ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 118, № 1
январь, 1999

 Ю. А. Куперин*, С. Б. Левин†

МЕТОДЫ ТЕОРИИ РАСШИРЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ И АННИГИЛЯЦИИ ДЛЯ $\bar{p}d$-СИСТЕМЫ

Рассматривается задача трехчастичного рассеяния и аннигиляции в системе трех сильно взаимодействующих заряженных частиц ($\bar{p}pn$). Для описания процессов упругого рассеяния и развала в нуклонном канале и процесса аннигиляции в мезонные каналы предложена математическая модель, основанная на теории расширений симметрических операторов. В рамках этой модели построены модифицированные интегральные уравнения Фаддеева с энергозависящими взаимодействиями, учитывающими процессы аннигиляции, и доказана их однозначная разрешимость в подходящих функциональных классах. На этой основе выведены соответствующие дифференциальные уравнения Фаддеева, построены асимптотические граничные условия для компонент волновых функций и сформулированы граничные задачи для системы, составленной из нуклонных и мезонных каналов. Полученные результаты применены для описания процессов рассеяния и аннигиляции в трехчастичной системе $\bar{p}d$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на достигнутый за последние 30 лет существенный прогресс в описании динамики нескольких точечных (бесструктурных) квантовых объектов [1–7] методы этих (и многих других) работ не были применены для описания процессов, происходящих в системах нескольких частиц, обладающих той или иной внутренней структурой. К таким объектам относятся адроны, обладающие сложной кварк-глюонной структурой и/или атомные ядра, трактуемые как нуклонные кластеры. В системах нескольких частиц с нетривиальной внутренней структурой для описания процессов, в которых эта структура играет существенную роль, применялись различные подходы [8–19]. Все они сводились к построению феноменологических моделей для описания эффективных взаимодействий, несущих информацию о внутренней структуре частиц, с последующим рассмотрением системы нескольких бесструктурных частиц, взаимодействующих посредством построенных эффективных потенциалов. Не останавливаясь подробно на различных способах построения эффективных взаимодействий между квантовыми объектами с внутренней структурой, отметим лишь одно общее свойство таких эффектив-

*Научно-исследовательский институт физики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

†Физический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

ных взаимодействий: все они зависят от спектрального параметра (энергии). Соответственно формально построенный с такими взаимодействиями двух- или трехчастичный гамильтониан не может быть интерпретирован как квантово-механический оператор энергии, поскольку область его определения зависела бы от спектрального параметра. В силу этого для систем нескольких частиц, обладающих нетривиальной внутренней структурой или, что эквивалентно, взаимодействующих через зависящие от энергии потенциалы, корректная формулировка теории рассеяния, подобная формулировке Фаддеева, в рамках упомянутых выше подходов [1–7] построена быть не могла.

Трудность, связанная с энергозависимостью взаимодействий частиц с внутренней структурой, была преодолена в работах [20–28] для систем двух и трех нейтральных частиц методами теории расширений симметричных операторов.

Теория рассеяния для систем нескольких частиц с внутренней структурой, основанная на технике самосопряженных расширений, применялась в ряде конкретных задач адронной и ядерной физики [29–33] и физики твердого тела [34, 35]. Однако во всех этих задачах спектр гамильтонианов, описывающих внутренние степени свободы, считался дискретным, а сами частицы, участвующие в процессах рассеяния, – нейтральными. С математической точки зрения представлялось интересным обобщить теорию рассеяния для систем нескольких частиц с внутренней структурой на случай наличия непрерывного спектра у гамильтонианов внутренних каналов, а также на системы заряженных частиц, взаимодействие между которыми включало бы наряду с короткодействующим энергозависящим оператором также и кулоновское дальнодействие. Одной из важных физических систем, для описания которой подобное обобщение теории рассеяния необходимо, является система нескольких нуклонов и антинуклонов, например система $\bar{p}(pn)$. Построению строгой схемы для описания трехчастичных процессов рассеяния и аннигиляции в системе $\bar{p}d$ и посвящена данная работа. Из-за недостатка места мы не доказываем сформулированные утверждения, ограничиваясь лишь изложением математической концепции в целом. Соответствующие доказательства [36] будут опубликованы в отдельной работе.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Впервые модель связанных каналов была рассмотрена для описания процессов $\overline{N}N$-рассеяния в работах [37, 38]. В этой модели динамика рассматриваемой физической системы описывается самосопряженным оператором h,

$$h\psi = z\psi, \tag{1}$$

где

$$h = \begin{pmatrix} h^{\mathrm{ex}} & V \\ V^* & h^{\mathrm{in}} \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь гамильтонианы h^{ex} и h^{in} описывают динамику в нуклонном канале и канале распада нуклонов, соответственно. Операторы V и V^* обеспечивают связь этих каналов.

В развиваемом нами подходе предполагается, что полная динамика, учитывающая взаимодействие внутренних (кварковых) и внешних (нуклонных) степеней свободы, задается самосопряженным оператором h специальной структуры. Оператор h действует в ортогональной сумме $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\rm ex} \oplus \mathcal{H}^{\rm in}$ пространств, где $\mathcal{H}^{\rm in}$ – гильбертово пространство, отвечающее динамике внутренних степеней свободы, $\mathcal{H}^{\rm ex}$ – гильбертово пространство, отвечающее свободному движению частиц без учета их внутренней структуры. Опишем способ построения гамильтониана h. Пусть в пространствах $\mathcal{H}^{\rm ex}$ и $\mathcal{H}^{\rm in}$ действуют гамильтонианы (самосопряженные операторы) $h^{\rm ex}$ и $h^{\rm in}$, соответственно. Ортогональная сумма $h^{\rm ex} \oplus h^{\rm in}$ определяет гамильтониан, задающий независимые динамики во внутреннем и внешнем каналах. Для включения взаимодействия между каналами предлагается сузить операторы $h^{\rm in}$ в $\mathcal{H}^{\rm in}$ и $h^{\rm ex}$ в $\mathcal{H}^{\rm ex}$ до симметричных операторов $h_0^{\rm in}$ и $h_0^{\rm ex}$. Затем необходимо образовать все самосопряженные расширения оператора $h_0^{\rm ex} \oplus h_0^{\rm in}$. Каждое такое самосопряженное расширение h мы будем интерпретировать как полный гамильтониан, задающий динамику во внутреннем и внешнем каналах и взаимодействие между ними. Характер взаимодействия определяется как способом сужения операторов $h^{\rm in}$ и $h^{\rm ex}$, так и выбором конкретного самосопряженного расширения.

Перейдем теперь, следуя методам работ [39–41], к реализации описанной выше общей схемы. Рассмотрим модель, в которой внутренний и внешний каналы связываются с помощью граничных условий на некоторой поверхности $\gamma \subset R^3$. Динамика внешних степеней свободы задается самосопряженным оператором $h^{\rm ex} u_0 = (-\Delta_x + \widetilde{v}(x))u_0$, действующим в пространстве $\mathcal{H}^{\rm ex} = L^2(R^3)$. Периферическое взаимодействие $\widetilde{v}(x)$ в настоящей работе – это оператор умножения на кулоновский потенциал $n_\alpha/|x_\alpha|$, где n_α – эффективный заряд в системе. Динамика внутренних степеней свободы задается произвольным самосопряженным оператором $h^{\rm in}$, действующим в пространстве $\mathcal{H}^{\rm in}$. Согласно спектральной теореме для самосопряженных операторов оператор $h^{\rm in}$ однозначно определяется через спектр и спектральные проекторы

$$h^{\rm in} u_1 = \int_{-M}^{\infty} \zeta \, dE_\zeta \, u_1 .$$

Здесь $-M$ является нижней границей спектра, dE_ζ – спектральный проектор, отвечающий точке ζ вещественной оси.

Следуя общей схеме, необходимо построить сужение операторов $h^{\rm ex}$ и $h^{\rm in}$. Сужение внешнего гамильтониана достигается дополнительным требованием на функции u_0, а именно требованием обращения в нуль функции и ее нормальной производной на поверхности γ:

$$\mathcal{D}(h_0^{\rm ex}) = \left\{ u_0 \in W_2^2(R^3),\; u_0 \,\big|_\gamma = \partial_n u_0 \,\big|_\gamma = 0 \right\}. \tag{3}$$

Поверхность γ в конфигурационном пространстве может рассматриваться как поверхность фазового перехода в том смысле, что на ней сосредоточен носитель модельного потенциала, обеспечивающего возможность перехода системы из нуклонного канала в мезонный и обратно. Сужение внутреннего гамильтониана $h^{\rm in}$ строится по схеме, предложенной в работах [24–27]. Именно, $D(h_0^{\rm in}) = (h^{\rm in} - i\eta)^{-1} \mathcal{N}_{i\eta}^\perp$, где $\mathcal{N}_{i\eta}^\perp$ – ортогональное дополненние в $\mathcal{H}^{\rm in}$ к порождающему подпространству $\mathcal{N}_{i\eta}$ оператора $h^{\rm in}$ в точке $z = i\eta$. Соответственно $h_0^{\rm in} = h^{\rm in} \upharpoonright D(h_0^{\rm in})$. Ниже ради простоты мы полагаем, что спектр оператора $h^{\rm in}$ простой, т.е. $\dim \mathcal{N}_{i\eta} = 1$.

