ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 69, № 1
октябрь, 1986

МОДЕЛЬ РЕЗОНАНСНОГО РАССЕЯНИЯ СОСТАВНЫХ ЧАСТИЦ

Куперин Ю. А., Макаров К. А., Павлов Б. С.

Методом теории расширений нерелятивистского гамильтониана с выходом в дополнительное пространство внутренних степеней свободы построена модель бинарных реакций в системе частиц, обладающих нетривиальной внутренней структурой. Модель применяется для описания адрон-адронного рассеяния при низких и промежуточных энергиях.

ВВЕДЕНИЕ

В теории рассеяния составных частиц одной из основных задач является изучение связи аналитической структуры S-матрицы с динамикой внутренних степеней свободы сталкивающихся объектов. Прямое исследование этой связи (решение соответствующей задачи многих тел) сопряжено со значительными трудностями и в редких случаях может быть доведено до конца. Наряду с «многочастичными» трудностями существуют трудности, связанные с отсутствием информации о взаимодействии составных частиц на расстояниях порядка характерных размеров этих частиц. Так, например, в задачах адрон-адронного рассеяния не существует адекватного математического описания многокварковой динамики на расстояниях порядка радиуса конфайнмента. В адрон-адронных задачах мы сталкиваемся также с проблемой «релятивизации» на малых расстояниях. Это означает, что динамика кварковых степеней свободы (для кварков легких ароматов) является релятивистской, тогда как движение в адронном канале может рассматриваться в нерелятивистском приближении. Перечисленные обстоятельства объясняют интерес к построению простых, но математически аргументированных моделей, отражающих основные черты процесса рассеяния.

В настоящей работе мы строим модель теории резонансного рассеяния частиц, обладающих нетривиальной внутренней структурой, и ограничиваемся рассмотрением бинарных процессов. Физическое содержание модели фиксируется следующими предположениями.

А. В реакции $X_\alpha+Y_\alpha\to C_{\alpha\beta}\to X_\beta+Y_\beta$, α, $\beta\in\mathscr{C}$, внутренняя структура сталкивающихся объектов проявляется лишь на относительных расстояниях порядка характерных размеров частиц и не обнаруживается в асимптотических состояниях.

Б. В канале $\alpha\in\mathscr{C}$ существует взаимодействие [1], которое на расстояниях $r_\alpha=b_\alpha$ вызывает фазовый переход, приводящий к образованию ком-

[1] Существование потенциальной энергии при этом не обязательно.

паунд-состояния $C_{\alpha\beta}$ с конечным временем жизни. При этом на расстояниях $r_\alpha<b_\alpha$ возможны два типа динамики: 1) в $C_{\alpha\beta}$ имеется примесь состояния $|X_\alpha Y_\alpha\rangle$, наследующего кластерную динамику асимптотической области ($r_\alpha>b_\alpha$); 2) с некоторой вероятностью в $C_{\alpha\beta}$ образуется новое состояние $|Nq\rangle$, обладающее дополнительными степенями свободы, не наблюдаемыми в асимптотической динамике.

В. Компаунд-состояние $C_{\alpha\beta}$ распадается в выходной канал $\beta\in\mathscr{C}$, энергия которого не совпадает, вообще говоря, с энергией входного канала.

С математической точки зрения предлагаемая модель основана на теории расширений симметричных операторов. При этом предполагается, что полная динамика, учитывающая взаимодействие внутренних и внешних степеней свободы, задается самосопряженным оператором $\mathscr{A}$ специальной структуры. Именно он действует в пространстве $\mathscr{H}=\mathscr{H}^{\mathrm{in}}\oplus\mathscr{H}^{\mathrm{ex}}$, где $\mathscr{H}^{\mathrm{ex}}$ — гильбертово пространство состояний, описывающее движение частиц без учета внутренних степеней свободы, $\mathscr{H}^{\mathrm{in}}$ — гильбертово пространство состояний, отвечающих независимой динамике по внутренним степеням свободы. Способ построения оператора $\mathscr{A}$ в пространстве $\mathscr{H}$ состоит в следующем. Пусть в пространствах $\mathscr{H}^{\mathrm{ex}}$ и $\mathscr{H}^{\mathrm{in}}$ действуют самосопряженные операторы A^{ex} и A^{in}, соответственно. Ортогональная сумма $A^{\mathrm{in}}\oplus A^{\mathrm{ex}}$ описывает тогда независимую динамику по внутренним и внешним степеням свободы. Взаимодействие между этими динамиками может быть «включено» следующим образом. Сузим операторы A^{in} в $\mathscr{H}^{\mathrm{in}}$ и A^{ex} в $\mathscr{H}^{\mathrm{ex}}$ до симметричных операторов $A_0{}^{\mathrm{in}}$ и $A_0{}^{\mathrm{ex}}$ и построим все самосопряженные расширения оператора $A_0{}^{\mathrm{in}}\oplus A_0{}^{\mathrm{ex}}$ в пространстве $\mathscr{H}$. Тогда каждое самосопряженное расширение $\mathscr{A}$ интерпретируется как полный гамильтониан, задающий «внутреннюю» и «внешнюю» динамики и взаимодействие между ними. При этом характер взаимодействия внутренних и внешних степеней свободы регулируется как способом сужения операторов A^{in} и A^{ex}, так и выбором конкретной схемы расширения.

