$$

Доказательство. Для всякого вектора $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ имеем

$$\omega(\mathbf{v}) = \omega(\mathbf{e}_i)v^i = T_i\varepsilon^i(\mathbf{v}),$$

где $T_i = \omega(\mathbf{e}_i)$ есть i-ая координата ковектора ω. $\square$

Определение 2. *Внешней 2-формой* на V назывется такая билинейная функция $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, которая кососимметрична, т.е. меняет знак при перестановке аргументов:

$$\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = -\,\omega(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1).$$

Пример 1. Функция $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, составленная из двух 1-форм $\omega^1(\mathbf{v})$ и $\omega^2(\mathbf{v})$ по правилу

$$\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{vmatrix} \omega^1(\mathbf{v}_1) & \omega^2(\mathbf{v}_1) \\ \omega^1(\mathbf{v}_2) & \omega^2(\mathbf{v}_2) \end{vmatrix},$$

является 2-формой. Билинейность и кососимметричность непосредственно вытекают из свойств определителя. Эта 2-форма называется *внешним произведением* 1-форм ω^1, ω^2 и обозначается символом

$$\omega = \omega^1 \wedge \omega^2.$$

Операция внешнего умножения $\wedge$ является *кососоммутативной*:

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = -\,\omega^2 \wedge \omega^1,$$

т.к. перестановка столбцов определителя меняет его знак на противоположный.

Утверждение 2. *Всякая 2-форма ω выражается через координатные 1-формы $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ по правилу*

$$\omega = T_{12}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 + T_{31}\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + T_{23}\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3.$$

Доказательство. Из условия кососимметричности находим

$$\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = T_{ij}v_1^i v_2^j = \sum_{i<j} T_{ij}(v_1^i v_2^j - v_1^j v_2^i) =$$

$$= \sum_{i<j} T_{ij} \begin{vmatrix} v_1^i & v_1^j \\ v_2^i & v_2^j \end{vmatrix} = \sum_{i<j} T_{ij} \begin{vmatrix} \varepsilon^i(\mathbf{v}_1) & \varepsilon^j(\mathbf{v}_1) \\ \varepsilon^i(\mathbf{v}_2) & \varepsilon^j(\mathbf{v}_2) \end{vmatrix},$$

где $T_{ij} = \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ — компоненты тензора типа $(2, 0)$. $\square$

Определение 3. *Внешней* 3-*формой* на V называется трилинейная функция $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, которая кососимметрична, т.е. меняет знак при перестановке любых двух аргументов.

Пример 2. Из трех 1-форм $\omega^1(\mathbf{v}), \omega^2(\mathbf{v}), \omega^3(\mathbf{v})$ можно составить 3-форму по правилу

$$\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} \omega^1(\mathbf{v}_1) & \omega^2(\mathbf{v}_1) & \omega^3(\mathbf{v}_1) \\ \omega^1(\mathbf{v}_2) & \omega^2(\mathbf{v}_2) & \omega^3(\mathbf{v}_2) \\ \omega^1(\mathbf{v}_3) & \omega^2(\mathbf{v}_3) & \omega^3(\mathbf{v}_3) \end{vmatrix}.$$

Эта 3-форма называется *внешним произведением* 1-форм $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ и обозначается символом

$$\omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3.$$

Утверждение 3. *Всякая 3-форма ω выражается через координатные 1-формы $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ по правилу*

$$\omega = T_{123}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3.$$

Доказательство. Условие кососимметричности дает

$$\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = T_{ijk}v_1^i v_2^j v_3^k =$$

$$= T_{123} \begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{vmatrix} = T_{123} \begin{vmatrix} \varepsilon^1(\mathbf{v}_1) & \varepsilon^2(\mathbf{v}_1) & \varepsilon^3(\mathbf{v}_1) \\ \varepsilon^1(\mathbf{v}_2) & \varepsilon^2(\mathbf{v}_2) & \varepsilon^3(\mathbf{v}_2) \\ \varepsilon^1(\mathbf{v}_3) & \varepsilon^2(\mathbf{v}_3) & \varepsilon^3(\mathbf{v}_3) \end{vmatrix},$$