Самосопряженные расширения оператора $h_0^{\rm ex}\oplus h_0^{\rm in}$ удобно описывать в терминах "баланса" граничных форм операторов $h_0^{\rm ex}$ и $h_0^{\rm in}$:

$$\{u_0, v_0\}^{\rm ex} + \{u_1, v_1\}^{\rm in} = 0. \tag{4}$$

Граничная форма $\{,\}^{\rm ex}$ внешнего оператора определяется соотношением

$$\begin{aligned}\{u, v\}^{\rm ex} &= \langle h_0^* u, v\rangle - \langle u, h_0^* v\rangle = \\ &= \lim_{\delta\to 0}\left[\int_{\gamma_{\delta+}} d\sigma\,(\partial_n u\,\overline{v} - u\,\partial_n\overline{v}) - \int_{\gamma_{\delta-}} d\sigma\,(\partial_n u\,\overline{v} - u\,\partial_n\overline{v})\right], \\ &\quad u, v\in\mathcal{D}(h_0^*),\end{aligned} \tag{5}$$

где $\gamma_\delta^\pm = \{x\in\omega^\pm\colon \operatorname{dist}(x,\gamma)=\delta\}$, ∂_n – нормальная производная к поверхности γ. Аналогом граничной формы (5) во внутреннем пространстве служит симплектическая форма

$$\{u, v\}^{\rm in} = \zeta^-(u)\overline{\zeta^+(v)} - \zeta^+(u)\,\overline{\zeta^-(v)}, \quad u, v\in\mathcal{H}^{\rm in}, \tag{6}$$

где $\zeta^\pm(f)\in C$ – граничные значения элемента f [24–27]. Числа $\zeta^\pm(f)$ – коэффициенты разложения проекции элемента f на дефектное подпространство $\mathcal{N}_{i\eta}$ оператора $(h_0^{\rm in})^*$ по специально выбранному базису $\{\omega^\pm\}\in\mathcal{N}_{i\eta}\dot{+}\mathcal{N}_{-i\eta}$ [24–27].

Поверхность γ, на которой происходит сужение области определения оператора $h^{\rm ex}$, в данной задаче представляет собой сферу радиуса r_0. Здесь r_0 имеет смысл радиуса короткодействующего взаимодействия, представляющего собой в данной модели сумму ядерного и аннигиляционного взаимодействий.

Если в пространстве граничных значений задать связь [24–27]

$$[\partial_n u_0]|_\gamma = -\varphi\zeta^-(u_1), \tag{7}$$

$$\zeta^+(u_1) = \langle u_0|_\gamma, \varphi\rangle, \tag{8}$$

параметризованную функцией $\varphi\in L^2(\gamma)$, то условие (4) будет выполнено, а соответствующий оператор h окажется самосопряженным расширением в пространстве $\mathcal{H}^{\rm ex}\oplus\mathcal{H}^{\rm in}$ оператора $h_0^{\rm ex}\oplus h_0^{\rm in}$. Здесь $[\partial_n u_0]|_\gamma$ – скачок нормальной производной функции u_0, $u_0|_\gamma$ – след этой функции на γ.

Спектральная задача $h\mathcal{U} = z\mathcal{U}$, $\mathcal{U} = (u_0, u_1)$ в сумме каналов может быть редуцирована во внешний канал $\mathcal{H}^{\rm ex}$ исключением переменной u_1. В работах [24–27] показано, что такая редукция с учетом соотношений (7), (8) порождает в пространстве $\mathcal{H}^{\rm ex}$ дополнительный к $\widetilde{v}$ энергозависящий обобщенный потенциал $v(z)$:

$$v(z)u_0 = -\Delta^{\rm in}(z)\langle u_0|_\gamma, \varphi\rangle\varphi,$$

где

$$\Delta^{\rm in}(z) = P_{i\eta}\frac{\eta^2 + zh^{\rm in}}{h^{\rm in} - z}P_{i\eta}$$

– интеграл Шварца спектральной меры оператора $h^{\rm in}$, $P_{i\eta}$ – ортопроектор на $\mathcal{N}_{i\eta}$ в $\mathcal{H}^{\rm in}$.

Параметры φ, r_0, η могут быть зафиксированы [39–41] по имеющимся $\bar{p}p$- и $\bar{p}n$- экспериментальным данным.

3. ОПЕРАТОР ЭНЕРГИИ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ ВО ВНУТРЕННИХ КАНАЛАХ

При переходе к системе трех частиц с внутренней структурой реализация описанной в разделе 2 общей схемы требует ряда модификаций [24–27]. Центральной проблемой при этом является задача построения полного самосопряженного трехчастичного оператора энергии, действующего в сумме внешнего и внутренних каналов. Этот оператор должен также удовлетворять некоторым дополнительным требованиям, главными из которых являются следующие: взаимодействия, получаемые методами теории расширений в трехчастичном конфигурационном пространстве, должны носить парный характер; полный оператор энергии с такими взаимодействиями должен быть полуограничен снизу. В описываемой ниже конструкции перечисленные требования выполнены.

Обозначим через $h_\alpha,\ \ \alpha=1,2,3$, гамильтониан h α-й двухчастичной подсистемы с дополнительным каналом рассеяния, построенный в предыдущем разделе.

Рассмотрим теперь систему трех частиц, в которой взаимодействуют частицы каждой парной подсистемы. В этом случае мы имеем дело с тремя, вообще говоря, различными внутренними подпространствами $\mathcal{F}_\alpha^{\rm in}=\mathcal{H}_\alpha^{\rm in}\otimes L^2(R^3_{y_\alpha}),\ \ \alpha=1,2,3$, и действующими в них гамильтонианами $H_\alpha^{\rm in}=h_\alpha^{\rm in}\otimes I_{y_\alpha}+I_\alpha^{\rm in}\otimes(-\Delta_{y_\alpha})$, где I_{y_α} и $I_\alpha^{\rm in}$ – единичные операторы в пространстве $L^2(R^3_{y_\alpha})$ и $\mathcal{H}_\alpha^{\rm in}$, а также с общим внешним пространством $\mathcal{F}_0^{\rm ex}=L^2(R^6)$, в котором действует самосопряженный оператор $H^{\rm ex}=-\Delta+\sum_\alpha\widetilde{v}_\alpha(x_\alpha)$. Здесь $\widetilde{v}_\alpha$ – кулоновские операторы взаимодействия в α-й парной заряженной подсистеме, а $\Delta=\Delta_{x_\alpha}+\Delta_{y_\alpha}$ – шестимерный оператор Лапласа. Выделим, следуя работам [24–27], в пространстве $\mathcal{F}_\alpha^{\rm in}$ дефектные подпространства оператора $H_{\alpha0}^{\rm in}=h_{\alpha0}^{\rm in}\otimes I_{y_\alpha}+I_\alpha^{\rm in}\otimes(-\Delta_{y_\alpha})$ с фиксированным в них базисом $\{w_\alpha^\pm\}$. В отличие от двухчастичной конструкции раздела 2 коэффициенты разложения $\zeta_\alpha^\pm$ по этому базису будут уже не числами, а функциями дополнительной переменной y_α.

Тогда полный оператор энергии H, удовлетворяющий перечисленным в начале этого раздела требованиям, задается следующим выражением [24–27, 36]:

$$
\begin{aligned}
HU&=\begin{cases} H^{\rm ex}u_0,\\ -\Delta_{y_\alpha}u_\alpha+h_\alpha^{\rm in}\widetilde{u}_\alpha-\zeta_\alpha^-w_\alpha^++\zeta_\alpha^+w_\alpha^-,\end{cases}\\
U&=(u_0,u_\alpha),\quad \alpha=1,2,3,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
[\partial_n u_0]|_{\Gamma_\alpha}&=-\zeta_\alpha^-(y_\alpha)\varphi_\alpha(x_\alpha),\\
\zeta_\alpha^+(y_\alpha)=\langle u_0,\varphi_\alpha\rangle(y_\alpha)&=\int_{S^\alpha_{r_0}}dx_\alpha\,u_0(X)\bar{\varphi}_\alpha(x_\alpha).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Здесь $X=x_\alpha\oplus y_\alpha,\ \ S^\alpha_{r_0}$ – сфера радиуса r_0 в пространстве $R^3_{x_\alpha}$, а вектор-функция $U=(u_0,u_\alpha)$ принадлежит области определения $D(H)$ оператора H, детально описанной в работах [24–27, 36]. Отметим, что граничные условия здесь уже задаются не на сфере $S^\alpha_{r_0}$, а на пятимерных цилиндрах $\Gamma_\alpha=S^\alpha_{r_0}\times R^3_{y_\alpha}$. В работе [36] показано, что так же, как и в случае дискретного спектра во внутренних каналах [24–27], в рассматриваемой здесь ситуации дополнительных граничных условий на пересечении цилиндров Γ_α,

$\alpha = 1, 2, 3$, не возникает. Последнее означает, что построенные ниже энергозависящие взаимодействия в задаче трех тел будут носить парный характер или, иными словами, предложенная конструкция исключает трехчастичные силы.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ РЕЗОЛЬВЕНТЫ СИСТЕМЫ ТРЕХ ТЕЛ

Цель этого раздела – осуществить перенос двухчастичных энергозависящих взаимодействий $v(z)$ в трехчастичное конфигурационное пространство и показать, что резольвента $R(z) = (H - z)^{-1}$ полного гамильтониана H может быть однозначно восстановлена по одному из ее блоков, отвечающему внешнему каналу $\mathcal{F}_0^{\rm ex}$. Всюду ниже, если не оговорено особо, мы полагаем $\operatorname{Im}\sqrt{z} > 0$. Поскольку полное гильбертово пространство $\mathcal{F}$ есть прямая сумма $\mathcal{F} = \bigoplus_a \mathcal{F}_a$, $a = 0, 1, 2, 3$, пространств $\mathcal{F}_0^{\rm ex} = \mathcal{F}_a$ при $a = 0$ и $\mathcal{F}_\alpha^{\rm in} = \mathcal{F}_a$ при $a = \alpha$, резольвента $R(z)$ имеет естественную блочную структуру и может быть представлена в виде (4×4)-матрицы $R(z) = \{R_{ab}(z)\}$, $a, b = 0, 1, 2, 3$, а ее блоки $R_{ab}(z)$ в силу самосопряженности оператора H связаны соотношением $R^*_{ab}(z) = R_{ba}(\bar{z})$.