Подчеркнем, что в предлагаемой модели пары A^{in}, $\mathscr{H}^{\mathrm{in}}$ и A^{ex}, $\mathscr{H}^{\mathrm{ex}}$ могут быть совершенно различной структуры; в частности, в качестве $\mathscr{H}^{\mathrm{ex}}$, A^{ex} могут быть взяты бесконечномерное функциональное пространство и дифференциальный оператор, тогда как в качестве $\mathscr{H}^{\mathrm{in}}$, A^{in} — конечномерное пространство и любая самосопряженная матрица в $\mathscr{H}^{\mathrm{in}}$. Подобная «свобода действий», обладая рядом преимуществ, вносит однако трудность, связанную с неплотностью области определения суженного оператора $A_0{}^{\mathrm{in}}$, действующего в $\mathscr{H}^{\mathrm{in}}$. Эту трудность, однако, легко преодолеть и более того, как показано ниже, удается «сшить» внутреннее и внешнее пространства с помощью граничных условий. Преимущество заключается в том, что на этом пути удается выписать явно матрицу рассеяния и детально изучить ее аналитические свойства. При этом оказывается, что S-матрица наследует лишь спектральные свойства и характеристики оператора A^{in} (в случае конечномерной матрицы это набор ее собственных чисел) и не зависит от конкретного выбора этого оператора. Наконец, то обстоятельство, что операторы A^{in} и A^{ex} могут быть различной природы, позволяет моделировать ситуации, в которых динамики в $\mathscr{H}^{\mathrm{in}}$ и $\mathscr{H}^{\mathrm{ex}}$ могут сильно различаться. Примером такой ситуации может служить рассеяние адронов в модели мешков [1—4]. Мы уже говорили, что в адрон-адронных столкновениях «внешняя» динамика при низких и промежуточных энергиях является нерелятивистской и описывается уравнением Шредингера, тогда как внутри составного кваркового мешка динамика предполагается существенно релятивистской и задается ортогональной суммой одночастичных операторов Дирака [5].

1. ГАМИЛЬТОНИАН ВНЕШНЕГО КАНАЛА

Рассмотрим самосопряженный оператор A^{ex}, порожденный в пространстве $\mathcal{H}^{\text{ex}}=L^2(\mathbb{R}^3;\mathcal{N}_\alpha)$ выражением

$$A^{\text{ex}}=-\Delta\otimes I+I\otimes Q. \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{N}_\alpha$ — вспомогательное гильбертово пространство, $I=\mathrm{id}_{\mathcal{N}_\alpha}$ — тождественный оператор в $\mathcal{N}_\alpha$, Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$, $Q=\mathrm{diag}\,\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{C}}$, λ_α — порог канала α, а через $\mathscr{C}$ обозначена совокупность всех каналов.

Для случая бесспиновых частиц группа $SO(3)$-симметрии компаунд-состояния, действующая в $L^2(S_2)$, индуцирует разложение

$$\mathcal{H}^{\text{ex}}=L^2(\mathbb{R}_+;\mathcal{N}_\alpha)\otimes\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\mathcal{Y}_l\Big), \tag{2}$$

$$A^{\text{ex}}=\sum_{l=0}^{\infty}\oplus A_l, \tag{3}$$

где $\mathcal{Y}_l=\overline{V\{Y_l^m\}}$, $|m|\leqslant l$, Y_l^m — сферические функции порядка l. Через A_l обозначены самосопряженные приведенные парциальные операторы, заданные в пространствах $\mathcal{H}_l^{\text{ex}}=L^2(\mathbb{R}_+;\mathcal{N}_\alpha)$ выражением

$$A_l=-\Delta_l\otimes I+I\otimes Q,$$

где $-\Delta_l=-\partial_r^2+r^{-2}l(l+1)$. Всюду ниже мы будем сохранять в разложениях (2) и (3) лишь конечное число N парциальных слагаемых и включать угловой момент l в мультииндекс α, нумерующий каналы. В процессах, идущих с сохранением четности $\mathscr{P}=(-1)^l$, индекс l фиксирован.