где $T_{ijk} = \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ — компоненты тензора типа $(3, 0)$. $\square$

Определение 4. *Внешним произведением* 1-формы ω^1 на 2-форму ω^2 называется такая 3-форма $\omega = \omega^1 \wedge \omega^2$, которая определяется правилом

$$\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \omega^1(\mathbf{v}_1)\,\omega^2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) - \omega^1(\mathbf{v}_2)\,\omega^2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + \omega^1(\mathbf{v}_3)\,\omega^2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Упражнение 1. Проверьте, что функция ω действительно является 3-формой, т.е. ее значение зависит от векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ трилинейно и кососимметрично.

Замечание. Прямо из определения следует, что операция внешнего умножения является *дистрибутивной*, т.е.

$$(\omega^1 + \omega^2) \wedge \omega = \omega^1 \wedge \omega + \omega^2 \wedge \omega,$$

где ω^1 и ω^2 — произвольные 1-формы.

Упражнение 2. Докажите, что операция внешнего умножения *ассоциативна*, т.е.

$$(\omega^1 \wedge \omega^2) \wedge \omega^3 = \omega^1 \wedge (\omega^2 \wedge \omega^3) = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3.$$

где $\omega^1, \omega^2, \omega^3$— произвольные 1-формы.

Определение 5. Тензор типа $(p, 0)$ называется кососимметрическим, если его компоненты $T_{i_1 \dots i_p}$ меняют знак при перестановке двух произвольных индексов.

Утверждение 4. *Имеется взаимно однозначное соответствие между кососимметрическими тензорами типа $(p, 0)$ и внешними p-формами, т.е. p-линейными функциями, меняющими знак при перестановке любых двух аргументов.*

Доказательство. Как и в §4, p-форма $\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ задает кососимметрический тензор по правилу

$$T_{i_1 \dots i_p} = \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}).$$

Наоборот, кососимметрический тензор $T_{i_1 \dots i_p}$ порождает внешнюю форму

$$\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = T_{i_1 \dots i_p} v_1^{i_1} \cdots v_p^{i_p},$$

где v_j^i есть i-ая координата вектора $\mathbf{v}_j$. $\square$

Вывод. Алгебру внешних форм можно использовать для работы с кососимметрическими тензорами.

Упражнение 3. Опишите внешние формы степени $p \geq 4$ на V. Напоминаем, что $\dim V = 3$.

§ 7. Естественные изоморфизмы в евклидовом пространстве

В трехмерном ориентированном евклидовом пространстве V можно определить естественные соответствия между тензорами разного типа. Точнее, пусть $\Lambda_p(V)$ обозначает множество внешних p-форм на V. Цель данного параграфа состоит в описании трех естественных изоморфизмов:

$$\lambda_1 : V \to \Lambda_1(V), \quad \lambda_2 : V \to \Lambda_2(V), \quad \lambda_3 : \mathbb{R} \to \Lambda_3(V).$$

Полученные здесь вычислительные формулы для этих изоморфизмов используются для записи операций векторного анализа в криволинейных координатах.

Утверждение 1. *Отображение $\lambda_1 : \mathbf{u} \mapsto \omega$, где $\omega(v) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, является взаимно однозначным отображением V на $\Lambda_1(V)$.*

Доказательство. Для проверки взаимной однозначности используем так называемый *триортогональный базис* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, который обладает следующими свойствами

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \qquad (i \neq j).$$

Векторы такого базиса попарно ортогональны, но их длины

$$H_i = |\mathbf{e}_i| \qquad (i = 1, 2, 3)$$

могут быть произвольными числами. Такие базисы используются в механике, а числа H_1, H_2, H_3 называются *коэффициентами Ламе*. Отображение λ_1 сопоставляет вектору

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3$$

1-форму
$$\omega = T_1\varepsilon^1 + T_2\varepsilon^2 + T_3\varepsilon^3,$$
где
$$T_1 = H_1^2 u^1, \quad T_2 = H_2^2 u^2, \quad T_3 = H_3^2 u^3.$$
Следовательно отображение λ_1 биективно, а его обращение λ_1^{-1} : $\omega \mapsto \mathbf{u}$ в триортогональном базисе сводится к делению
$$u^i = T_i/\, H_i^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$
компонент 1-формы ω на квадраты чисел Ламе. □

Замечание 1. В частности, для любой формы $\omega \in \Lambda_1(V)$ существует единственный вектор $\mathbf{u} \in V$, такой что $\omega = \lambda_1(\mathbf{u})$. Отображения λ_1 и λ_1^{-1} соответсвуют операциям опускания и поднятия индекса у тензоров первого ранга (см. § 5). Ориентация в этих операциях не участвует.