Как и в случае системы трех частиц с чисто дискретным спектром операторов, описывающих динамику во внутренних каналах, приходим к следующей замкнутой краевой задаче для компонент $R_{0b}(z)$ [36]:

$$(H_0^{\rm ex*} - zI)R_{0b}(z) = \delta_{0b}\delta(X - X'), \quad X, X' \notin \Gamma, \tag{11}$$

$$[\partial_n R_{0b}]_{\Gamma_\alpha} * = -\varphi_\alpha Q_\alpha(z)\langle R_{0b}*, \varphi_\alpha\rangle - \varphi_\alpha \delta_{\alpha b}\widehat{Q}_\alpha(z) * . \tag{12}$$

Оказывается, что, как и в двухчастичном случае, краевая задача (11), (12) может быть переформулирована в терминах зависящих от энергии z обобщенных операторов взаимодействия $V_\alpha(z)$ [24–27, 36]:

$$V_\alpha(z)u_0 = \delta_{\Gamma_\alpha}\widetilde{V}_\alpha(z)u_0, \tag{13}$$

где $\widetilde{V}_\alpha(z)\colon \mathcal{F}_0^{\rm ex} \to \mathcal{F}_0^{\rm ex}$ – интегральный оператор вида $\widetilde{V}_\alpha(z)* = -\langle Q_\alpha(z)*, \varphi_\alpha\rangle\varphi_\alpha$, а δ_{Γ_α} – дельта-функция с носителем на Γ_α. Ядро оператора $Q_\alpha(y_\alpha, y'_\alpha, z)$ описано ниже.

Введем оператор $H_\alpha = h_\alpha \otimes I_{y_\alpha} + I_\alpha \otimes (-\Delta_{y_\alpha})$, заданный на функциях (u_0, u_α) (α фиксировано), удовлетворяющих граничным условиям (10). В силу парного характера условий связи каналов (10) переменные в операторе H_α разделяются. Поэтому операторы $Q_\alpha(z)$ и $\widehat{Q}_\alpha(z)$, а следовательно, и потенциалы $V_\alpha(z)$ допускают явные представления в терминах соответствующих величин, ассоциированных с двухчастичной подсистемой. Именно ядра операторов $Q_\alpha(z)\colon L^2(R^3_{y_\alpha}) \to L^2(R^3_{y_\alpha})$ и $\widehat{Q}_\alpha(z)\colon \mathcal{F}_\alpha^{\rm in} \to L^2(R^3_{y_\alpha})$ могут быть выражены через двухчастичный интеграл Шварца $\Delta_\alpha^{\rm in}(z)$, функционал

$$\widehat{\Delta}_\alpha^{\rm in}(z) = P_{\mathcal{M}_{i\eta_\alpha}}\frac{h_\alpha^{\rm in} - i\eta_\alpha}{h_\alpha^{\rm in} - zI}$$

и ядро $r_0(y_\alpha - y'_\alpha, z)$ резольвенты $r_0(z) = (-\Delta_{y_\alpha} - z)^{-1}$ оператора Лапласа $-\Delta_{y_\alpha}$:

$$Q_\alpha(y_\alpha - y'_\alpha, z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Omega_\alpha} \Delta_\alpha^{\rm in}(\omega) r_0(y_\alpha - y'_\alpha, z - \omega)\, d\omega, \tag{14}$$

где контур Ω_α охватывает спектр оператора $h_\alpha^{\rm in}$. Для предельных значений энергии при приближении к вещественной оси получим [36], что

$$Q_\alpha(y_\alpha - y'_\alpha, E \pm i0) = \frac{1}{4\pi|y_\alpha - y'_\alpha|}\int_{-M_\alpha}^{\infty} \exp\left\{\pm i\sqrt{E-q}\,|y_\alpha - y'_\alpha|\right\}(q^2+\eta_\alpha^2)\mu'_\alpha(q)\,dq.$$

Здесь $-M_\alpha$ является порогом аннигиляции в паре α, η_α и $\mu(q)$ – соответственно числовой и функциональный параметры модельного короткодействующего (аннигиляционного и ядерного) потенциала в паре α.

Для оператора $\widehat{Q}_\alpha(z)$ справедливо аналогичное представление. Нужно лишь в формуле (14) произвести замену $\Delta_\alpha^{\rm in}(z) \to \widehat{\Delta}_\alpha^{\rm in}(z)$.

Формулы (13), (14) задают правило переноса двухчастичного энергозависящего взаимодействия $v(z)$ раздела 2 в трехчастичную задачу с сохранением парного характера $V(z)$. Последнее в нашем случае означает, что ядро $\widetilde{V}_\alpha(z)$ в силу (14) является трансляционно-инвариантным по переменной y_α.

Так же как и в случае внутренних каналов с дискретным спектром [24–27], справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Резольвента $R(z) = \{R_{ab}(z)\}$ оператора H однозначно восстанавливается по матричному элементу $R_{00}(z)$.*

Таким образом, задача исследования резольвенты $R(z)$ сводится к изучению лишь одной ее компоненты $R_{00}(z)$. В силу условий (11), (12) при $b = 0$ убеждаемся в том, что квазирезольвента

$$G(z) = \left(H^{\rm ex} + \sum_\alpha V_\alpha(z) - z\right)^{-1}$$

совпадает с блоком $R_{00}(z)$ полной резольвенты $R(z) = (H-z)^{-1}$. Таким образом, из леммы 1 следует, что достаточно изучить аналитическую и асимптотическую структуры квазирезольвенты $G(z)$ и затем по ней восстановить все блоки $R_{ab}(z)$, $a, b \neq 0$.

5. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА ВО ВНЕШНЕМ КАНАЛЕ $\mathcal{H}^{\rm ex}$

Поскольку в рассматриваемой трехчастичной системе присутствует кулоновское притяжение, для ее исследования необходимо построить модифицированные уравнения Фаддеева со “срезками” [42].

Пусть $\chi_\alpha(|x_\alpha|, |y_\alpha|)$ – гладкая функция, равная единице в компакте $K_\alpha \in R^6$ и быстро стремящаяся к нулю вне K_α. Следуя [42], разобьем полную потенциальную энергию V_α в паре α на два слагаемых с помощью “срезки” χ_α:

$$V_\alpha(X) = \widehat{V}_\alpha(X) + V_\alpha^{(0)}(X), \tag{15}$$

где

$$\widehat{V}_\alpha = V_\alpha^{\rm s} + \frac{n_\alpha}{|x_\alpha|}\chi_\alpha, \qquad V_\alpha^{(0)} = \frac{n_\alpha}{|x_\alpha|}(1-\chi_\alpha). \tag{16}$$

Здесь $V_\alpha^{\rm s}$ – короткодействующее (ядерное и аннигиляционное) взаимодействие. Будем называть $\widehat{V}_\alpha$ короткодействующей частью потенциала, $V_\alpha^{(0)}$ – дальнодействующей. Подчеркнем, что $V_\alpha^{\rm s}$ в тех парных подсистемах α, где имеет место аннигиляция, есть энергозависящий обобщенный потенциал $V_\alpha(z)$, т.е. интегральный оператор с ядром (13). В других подсистемах $V_\alpha^{\rm s}$ может носить характер оператора умножения на функцию $v_\alpha^{\rm s}(x_\alpha)\otimes I_{y_\alpha}$, где $v_\alpha^{\rm s}(x_\alpha)$ – любой не зависящий от энергии нуклон-нуклонный потенциал.

Как и в [42], обозначим через $H^{\rm as}$ гамильтониан, порожденный дальнодействующими частями потенциала,

$$H^{\rm as} = -\Delta_X + \sum_\alpha V_\alpha^{(0)} = -\Delta_X + V^{(0)}, \tag{17}$$

и назовем его асимптотическим гамильтонианом.

Пусть $\widehat{H}_\alpha$ – оператор энергии, в котором учтена короткодействующая часть взаимодействия пары α,

$$\widehat{H}_\alpha = H^{\rm as} + \widehat{V}_\alpha = -\Delta_X + V_\alpha + \sum_{\beta\neq\alpha} V_\beta^{(0)}. \tag{18}$$

Изучение спектра оператора $\widehat{H}_\alpha$ может быть проведено методами работ [42, 43] с учетом специфики энергозависящих взаимодействий. Мы не будем воспроизводить соответствующее исследование [36], а лишь отметим, что, например, в наиболее интересном и сложном случае, когда индекс α соответствует паре $\bar{p}p$, непрерывный спектр оператора $\widehat{H}_\alpha$ состоит из трех типов ветвей: $[-\varepsilon_{\alpha,i},\infty)$, $[-M_\alpha,\infty)$ и $[0,\infty)$. Ветви $[-\varepsilon_{\alpha,i},\infty)$ соответствуют рассеянию связанной пары α с энергией связи $-\varepsilon_{\alpha,i}$, $i=1,2,\ldots,\infty$, на фоне дальнодействующих кулоновских частей $V_\beta^{(0)}$, отвечающих остальным парам. Для системы $\bar{p}d$ имеем $V_\beta^{(0)}\equiv 0$, $\beta\neq\alpha$, поскольку третья частица является незаряженной. Значения $-\varepsilon_{\alpha,i}$ соответствуют вырожденным точкам дискретного спектра кулоновского оператора, оставшимся на вещественной оси после исключения дополнительного канала рассеяния (канала аннигиляции) [36]. Ветвь $[-M_\alpha,\infty)$ отвечает дополнительному каналу рассеяния в паре α (каналу аннигиляции). Наконец, ветвь $[0,\infty)$ может быть интерпретирована как ветвь трехчастичного развала: $\bar{p}+d\to\bar{p}+p+n$.