Чтобы реализовать два различных типа динамики в компаунд-состоянии, выделим в $\mathcal{H}^{\text{ex}}$ соответственно кластерное и внешнее подпространства $\mathcal{H}_b^{\text{ex}}$ и $\mathcal{H}_\infty^{\text{ex}}$ и построим расщепление [6] A_0^{ex} оператора A^{ex}, отвечающее точке $r=b$,

$$A_0^{\text{ex}}u=(A_b\oplus A_\infty)u,$$

$$u\in\mathscr{D}(A_0^{\text{ex}})=\{u\in\mathscr{D}(A^{\text{ex}}):u(b)=u'(b)=0\},$$

где A_b и A_∞ — операторы соответственно в пространствах $\mathcal{H}_b^{\text{ex}}=L^2((0,b);\mathcal{N})$ и $\mathcal{H}_\infty^{\text{ex}}=L^2((b,\infty);\mathcal{N})$, порожденные тем же дифференциальным выражением, что и A^{ex}. Здесь $\mathcal{N}=\mathcal{N}_\alpha\otimes\mathscr{P}_N\mathcal{H}_s$, $\mathcal{H}_s=L^2(S_2)$, $\mathscr{P}_N=\sum_{l=0}^{N}\oplus\mathscr{P}_l$, где $\mathscr{P}_l$ — ортопроектор в $\mathcal{H}_s$ на $\mathcal{Y}_l$. На областях $\mathscr{D}(A_{b,\infty})=\{u\in\mathcal{H}^{\text{ex}}_{b,\infty}:u(b)=u'(b)=0\}$ операторы $A_{b,\infty}$ симметричны с индексами дефекта (n,n), $n=\dim\mathcal{N}$.

Согласно теории Неймана (см., например, [7]) область определения оператора A_0^*, сопряженного к A_0^{ex}, представима в виде суммы дефектных подпространств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$, отвечающих какий-либо точке регулярного типа, и области определения замыкания $\mathscr{D}(\bar{A}_0^{ex})$:

(4) $$\mathscr{D}(A_0^*)=\mathscr{D}(\overline{A}_0^{ex})\dotplus\mathfrak{M}\dotplus\mathfrak{M}^*.$$

Граничная форма [8] оператора A_0^* имеет при этом вид

(5) $$\langle A_0^*u, v\rangle-\langle u, A_0^*v\rangle= =\langle\varepsilon^-(u), \varepsilon^+(v)\rangle_{\mathscr{N}}-\langle\varepsilon^+(u), \varepsilon^-(v)\rangle_{\mathscr{N}},$$

здесь

(6) $$\varepsilon^+(u)=u(b)=\begin{pmatrix}u_b\\u_\infty\end{pmatrix}(b), \quad \varepsilon^-(u)=u'(b)=\begin{pmatrix}-u_b'\\u_\infty'\end{pmatrix}(b).$$

Подпространства $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$ зависят, вообще говоря, от точки $k_0\in\mathbb{C}$, однако при всяком выборе точки $k_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ существует базис $\{g_s^\pm\}$, $s=1, 2, \ldots$ $\ldots, \dim\mathfrak{M}$, в пространстве $\mathfrak{M}\dotplus\mathfrak{M}^*$ такой, что компоненты векторов $\varepsilon^\pm$ в (5) будут совпадать с коэффициентами разложения элементов из $\mathscr{D}(A_0^*)$ по этому базису. Векторы $\varepsilon^\pm$ будем называть граничными; их компоненты однозначно определяются представлением $u\in\mathscr{D}(A_0^*)$ в виде

$$u=u_0+\sum_s \varepsilon_s^+g_s^+ + \varepsilon_s^-g_s^-, \quad u_0\in\mathscr{D}(\overline{A_0^{ex}}).$$

Все самосопряженные расширения оператора A_0^{ex} получаются из сопряженного оператора A_0^* сужением его области определения до линеала $\mathscr{D}$: $\mathscr{D}(\overline{A_0^{ex}})\subset\mathscr{D}\subset\mathscr{D}(A_0^*)$, на котором аннулируется граничная форма. Для этого, например, достаточно, чтобы граничные векторы элементов из $\mathscr{D}$ удовлетворяли соотношению

(7) $$B^{ex}\varepsilon^-=\varepsilon^+,$$

где B^{ex} — эрмитова матрица [9].