Утверждение 2. *Отображение* $\lambda_2 : \mathbf{u} \mapsto \omega$, *где* $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$, *является взаимно однозначным отображением* V *на* $\Lambda_2(V)$.

Доказательство. Отображение λ_2 сопоставляет вектору
$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3$$
2-форму
$$\omega = T_{23}\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + T_{31}\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + T_{12}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2,$$
компоненты которой в триортогональном базисе положительной ориентации находятся по формулам
$$T_{23} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = H_1H_2H_3u^1,$$
$$T_{31} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = H_1H_2H_3u^2,$$
$$T_{12} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = H_1H_2H_3u^3.$$
Следовательно отображение λ_2 биективно, а его обращение λ_2^{-1} : $\omega \mapsto \mathbf{u}$ сводится к делению
$$u^1 = \frac{T_{23}}{H_1H_2H_3}, \quad u^2 = \frac{T_{31}}{H_1H_2H_3}, \quad u^3 = \frac{T_{12}}{H_1H_2H_3}$$

компонент 2-формы ω на произведение чисел Ламе, которое равно объему прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. $\square$

Замечание 2. В частности, для любой формы $\omega \in \Lambda_2(V)$ существует единственный вектор $\mathbf{u} \in V$ такой, что $\omega = \lambda_2(\mathbf{u})$. Отображение λ_2 использует операцию векторного умножения, в определении которой участвует ориентация.

Утверждение 3. *Отображение $\lambda_3 : c \mapsto \omega$, где $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3)c$, является взаимно однозначным отображением $\mathbb{R}$ на $\Lambda_3(V)$.*

Доказательство. Каждому числу $c \in \mathbb{R}$ отображение λ_3 сопоставляет 3-форму
$$\omega = T_{123}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3,$$
которая в триортогональном базисе положительной ориентации дается формулой
$$T_{123} = (e_1e_2e_3)c = H_1H_2H_3c.$$
Следовательно отображение λ_3 биективно, а его обращение $\lambda_3^{-1} : \omega \mapsto c$ сводится к делению
$$c = T_{123}/\, H_1H_2H_3. \quad \square$$

Замечание 3. В частности, для любой формы $\omega \in \Lambda_3(V)$ существует единственное число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\omega = \lambda_3(c)$. Отображение λ_3 использует операцию смешанного умножения, в определении которой участвует ориентация.

Упражнение 1. Докажите, что $\lambda_1(\mathbf{u}_1) \wedge \lambda_1(\mathbf{u}_2) = \lambda_2(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)$ для всех $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$.

Упражнение 2. Докажите, что $\lambda_1(\mathbf{u}_1) \wedge \lambda_1(\mathbf{u}_2) \wedge \lambda_1(\mathbf{u}_3) = \lambda_3(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3)$ для всех $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in V$.

Вывод. Изоморфизмы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ превращают операцию внешнего умножения ковекторов в обычные операции векторной алгебры. В этом смысле внешнее умножение форм можно рассматривать как обобщение векторного и смешанного умножения векторов на случай, когда в пространстве V не задана евклидова структура.

Список литературы

[1] Звагельский М.Ю., Кальницкий В.С., Романовский Ю.Р., Смирнов А.В. *Контрольные задания по аналитической геометрии* СПб: КМУ отдела ОУП физического факультета СПбГУ, 2015.

[2] Кальницкий В.С., Никанорова М.Ю., Романовский Ю.Р. *Дополнительные главы дифференциальной геометрии, Часть 1*, Учебно-методическое пособие, СПб.: СОЛО, 2016. - 30 с.