Обозначим через $G_{\rm as}(z)$, $G_\alpha(z)$, $G(z)$ резольвенты операторов $H^{\rm as}$, H_α,

$$\widehat{H} = H^{\rm ex} + \sum_\alpha V_\alpha(z),$$

соответственно, и определим модифицированные компоненты $M_{\alpha\beta}$ трехчастичной T-матрицы соотношением $M_{\alpha\beta}(z) = \widehat{V}_\alpha\delta_{\alpha\beta} - \widehat{V}_\alpha G(z)\widehat{V}_\beta$, где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера. В терминах $M_{\alpha\beta}$ введем компоненты Фаддеева $G_{\alpha\beta}(z)$ квазирезольвенты $G(z)$: $G_{\alpha\beta}(z) = -G_{\rm as}(z)M_{\alpha\beta}G_{\rm as}(z)$. Как и для трех бесструктурных заряженных частиц [42], можно показать [36], что компоненты $G_{\alpha\beta}$ подчиняются модифицированным интегральным уравнениям Фаддеева

$$G_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}\big(G_\alpha(z) - G_{\rm as}(z)\big) - G_\alpha(z)\widehat{V}_\alpha(z)\sum_{\gamma\neq\alpha} G_{\gamma\beta}(z). \tag{19}$$

Заметим, что аналитические и асимптотические свойства резольвенты $G(z)$ определяются свойствами ядер интегральных операторов $G_\alpha(z)\widehat{V}_\alpha(z)$ и свободного члена $G_\alpha(z) - G_{\rm as}(z)$.

Обозначим через $\Psi_{\alpha,i}$ волновые функции непрерывного спектра оператора $\widehat{H}$, отвечающие ветвям $[-\varepsilon_{\alpha,i},\infty)$. Функции $\Psi_{\alpha,i}(X,q_\alpha)$ описывают процессы рассеяния $(2\to 2)$ и $(2\to 3)$ связанной пары α на третьей частице, движущейся с относительным импульсом q_α. Через $\Psi_0(X,P)$ будем обозначать волновые функции, соответствующие ветви $[0,\infty)$. Этот тип функций отвечает процессам рассеяния $(3\to 3)$ и $(3\to 2)$, в которых начальные частицы не связаны и движутся с относительными импульсами $q_\alpha,\ p_\alpha$, $q_\alpha\oplus p_\alpha = P$.

Функции $\Psi_a,\ a=0,\{\alpha,i\},\ \alpha=1,2,3,\ i=1,2,\dots,N_\alpha$, удовлетворяют уравнению Шредингера во внешнем канале $\mathcal{H}^{\rm ex}$ [36]:

$$(\widehat{H}-E)\Psi_a = 0, \tag{20}$$

где $E=q_\alpha^2-\varepsilon_{\alpha,i}$ для $\Psi_{\alpha,i}(X,q_\alpha)$ или $E=P^2$ для $\Psi_0(X,P)$, N_α – число связанных состояний в паре α.

Определим компоненты Фаддеева волновой функции Ψ_a равенством

$$\Phi_\alpha^{A\,(\pm)} = -G_{\rm as}(E\pm i0)\widehat{V}_\alpha\Psi_a,$$

где $A=\{\alpha,i\},\ \alpha=1,2,3,\ i=1,2,\dots,N_\alpha$. Применив к нему слева оператор $H^{\rm as}-E$, получим однородную систему дифференциальных уравнений для компонент $\Phi_\alpha^{A\,(\pm)}$:

$$(H^{\rm as}+\widehat{V}_\alpha - E)\Phi_\alpha^{A\,(\pm)} = -\widehat{V}_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}\Phi_\beta^{A\,(\pm)}.$$

Для описания процессов рассеяния $\bar{p}+d$ следует выделить в этой однородной системе уравнений начальное состояние $\chi_\alpha^{(0)}$, отвечающее асимптотическому движению антипротона в эффективном поле дейтрона:

$$\Phi_\alpha^{A\,(\pm)} = \delta_{\beta\alpha}\chi_\beta^{(0)} + \widetilde{\Phi}_\alpha^{A\,(\pm)}. \tag{21}$$

Функция $\chi_\beta^{(0)}$ представима [36, 42] в факторизованном виде $\chi_\beta^{(0)}=\psi_d(x_\beta)\psi_c^{\rm eff}(y_\beta)$, где ψ_d – волновая функция дейтрона, а $\psi_c^{\rm eff}$ удовлетворяет двухчастичному уравнению Шредингера с эффективным кулоновским взаимодействием $n_{\beta\beta}/|y_\beta|$, где

$$n_{\beta\beta}=\sum_{\gamma\neq\beta}\frac{n_\gamma}{|s_{\gamma\beta}|},$$

$s_{\gamma\beta}$ – элемент матрицы поворота, связывающей различные якобиевы координаты в трехчастичной системе. Подставляя функцию $\Phi_\alpha^{A\,(\pm)}$ в виде (21) в однородную систему, получим неоднородную систему дифференциальных уравнений Фаддеева относительно $\widetilde{\Phi}_{\alpha}^{A^{(\pm)}}$:

$$\left(-\Delta_X + V_\alpha(E \pm i0) + \sum_{\gamma\neq\alpha} V_\gamma^{(0)}(X) - E\right)\widetilde{\Phi}_\alpha^{B^{(\pm)}} =$$
$$= -\widehat{V}_\alpha(E \pm i0)\left(\delta_{\beta\alpha}\chi_\beta^{(0)} + \sum_{\gamma\neq\alpha}\widetilde{\Phi}_\gamma^{B^{(\pm)}}\right), \qquad E = q_\alpha^2 + \varepsilon_d. \tag{22}$$

Таким образом, мы получили систему дифференциальных уравнений на компоненты волновой функции. Для постановки граничной задачи необходимо получить асимптотические граничные условия. Они будут построены ниже с помощью асимптотик ядер интегральных уравнений (19).

Отметим, что в данной работе мы интересуемся во внешнем канале лишь процессами $2 \to (2,3)$, отвечающими наличию связанного состояния во входном канале. Таким образом, нам потребуется только асимптотический вид волновых функций типа $\Psi_{\alpha i}(X, q_\alpha)$ и отвечающих им компонент Фаддеева $\Phi_\beta^{(\alpha i)}$, $\beta = 1,2,3$, $\alpha = 1,2,3$, $i = 1,\ldots,N_\alpha$.

6. СТРОЕНИЕ ЯДЕР G_α И $G_{\rm as}$ ДЛЯ СИСТЕМЫ $\bar{p}pn$

Применим описанную выше конструкцию для описания системы $\bar{p}pn$. Введем нумерацию подсистем следующим образом. Пусть индекс $\alpha = 1$ нумерует подсистему $\bar{p}n$, $\alpha = 2$ нумерует подсистему $\bar{p}p$, наконец, $\alpha = 3$ – подсистему pn. В этих обозначениях

$$\widehat{V}_1 = V_1, \qquad \widehat{V}_2 = V_2 + \frac{n}{|x_2|}\chi(x_2, y_2), \qquad \widehat{V}_3 = v_d.$$

Здесь $V_\alpha(z)$ – энергозависящие потенциалы, определенные в выражении (13), v_d – локальный потенциал, описывающий взаимодействие в системе pn.

Сформулируем результаты относительно интегральных представлений ядер резольвент G_α, $\alpha = 1,2,3$, в виде следующего утверждения.

Лемма 2. *При* $\operatorname{Im}\sqrt{z} < 0$ *ядра* G_α, $\alpha = 1,2,3$, *представимы в виде*

$$G_1(X, X', z) \approx -\frac{1}{2\pi i}\int_{-M_1}^{\infty} \frac{\exp\left\{i\sqrt{z-q}\,|y_1 - y_1'|\right\}}{4\pi|y_1 - y_1'|}\times$$
$$\times\left[\frac{g_0^+(x,x',q)}{I - \Delta_1^{\rm in\,+}(q)\langle g_0^+(q)\varphi_1,\varphi_1\rangle} - \frac{g_0^-(x,x',q)}{I - \Delta_1^{\rm in\,-}(q)\langle g_0^-(q)\varphi_1,\varphi_1\rangle}\right] dq,$$

$$
\begin{aligned}
G_2(X,X',z) = &-\frac{1}{4\pi|y_2-y_2'|}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left\{i\sqrt{z-\lambda_k}\,|y_2-y_2'|\right\}\pi_k^{(1)}(x,x')+\\
&+\frac{i}{8\pi^2|y_2-y_2'|}\int_{[-M_2;\infty)/\Lambda_0}\exp\left\{i\sqrt{z-q}\,|y_2-y_2'|\right\}\times\\
&\times\left[\frac{g_c^+(x,x',q)}{I-\Delta_2^{\mathrm{in}\,+}(q)\langle g_c^+(q)\varphi_2,\varphi_2\rangle}-\frac{g_c^-(x,x',q)}{I-\Delta_2^{\mathrm{in}\,-}(q)\langle g_c^-(q)\varphi_2,\varphi_2\rangle}\right]dq,\\
G_3(X,X',z) = &\;\psi_d(x_3)\bar{\psi}_d(x_3')g^{\mathrm{eff}}{}_c(y_3-y_3',z-\varepsilon_d)+\\
&+F_3^0(X,z)\frac{\exp\left\{i\sqrt{z}\,|X-X'|\right\}}{|X-X'|^{5/2}}\widetilde{G}_{\mathrm{as}}(X,X',z),
\end{aligned}
$$

где $g_c^{\mathrm{eff}}(y_3-y_3',z-\varepsilon_d)$ *– резольвента оператора* $h^{\mathrm{eff}}=-\Delta_{y_3}+\widetilde{v}^{\mathrm{eff}}(y_3)$, *а амплитуда* $F_3^0(X,z)$ *порождается короткодействующим взаимодействием в паре протон–нейтрон.*

Доказательство [36]. Воспользуемся для ядра G_1 старшим порядком теории возмущений по кулоновскому взаимодействия, а также малостью радиуса ядерного взаимодействия в подсистеме pn по сравнению с первым боровским радиусом в $\bar{p}p$-подсистеме для получения представления ядра G_3.

Для описания асимптотических режимов ядер G_α и G_{as} введем [42] ряд областей в трехчастичном конфигурационном пространстве, в которых поведение G_α и G_{as} различно. Пусть $\widetilde{\Omega}_\alpha(b_0)$, $\alpha=1,2,3,$ – область в R^6, где расстояние между частицами пары α ограничено некоторой постоянной, $\widetilde{\Omega}_\alpha(b_0)=\{X\colon |x_\alpha|<b_0\}$. Пусть далее $\widetilde{\Omega}_{0\alpha}(\nu')$ – область, где выполнены неравенства $b_0\leqslant|x_\alpha|<|y_\alpha|^{\nu'}$, $0<\nu'<1/2$. Через $\Omega_\alpha(\nu')$ обозначим объединение областей $\widetilde{\Omega}_\alpha(b_0)$ и $\widetilde{\Omega}_{0\alpha}(\nu')$, $\Omega_\alpha(\nu')=\widetilde{\Omega}_\alpha(b_0)\cup\widetilde{\Omega}_{0\alpha}(\nu')$. В области $\Omega_\alpha(\nu')$ расстояние между частицами пары α много меньше расстояния до третьей частицы, если $|X|\to\infty$. Пусть, наконец, $\Omega_{0\alpha}$ лежит в оставшейся части пространства R^6; здесь $|x_\alpha|>\max\{|y_\alpha|,b_0\}$. Пусть

$$\Omega_0=\bigcap_\alpha\Omega_{0\alpha}.$$

В области Ω_0 все частицы достаточно далеки одна от другой.

Асимптотики ядер G_α и G_{as} в различных областях трехчастичного конфигурационного пространства имеют вид суперпозиции трехмерных (если в соответствующей паре присутствуют связанные состояния) и шестимерных рассеянных волн. Более точно, справедлива следующая лемма.

Лемма 3 [36]. *Асимптотические выражения для ядер резольвент* G_α *и* G_{as} *имеют следующий вид*:

1. *В области* Ω_0

$$G_1(X,X',z)\underset{|X'|\to\infty}{\longrightarrow}C_zF_{01}(X,z)\frac{\exp\left\{i\sqrt{z}\,|X'|+iW_0(X')\right\}}{|X'|^{5/2}}.$$

Здесь амплитуда F_{01} *представима в виде*

$$F_{01}(X,z)=-\frac{\exp\left\{-i\langle P,X\rangle\right\}}{I-\Delta_1^{\mathrm{in}\,+}(q_0)\langle g_0(q_0)\varphi_1,\varphi_1\rangle},$$

где $|P| = \sqrt{z}$,

$$C_z = -\frac{1}{2}e^{i\pi/4}(2\pi)^{-5/2}z^{3/4},$$

а $g_0(z)$ *– резольвента оператора Лапласа. Точка стационарной фазы*

$$q_0 = z\frac{|x_1'|^2}{|X'|^2}.$$

Из-за отсутствия связанных состояний в паре $\alpha = 1$ *во всем конфигурационном пространстве асимптотика ядра* $G_1(X, X', z)$ *убывает как шестимерная сферическая волна* [6].

2. *Ядро* $G_2(X, X', z)$ *при* $|X'| \to \infty$ *в области* Ω_2 *будет иметь вид*

$$G_2(X, X', z) \underset{|X'|\to\infty}{\longrightarrow} -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{N_k-1}\bar{\phi}_m^{(k)}(x_2')F_{i2}(X, z)\frac{\exp\left\{i\sqrt{z-\lambda_k}\,|y_2'|\right\}}{4\pi|y_2'|}.$$

Здесь амплитуда $F_{i2}(X, z) = \phi_m^{(k)}(x_2)\psi_0(\sqrt{z-\lambda_k}y_2)$, $\quad i$ *– мультииндекс* $\{m, k\}$, $\psi_0(ky)$ *– собственная функция оператора Лапласа.*

Ядро $G_2(X, X', z)$ *при* $|X'| \to \infty$ *в остальных областях конфигурационного пространства будет иметь вид*

$$G_2(X, X', z) \underset{|X'|\to\infty}{\longrightarrow} C_z F_{02}(X, z)\frac{\exp\left\{i\sqrt{z}\,|X'| + iW_0(X')\right\}}{|X'|^{5/2}}.$$

Амплитуда F_{02} *представима следующим образом*:

$$F_{02}(X, z) = -\frac{\psi_c^-(x_2, q_0)}{I - \Delta_2^{\mathrm{in}+}(q_0)\langle g_c(q_0)\varphi_2, \varphi_2\rangle}\exp\left\{-i\sqrt{z-q_0}y_2\right\},$$

где

$$q_0 = z\frac{|x_2'|^2}{|X'|^2}.$$

3. *Ядро резольвенты* $G_3(X, X', E)$ *в области* Ω_3 *может быть представлено в виде*

$$G_3(X, X', E{\pm}i0) \underset{|X'|\to\infty}{\longrightarrow} \psi_d(x_3)\bar{\psi}_d(x_3')\psi_c^{\mathrm{eff}\mp}(y_3, E{-}\varepsilon_d)\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E-\varepsilon_d}y_3' \pm iW_3(y_3')\right\}}{4\pi|y_3'|},$$

где $\psi_c^{\mathrm{eff}\mp}$ *– волновые функции, отвечающие точке непрерывного спектра оператора* h^{eff}, *определенного выше.*

В остальных областях конфигурационного пространства представление для $G_3(X, X', z)$ *следующее*:

$$G_3(X, X', E \pm i0) \underset{|X'|\to\infty}{\longrightarrow} F_3^0(X, E)e^{\mp i\langle P, X\rangle}\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E}\,|X'|\right\}}{|X'|^{5/2}}\widetilde{G}_{\mathrm{as}}(X, X', E).$$

4. *Резольвента* $G_{\rm as}$ *имеет асимптотическое представление при* $|X-X'|\to\infty$ *во всем конфигурационном пространстве в виде произведения свободной функции Грина на кулоновский фазовый множитель* [43]

$$G_{\rm as}(X,X',z)=C_z\frac{\exp\{i\sqrt{z}\,|X-X'|\}}{|X-X'|^{5/2}}\widetilde{G}_{\rm as}(X,X',z),$$

где z *принадлежит комплексной плоскости* Π_0 *с разрезом* $[0,\infty)$.

Следующим этапом исследования системы уравнений (19) для компонент $G_{\alpha\beta}$ должно быть согласно общей схеме [42] изучение поведения итераций $G^{(n)}_{\alpha\beta}$, $n\geqslant 1$, ядер системы (19). Не воспроизводя громоздких вычислений $G^{(n)}_{\alpha\beta}$ вплоть до $n=8$, мы изучим здесь лишь первую итерацию ядер $G_{\alpha\beta}$ и покажем, что для изучаемых энергозависящих взаимодействий первая итерация ядер $G_{\alpha\beta}$ обладает теми же функциональными свойствами, что и для бесструктурных заряженных частиц [42], а эффект энергозависимости и нелокальности по переменной $y_\alpha\in R^3_{y_\alpha}$ операторов $V_\alpha(z)$ сказывается лишь на свойствах соответствующих амплитуд. На этом пути мы не только изучим свойства гладкости итераций $G^{(n)}_{\alpha\beta}$, но и получим явные представления для первого борновского приближения амплитуд упругого рассеяния и развала в нуклонном канале.

Построим первые итерации ядер интегральных уравнений (19) в сответствии со следующим представлением:

$$\begin{aligned}G_{13}&\sim -G_1\widehat{V}_1(G_3-G_{\rm as}),\\ G_{23}&\sim -G_2\widehat{V}_2(G_3-G_{\rm as}),\\ G_{33}&\sim -G_3\widehat{V}_3(G_{13}+G_{23}).\end{aligned}\tag{23}$$

Мы приведем лишь асимптотики итераций G_{13} и G_{23}. Асимптотика G_{33} может быть построена в рамках той же техники, что и G_{13}, G_{23}, и из-за недостатка места здесь не приводится. Вычислим ядро оператора $G_1V_1G_3$ в области конфигурационного пространства Ω_0 и перейдем к пределу $|X'|\to\infty$, а затем к пределу $|X|\to\infty$:

$$\begin{aligned}G_1V_1G_3(X,X',E\pm i0)\underset{|X|,|X'|\to\infty}{\longrightarrow}F^{3\pm}_{13}(q_0)\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E}\,|X|\pm iW_0(X)\right\}}{|X|^{5/2}}\times\\ \times\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E-\varepsilon_d}\,|y_3'|\pm iW_3(y_3')\right\}}{4\pi|y_3'|}\,\psi_d(x_3'),\end{aligned}\tag{24}$$

где $W_3(y_3')$ – кулоновская фаза [42], отвечающая эффективному кулоновскому взаимодействию антипротона с дейтроном,

$$\begin{aligned}F^{3\,\pm}_{13}(q_0)=i\frac{C_E}{4\pi^2}\sqrt{E+M_1}\mu_1'(-M_1)\frac{(M_1^2+\eta_1^2)}{\Xi_1^{\pm}(q_0)}\langle\psi_0^{\mp}(q_0),\varphi_1\rangle\langle\varphi_1,\psi_d\rangle\times\\ \times\int_{R^3}dy_1''\,\psi_0^{\mp}\left(\sqrt{E}\frac{|y_1|}{|X|},y_1''\right)\times\\ \times\int_{R^6}dX'''\,\psi_c^{\mp\,\rm eff}\big(\sqrt{E-\varepsilon_d}\,y_3'''\big)\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E+M_1}\,|y_1''-y_1'''|\right\}}{|y_1''-y_1'''|^2},\end{aligned}$$

где $\psi_c^{\mp\,\mathrm{eff}}$ – волновые функции кулоновского оператора h^{eff}. Здесь

$$\Xi_1^{\pm}(q_0) = \frac{1}{1 - \Delta_1^{\mathrm{in}\,\pm}(q_0)\langle g_0^{\pm}(q_0)\varphi_1, \varphi_1\rangle}.$$

Заметим, что интегральный множитель в представлении для амплитуды $F_{13}^{3\,\pm}(q_0)$

$$\int_{R^3} dy_1''\,\psi_0^{\mp}\left(\sqrt{E}\frac{|y_1|}{|X|}, y_1''\right)\int_{R^6} dX'''\,\psi_c^{\mp\,\mathrm{eff}}\left(\sqrt{E-\varepsilon_d}\,y_3'''\right)\times \\ \times\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E+M_1}\,|y_1''-y_1'''|\right\}}{|y_1''-y_1'''|^2} \tag{25}$$

порождается специальным “сверточным” по переменной y_α характером энергозависящего потенциала $V_\alpha(z)$. Наконец, константа

$$C_E = -\frac{1}{2}e^{i\pi/4}(2\pi)^{-3/2}E^{3/4}.$$

При отсутствии связанных состояний в паре α асимптотика ядра G_α убывает как шестимерная сферическая волна во всем пространстве.

В области Ω_1 асимптотика ядра $G_1V_1G_3(X, X', E \pm i0)$ убывает как шестимерная сферическая волна, поскольку в паре $\alpha = 1$ нет связанных состояний.

Воспользовавшись представлением для ядра G_3, найдем асимптотику ядра $G_2V_2G_3(X, X', E \pm i0)$ в области Ω_0:

$$G_2V_2G_3(X, X', E \pm i0) \underset{|X|,|X'|\to\infty}{\longrightarrow} F_{23}^{3\,\pm}(q_0)\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E}\,|X| \pm iW_0(X)\right\}}{|X|^{5/2}}\times \\ \times\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E-\varepsilon_d}\,|y_3'| \pm iW_3(y_3')\right\}}{4\pi|y_3'|}\psi_d(x_3'), \tag{26}$$

где

$$F_{23}^{3\,\pm}(q_0) = i\frac{C_E}{4\pi^2}\sqrt{E+M_2}\mu_2'(-M_2)\frac{(M_2^2+\eta_2^2)}{\Xi_2^{\pm}(q_0)}\langle\psi_c^{\mp}(q_0), \varphi_2\rangle\langle\varphi_2, \psi_d\rangle\times \\ \times\int_{R^3} dy_2''\,\psi_0^{\mp}\left(\sqrt{E}\frac{|y_2|}{|X|}, y_2''\right)\times \\ \times\int_{R^6} dX'''\,\psi_c^{\mp\,\mathrm{eff}}\left(\sqrt{E-\varepsilon_d}\,y_3'''\right)\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E+M_2}\,|y_2''-y_2'''|\right\}}{|y_2''-y_2'''|^2},$$

здесь

$$\Xi_2^{\pm}(q_0) = \frac{1}{1 - \Delta_2^{\mathrm{in}\,\pm}(q_0)\langle g_c^{\pm}(q_0)\varphi_2, \varphi_2\rangle}.$$

Заметим, что ядро G_2 имеет дискретную и непрерывную части, однако дискретная часть G_2 не вносит вклада в ядро G_2V_2, поскольку потенциал V_2 пропорционален проектору на состояния, порождающие резонансы в паре $\alpha = 2$ и ортогональные связанным состояниям [36]. Таким образом, процесс образования связанных состояний является запрещенным. Следовательно, во всем конфигурационном пространстве асимптотика ядра $G_2V_2G_3(X,X',E\pm i0)$ убывает как шестимерная сферическая волна.

Таким образом, в соответствии с представлением (23) мы вычислили первую итерацию $G^{(1)}_{\alpha\beta}$ ядер интегральных уравнений (19). На основании полученных представлений убеждаемся, что функциональные свойства первой итерации ядер для исследуемой модели не изменились по сравнению со свойствами итераций ядер для системы трех частиц с кулоновским и короткодействующим взаимодействиями, исследованной в [42]. Полученные формулы показывают, что наличие в системе модельного энергозависящего взаимодействия не влияет на скорость асимптотического убывания первой итерации ядер, а лишь порождает дополнительный множитель вида (25) в амплитуде рассеяния. Таким образом, специфика энергозависящих взаимодействий не меняет функциональных классов, в которых строятся решения интегральных уравнений Фаддеева [42]. Для получения точного утверждения мы воспользуемся теми же функциональными классами $\widehat{\mathcal{B}}_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{B}(\nu',\varepsilon')$, которые были использованы при изучении трех бесструктурных заряженных частиц [42, 43].

На основании приведенных выше асимптотик итераций ядер $G_{\alpha\beta}$ можно сформулировать [42] следующее утверждение.

Теорема 1. *Ядра операторов $G^{(n-1)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ при достаточно большом n, $n\geqslant 8$, являются ядрами класса $\widehat{\mathcal{B}}_{\alpha\beta}$. Матричные элементы $A^{(n)}_{\alpha\beta}$ n-й степени ядра интегральных уравнений* (19) *выражаются в терминах операторов $G^{(n-1)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ с помощью соотношения* [43]

$$A^{(n)}_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}(-1)^{n+1}\big(G^{(n)}_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\widehat{V}_\beta-G^{(n-1)}_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\widehat{V}_\beta\big).$$

Ядра операторов $A^{(n)}_{\alpha\beta}$ при $n\geqslant 8$ могут быть представлены в виде

$$A^{(n)}_{\alpha\beta}(X,X',z)=\int_{R^6}dX''\,\widetilde{A}^{(n)}_{\alpha\beta}(X,X'',z)\widehat{V}_\beta(X'',X').$$

Интегрирование по внутренней переменной X'' приводит к представлению

$$A^{(n)}_{\alpha\beta}(X,X',z)=\widehat{A}^{(n)}_{\alpha\beta}(X,X',z)\widehat{V}^0_\beta(X'),$$

где $\widetilde{A}^{(n)}_{\alpha\beta}$ – ядро класса $\widehat{\mathcal{B}}_{\alpha\beta}$, а функция $\widehat{V}^0_\beta(X')$ порождается ядром $\widehat{V}_\beta(X'',X')$.

На основании тех же аргументов, которые были использованы при изучении асимптотик первых итераций ядер $G_{\alpha\beta}$, можно показать [36], что ядро $\widehat{A}^{(n)}_{\alpha\beta}$, полученное с помощью свертки ядер $\widetilde{A}^{(n)}_{\alpha\beta}$ и $\widehat{V}_\beta$ по внутренней переменной, также является ядром класса $\widehat{\mathcal{B}}_{\alpha\beta}$.

С помощью теоремы 1 уравнение (19) сводится к интегральному уравнению второго рода со вполне непрерывным ядром в банаховом пространстве вектор-функций $\mathcal{B}(\nu',\varepsilon')$ [36].

7. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ И КОМПОНЕНТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА

В этом разделе на основании полученных выше результатов формулируются граничные задачи для волновых функций и их компонент Фаддеева.

Так же как и в разделе 5, функции Φ_α^0 и Φ_α^B можно отождествить с компонентами Фаддеева волновых функций $\Psi_0^{(\pm)}$ и $\Psi_B^{(\pm)}$, отвечающих процессам $3 \to (3,2)$ и $2 \to (3,2)$, соответственно.

Волновые функции записываются в виде

$$\Psi_0^{(\pm)}(X,P) = \sum_\alpha \Phi_\alpha^{0\,(\pm)}(X,P), \tag{27}$$

$$\Psi_B^{(\pm)}(X,p_B) = \sum_\alpha \Phi_\alpha^{B\,(\pm)}(X,q_B). \tag{28}$$

Следуя [42], получим компактные уравнения, которым подчиняются компоненты $\Phi_\alpha^{B\,(\pm)}$, отвечающие процессам $2 \to (2,3)$ во внешнем канале. Эти уравнения получаются из интегральных уравнений (19) для ядер $\widehat{G}_{\alpha\beta}(X,X',E \pm i0)$ после перехода к пределу $|X'| \to \infty$. Далее необходимо приравнять соответствующие асимптотические члены в левой и правой частях и затем отбросить искаженные сферические или кластерные волны. На этом пути приходим к системе интегральных уравнений

$$\begin{gathered}\Phi_\alpha^{B\,(\pm)} = \delta_{\alpha\beta} L_{Bc} - G_\alpha(E \pm i0)\widehat{V}_\alpha(E \pm i0) \sum_{\gamma \neq \alpha} \Phi_\gamma^{B\,(\pm)}, \\ B = \{\beta, i\}, \qquad \beta = 1,2,3, \qquad i = 1,\ldots,N_\beta,\end{gathered} \tag{29}$$

где L_{Bc} удовлетворяет уравнению Шредингера $(H_\beta - E)L_{Bc} = 0$.

Соответствующие неоднородные дифференциальные уравнения были получены в предыдущем разделе.

Опишем теперь, следуя [42], асимптотику компонент $\Phi_\beta^{\alpha\,(\pm)}$ в различных областях конфигурационного пространства.

Если $|X| \to \infty$, оставаясь в области Ω_α, где частицы пары α достаточно близки одна к другой, то координатная асимптотика $\Phi_\alpha^{\alpha\,(\pm)}$ содержит лишь члены, отвечающие падающим и упругорассеянным частицам. Если при этом относительная координата y_α третьей частицы не параллельна импульсу q_α, то асимптотика $\Phi_\alpha^{\alpha\,(\pm)}$ описывается формулами

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha^{\alpha\,(\pm)}(X,q_\alpha) = \psi_\alpha(x_\alpha)\Big[&\exp\left\{i(q_\alpha,y_\alpha) + iW_\alpha^{(0)}\right\}(1+o(1)) + \\ &+ F_{\alpha\alpha}(\widehat{y}_\alpha,q_\alpha)\frac{\exp\{i|q_\alpha||y_\alpha| + iW_\alpha\}}{|y_\alpha|}(1+o(1))\Big],\end{aligned}$$

где $W_\alpha^{(0)}$ и W_α – кулоновские фазы, искажающие плоскую и сферическую волны. Квадрат модуля амплитуды $F_{\alpha\alpha}$ пропорционален дифференциальному сечению абсолютно упругого рассеяния. Когда направление вектора y_α становится близким к направлению относительного импульса q_α, асимптотика $\Phi_\alpha^{\alpha(\pm)}$ становится более сложной [42].

В области Ω_0, где все частицы далеки одна от другой, асимптотика $\Phi_\beta^{\alpha(\pm)}$ описывается искаженной сферической волной

$$\Phi_\beta^{\alpha(\pm)}(X,q_\alpha)=\frac{\exp\left\{i\sqrt{E}\,|X|+iW_0\right\}}{|X|^{5/2}}\big(F_{\alpha 0}(\widehat{X},q_\alpha)+o(1)\big).$$

Наконец, если $|X|\to\infty$, оставаясь в области $\Omega_\beta,\ \beta\neq\alpha$, то асимптотика $\Phi_\beta^{\alpha(\pm)}$ определяется членами, описывающими неупругие процессы перераспределения частиц с образованием связанных пар $\beta,\ \beta\neq\alpha$:

$$\Phi_\beta^{\alpha(\pm)}(X,q_\alpha)=\psi_\beta(x_\beta)\frac{\exp\left\{i\sqrt{E_\beta}\,|y_\beta|+iW_{\beta\alpha}\right\}}{|y_\beta|}F_{\alpha\beta}(\widehat{y}_\beta,q_\alpha)(1+o(1)),$$

где $E_\beta=q_\alpha^2+\varepsilon_\alpha-\varepsilon_\beta$, а кулоновская фаза дается равенством

$$W_{\beta\alpha}=-\sum_{\gamma\neq\beta}\frac{n_\gamma}{2|s_{\gamma\beta}|\sqrt{E_\beta}}\ln 2\sqrt{E_\beta}\,|y_\beta|.$$

Квадрат модуля амплитуды $F_{\alpha\beta}$ пропорционален дифференциальному сечению реакции образования связанной пары β. Заметим, что в случае нескольких связанных состояний в паре необходимо провести суммирование по всем связанным состояниям.

Приведенные выше асимптотики отвечают процессам рассеяния $2\to(2,3)$ во внешнем канале и аннигиляции во внутренних каналах в системе $\bar{p}d$.

Присоединяя к уравнению Шредингера полученные выше асимптотики волновых функций

$$\Psi_{\alpha,i}^{(\pm)}=\sum_\beta\Phi_\beta^{\alpha,i(\pm)},$$

можно показать [36], что соответствующая граничная задача имеет единственное решение.

8. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА ВО ВНЕШНЕМ КАНАЛЕ ПОЛНОМУ УРАВНЕНИЮ ШРЕДИНГЕРА В СУММЕ КАНАЛОВ

В предыдущем разделе было показано, что граничные задачи для волновых функций $\Psi_A^{(\pm)}$ и их компонент Фаддеева $\Phi_\beta^{A(\pm)}$ однозначно разрешимы в специальных банаховых классах функций, и, в частности, было показано, что функция

$$\Psi_A^{(\pm)}=\sum_\beta\Phi_\beta^{A(\pm)}$$

удовлетворяет уравнению Шредингера во внешнем канале $\mathcal{F}^{\rm ex}$:

$$\Big(-\Delta_X+\sum_{\gamma}V_\gamma(E\pm i0)-E\Big)\Psi_A^{(\pm)}=0 \tag{30}$$

с обобщенными энергозависящими потенциалами $V_\gamma(E\pm i0)$, заданными выражениями (15).

Зная волновую функцию $\Psi_A^{(\pm)}$ системы во внешнем (нуклонном) канале, восстановим волновую функцию во внутренних (мезонных) каналах. Таким образом, мы получим полную волновую функцию системы трех заряженных частиц в сумме

$$\mathcal{F}^{\rm ex}\oplus\sum_{\alpha}\mathcal{F}_\alpha^{\rm in}$$

каналов рассеяния, что фактически и является конечной целью исследования.

Обозначив через $\Psi^{\rm ex}\equiv\Psi_A^{(\pm)}$ волновую функцию канала $\mathcal{F}^{\rm ex}$, убеждаемся в силу условий (10), что $\Psi^{\rm ex}$ удовлетворяет на поверхности Γ_α соотношениям

$$\zeta_\alpha^+(y_\alpha)=\langle\Psi^{\rm ex},\varphi_\alpha\rangle(y_\alpha)=\int_{S^\alpha_{r_0}}dx_\alpha\,\Psi^{\rm ex}(X)\bar\varphi_\alpha(x_\alpha), \tag{31}$$

$$[\partial_n\Psi^{\rm ex}]|_{\Gamma_\alpha}=-\zeta_\alpha^-(y_\alpha)\varphi_\alpha(x_\alpha), \tag{32}$$

и, кроме того, имеет место связь [24–27, 36]

$$\zeta_\alpha^-(y_\alpha)=-Q_\alpha(E\pm i0)\zeta_\alpha^+(y_\alpha). \tag{33}$$

Трактуя (31) как определение $\zeta_\alpha^+(y_\alpha)$ в терминах $\Psi^{\rm ex}$, с помощью (33) находим $\zeta_\alpha^-(y_\alpha)$. По найденным $\zeta_\alpha^\pm(y_\alpha)$ – коэффициентам разложения волновой функции $\Psi_\alpha^{\rm in}$ внутренних каналов $\mathcal{F}_\alpha^{\rm in}$ – восстанавливается дефектная часть $\zeta_\alpha^-w_\alpha^-+\zeta_\alpha^+w_\alpha^+$ волновой функции $\Psi_\alpha^{\rm in}$. Гладкая часть $\widetilde\Psi_\alpha^{\rm in}$ в представлении

$$\Psi_\alpha^{\rm in}=\widetilde\Psi_\alpha^{\rm in}+\zeta_\alpha^-w_\alpha^-+\zeta_\alpha^+w_\alpha^+ \tag{34}$$

может быть найдена на основе следующих построений.

Следуя [26], можно показать, что $\Psi^{\rm ex}\in W_2^2(R^6\backslash\Gamma)$ при $z=E\pm i0,\ \ E>-M$, где $M=\max_\alpha\{M_\alpha\}$. Следовательно, $\langle\Psi^{\rm ex},\varphi_\alpha\rangle\in W_2^2(R^3_{y_\alpha})$, и, таким образом, как ζ_α^+, так и ζ_α^- принадлежат $W_2^2(R^3_{y_\alpha})$.

Отсюда и из (34) следует, что вектор-функция $\Psi=\big(\Psi^{\rm ex},\{\Psi_\alpha^{\rm in}\}\big),\ \alpha=1,2,3$, принадлежит области определения $D(H)$ [36] полного самосопряженного оператора энергии H и удовлетворяет уравнению Шредингера в сумме каналов $\mathcal{F}^{\rm ex}\oplus\sum_\gamma\oplus\mathcal{F}_\gamma^{\rm in}$:

$$H\Psi=E\Psi. \tag{35}$$

Поскольку согласно условиям (9), (10) действие оператора H в пространстве $D(H)$ задается выражением

$$H\Psi=\begin{cases} H^{\rm ex}\Psi^{\rm ex},\\ -\Delta_{y_\alpha}\Psi_\alpha^{\rm in}+h_\alpha^{\rm in}\widetilde\Psi_\alpha^{\rm in}-\zeta_\alpha^-w_\alpha^++\zeta_\alpha^+w_\alpha^-,\end{cases} \tag{36}$$

из (35) заключаем, что $\widetilde{\Psi}_\alpha^{\rm in}$ подчиняется уравнению

$$(-\Delta_{y_\alpha}+h_\alpha^{\rm in}-E)\widetilde{\Psi}_\alpha^{\rm in}(y_\alpha)=\zeta_\alpha^-(y_\alpha)w_\alpha^+-\zeta_\alpha^+(y_\alpha)w_\alpha^- - \\ -(-\Delta_{y_\alpha}-E)\big(\zeta_\alpha^-(y_\alpha)w_\alpha^-+\zeta_\alpha^+(y_\alpha)w_\alpha^+\big). \qquad (37)$$

Окончательно из (37) находим следующее представление для гладкой части $\widetilde{\Psi}_\alpha^{\rm in}$:

$$\widetilde{\Psi}_\alpha^{\rm in}=R_\alpha^{\rm in}\{\zeta_\alpha^- w_\alpha^+-\zeta_\alpha^+ w_\alpha^+ +(\Delta_{y_\alpha}+E)(\zeta_\alpha^- w_\alpha^- +\zeta_\alpha^+ w_\alpha^+)\}, \qquad (38)$$

где резольвента $R_\alpha^{\rm in}(z)=[-\Delta_{y_\alpha}+h_\alpha^{\rm in}-z]^{-1}$ задается при $z=E\pm i0$ ядром

$$R_\alpha^{\rm in}=\frac{1}{2\pi i}\oint r_\alpha^{\rm in}(q)\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E-q}\,|y_\alpha-y'_\alpha|\right\}}{4\pi|y_\alpha-y'_\alpha|}\,dq. \qquad (39)$$

Итак, по волновой функции $\Psi^{\rm ex}$ внешнего канала восстановлена вектор-функция $\Psi=(\Psi^{\rm ex},\{\Psi_\alpha^{\rm in}\})$, $\alpha=1,2,3$, в сумме каналов и показано, что функция Ψ удовлетворяет уравнению Шредингера (35). Однозначность представления (38) для $\Psi_\alpha^{\rm in}$ может быть получена присоединением к уравнению (37) асимптотических граничных условий при $|y_\alpha|\to\infty$. Поскольку мы не учитываем вклада в асимптотику волновой функции $\Psi^{\rm ex}$ связанных состояний в парах $\alpha=1,2$, в которых имеются энергозависящие взаимодействия, то, устремляя $|y_\alpha|$ к бесконечности в выражении (31) и сохраняя ограниченными $|x_\alpha|$, получаем, что

$$\zeta_\alpha^+(y_\alpha)\underset{|y_\alpha|\to\infty}{\longrightarrow} o\big(|y_\alpha|^{-1}\big). \qquad (40)$$

Согласно соотношению (33) методом стационарной фазы из представления (14) получаем

$$\zeta_\alpha^-(y_\alpha)\underset{|y_\alpha|\to\infty}{\longrightarrow} o\big(|y_\alpha|^{-1}\big). \qquad (41)$$

Далее, применяя метод контурного интегрирования и метод стационарной фазы, из представления (39) будем иметь

$$R_\alpha^{\rm in}(y_\alpha,y'_\alpha,E\pm i0)\underset{|y_\alpha|\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}P_\alpha^{\rm in}(-M_\alpha)\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E+M_\alpha}\,|y_\alpha|\right\}}{4\pi|y_\alpha|}\psi_0^{\mp}\big(\sqrt{E+M_\alpha}y'_\alpha\big), \qquad (42)$$

здесь

$$P_\alpha^{\rm in}(q)\equiv\frac{1}{2i}\left[r_\alpha^{\rm in}(q+i0)-r_\alpha^{\rm in}(q-i0)\right],$$

$\psi_0^{\mp}$ – собственная функция оператора $-\Delta_{y_\alpha}$.

Нам потребуются следующие обозначения:

$$\widetilde{w}_\alpha^{\pm}\equiv\frac{1}{2}P_\alpha^{\rm in}(-M_\alpha)w_\alpha^{\pm},\qquad \widetilde{\zeta}_\alpha^{\pm}\equiv(-\Delta_{y_\alpha}-E)\zeta_\alpha^{\pm}.$$

В этих обозначениях согласно соотношениям (34) и (38), (39) получаем окончательно следующие асимптотические граничные условия для компонент $\Psi_\alpha^{\rm in\,\pm}$ внутренних каналов:

$$\Psi_\alpha^{\rm in\,\pm}\underset{|y_\alpha|\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E+M_\alpha}\,|y_\alpha|\right\}}{4\pi|y_\alpha|}\widehat{D}_\alpha^{\pm}(E), \qquad (43)$$

где

$$\widehat{D}^{\pm}_{\alpha}(E) = \int_{R^3} \psi_0^{\mp}\big(\sqrt{E+M_\alpha}y'_\alpha\big)\times \\ \times\left[\zeta^-_\alpha(y'_\alpha)\widetilde{w}^+_\alpha - \zeta^+_\alpha(y'_\alpha)\widetilde{w}^-_\alpha - \widetilde{\zeta}^-_\alpha(y'_\alpha)\widetilde{w}^-_\alpha - \widetilde{\zeta}^+_\alpha(y'_\alpha)\widetilde{w}^+_\alpha\right] dy'_\alpha.$$

Методами, использованными для доказательства однозначной разрешимости трехчастичного уравнения Шредингера во внешнем канале $\mathcal{F}^{\text{ex}}$, можно показать, что уравнение (37) с присоединенными граничными условиями (40), (41), (43) однозначно разрешимо в подходящем классе функций. Вместе с однозначной разрешимостью уравнения Шредингера для Ψ^{ex} это рассуждение завершит доказательство эквивалентности, анонсированной в названии данного раздела.

Благодарности. Авторы признательны Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку работы в рамках гранта № 97–01–01132.

Список литературы

[1] *Л. Д. Фаддеев.* ЖЭТФ. 1960. Т. 39. № 5. С. 1459.
[2] *Л. Д. Фаддеев.* Тр. МИАН СССР. 1963. Т. 69. С. 1.
[3] *О. А. Якубовский.* ЯФ. 1967. Т. 5. № 6. С. 1312.
[4] *А. М. Веселова.* ТМФ. 1970. Т. 3. С. 326.
[5] *А. М. Веселова.* ТМФ. 1978. Т. 35. С. 180.
[6] *С. П. Меркурьев.* ЯФ. 1976. Т. 24. С. 289.
[7] *С. П. Меркурьев.* ТМФ. 1979. Т. 38. С. 201.
[8] *H. Feshbach.* Ann. Phys. (N. Y.). 1958. V. 5. P. 357; 1962. V. 19. P. 287.
[9] *А. Лейн, Р. Томас.* Теория ядерных реакций при низких энергиях. М.: ИЛ, 1960.
[10] *К. Вильдермут, Я. Тан.* Единая теория ядра. М.: Мир, 1980.
[11] *V. E. Kuzmichev.* Nucl. Phys. A. 1984. V. 430. P. 636.
[12] *M. Orlowski.* Nucl. Phys. A. 1985. V. 440. P. 493.
[13] *E. W. Schmid.* Preprint № 13/86. Tübingen: Universität Tübingen, 1986.
[14] *F. Lenz, J. T. Londergan, E. J. Moniz, R. Rozenfelder, M. Stigl, K. Yazaki.* Ann. Phys. (N. Y.). 1986. V. 170. P. 65.
[15] *W. Glöckle.* R-matrix Approach to the Three-Body Problem. Preprint RUB-TP 11/85. Bochum: Ruhr University, 1974.
[16] *R. F. Dashen, J. B. Healy, I. J. Muzinich.* Ann.Phys. (N. Y.). 1976. V. 102. P. 1.
[17] *И. Л. Грач, Ю. С. Калашникова, И. М. Народецкий, М. Ж. Шматиков.* ЯФ. 1985. Т. 42. № 1. С. 241.
[18] *E. L. Lomon.* Nucl.Phys. A. 1985. V. 434. P. 139.
[19] *А. Н. Сафронов.* ЯФ. 1983. Т. 38. № 6. С. 1515.
[20] *Б. С. Павлов.* УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 99.
[21] *Ю. А. Куперин, К. А. Макаров, Б. С. Павлов.* ТМФ. 1985. Т. 63. С. 78.
[22] *Ю. А. Куперин, К. А. Макаров, Б. С. Павлов.* ТМФ. 1986. Т. 69. С. 100.
[23] *Ю. А. Куперин, К. А. Макаров, Ю. Б. Мельников.* ТМФ. 1988. Т. 74. С. 103.
[24] *Ю. А. Куперин, К. А. Макаров, С. П. Меркурьев, А. К. Мотовилов, Б. С. Павлов.* ТМФ. 1988. Т. 75. С. 431; Т. 76. С. 242.
[25] *Б. С. Павлов.* Мат. сборник. 1988. Т. 136. № 2. С. 163.
[26] *Yu. A. Kuperin.* Faddeev Equations for Three Composite Particles. In: Lecture Notes in Phys. V. 324. Applications of Self-Adjoint Extensions in Quantum Physics. Eds P. Exner, P. Šeba. Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1989. P. 117.
[27] *Yu. A. Kuperin, S. P. Merkuriev.* Amer. Math. Soc. Transl. 1992. V. 150. P. 141.

[28] *Yu. A. Kuperin, K. A. Makarov, S. P. Merkuriev, K. A. Motovilov, B. S. Pavlov.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 1681.
[29] *Yu. A. Kuperin, K. A. Makarov, B. S. Pavlov.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 199.
[30] *Yu. A. Kuperin, K. A. Makarov, Yu. B. Melnikov*. A resonating-group model with extended Channel Spaces. In: Lecture Notes in Phys. V. 324. Applications of Self-Adjoint Extensions in Quantum Physics. Eds P. Exner, P. Šeba. Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1989. P. 146.
[31] *Yu. A. Kuperin, A. A. Kvitsinsky, S. P. Merkuriev, E. A. Yarevsky.* Nucl. Phys. A. 1991. V. 523. P. 614.
[32] *Yu. A. Kuperin, Yu. B. Melnikov, A. K. Motovilov.* Nuovo Cimento A. 1991. V. 104. P. 299.
[33] *С. И. Виницкий, Ю. А. Куперин, А. К. Мотовилов, А. А. Сузько.* ЯФ. 1992. Т. 55. С. 444.
[34] *Yu. A. Kuperin, K. A. Makarov, B. S. Pavlov*. An exactly solvable model of a crystal with non-point atoms. In: Lecture Notes in Phys. V. 324. Applications of Self-Adjoint Extensions in Quantum Physics. Eds P. Exner, P. Šeba. Berlin, Heidelberg and New-York: Springer-Verlag, 1989. P. 267.
[35] *Yu. A. Kuperin, B. S. Pavlov*. Three particles in a lattice: a model of interaction and dynamical equations. In: Rigorous Results in Quantum Dynamics. Eds J.Dittrich, P.Exner. Singapure: World Scientific, 1991. P. 152.
[36] *С. Б. Левин.* Метод граничных условий и энергозависящие взаимодействия в задаче рассеяния и аннигиляции для $\bar{p}N$ и $\bar{p}d$ систем. Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский госуниверситет, 1998.
[37] *I. S. Shapiro.* Nucl. Phys. A. 1988. V. 478. P. 665.
[38] *О. Д. Далькаров, Д. Карбонель, К. В. Протасов.* ЯФ. 1990. Т. 52. № 6(12). С. 1670.
[39] *Yu. A. Kuperin, S. B. Levin, Yu. B. Melnikov, E. A. Yarevsky.* Few-Body Systems Suppl. 1995. V. 8. P. 462.
[40] *S. B. Levin, E. A. Yarevsky.* Hyperfine Interactions. 1996. V. 101. P. 511.
[41] *Yu. A. Kuperin, S. B. Levin, Yu. B. Melnikov, E. A. Yarevsky.* Computers Math. Applic. 1997. V. 34. № 5/6. P. 559.
[42] *С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев*. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
[43] *С. П. Меркурьев.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1978. Т. 77. С. 148.

Поступила в редакцию 25.VI.1998 г.