Отметим, что граничная форма (5) — это просто билинейная форма тока вероятности j^{ex}. Соотношение (7), аннулирующее граничную форму, тогда может быть интерпретировано как условие баланса в точке $r=b$ билинейных форм токов j_b^{ex} и j_∞^{ex}, отвечающих подпространствам $\mathscr{H}_b^{ex}$ и $\mathscr{H}_\infty^{ex}$, соответственно.

2. ВНУТРЕННИЙ ГАМИЛЬТОНИАН

Пусть $\mathscr{H}^{in}$ — произвольное, в частности, быть может, и конечномерное гильбертово пространство, A^{in} — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}^{in}$, $\mathfrak{N}$ — порождающее подпространство оператора A^{in}, $U=(A^{in}+i)^{-1}(A^{in}-i)$ — его преобразование Кэли, $\mathfrak{N}^*=U\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}^\perp=\mathscr{H}^{in}\ominus\mathfrak{N}$. Построим неплотно заданный симметричный оператор, являющийся сужением A^{in}, с дефектными подпространствами $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}^*$. Для этого зададим на линеале $\mathscr{D}(A_0^{in})= =(I-U)\mathfrak{N}^{*\perp}$ оператор A_0^{in} формулой

(8) $$A_0^{in}f=A^{in}f, \quad f\in\mathscr{D}(A_0^{in}).$$

Оператор A_0^{in} симметричен с дефектными подпространствами

$$\mathfrak{N}^*=\mathscr{H}^{\text{in}}\ominus(A^{\text{in}}+i)\mathscr{D}(A_0^{\text{in}}),\quad \mathfrak{N}=\mathscr{H}^{\text{in}}\ominus(A^{\text{in}}-i)\mathscr{D}(A_0^{\text{in}}).$$

Всякое расширение оператора A_0^{in} задается однозначно оператором W: $\mathfrak{N}^*\to\mathfrak{N}$, таким, что оператор $U_W=U\mathscr{P}_{\mathfrak{N}^{*\perp}}+W\mathscr{P}_{\mathfrak{N}^*}$ не имеет собственного числа $\lambda=1$. Здесь $\mathscr{P}_{\mathfrak{N}^*}(\mathscr{P}_{\mathfrak{N}^{*\perp}})$ – проектор на $\mathfrak{N}^*(\mathfrak{N}^{*\perp})$. В этом случае определен, быть может, неограниченный оператор A_W, связанный с U_W преобразованием Кэли

$$A_W=i(I-U_W)^{-1}(I+U_W),\quad U_W=(A_W+i)^{-1}(A_W-i).$$

В приложениях важно описать область определения расширения A_W. Хотя в рассматриваемом случае нельзя прямо пользоваться формулами Неймана (4), даваемое ими описание области определения остается справедливым (см. [10]). Именно пусть $\mathscr{L}_W=(I-U_W)\mathfrak{N}^*$ – подпространство в $\mathfrak{N}\dotplus\mathfrak{N}^*$, однозначно определяемое оператором W. Тогда область определения оператора A_W представима в виде

$$\mathscr{D}(A_W)=(I-U)\mathfrak{N}^{*\perp}\dotplus(I-W)\mathfrak{N}^*=\mathscr{D}(A_0^{\text{in}})\dotplus\mathscr{L}_W,$$

причем оператор A_W самосопряжен в том и только в том случае, когда W – **изометрия** $\mathfrak{N}^*$ **на** $\mathfrak{N}$.

Пусть $\{\varphi_s\}_{s=1}^n$ – ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Тогда $\{U^*\varphi_s\}_{s=1}^n$ – ортонормированный базис в $\mathfrak{N}^*$. Определим в $\mathfrak{N}\dotplus\mathfrak{N}^*$ новый базис $g_s^+={}^1/_2(U^*\varphi_s+\varphi_s)$, $g_s^-=({}^1/_2 i)(U^*\varphi_s-\varphi_s)$. Всякий элемент $f\in\mathscr{L}_W$ однозначно представим в виде

$$f=(1/2i)\sum_s\sigma_s(I-W)U^*\varphi_s=\sum_s\varepsilon_s^+g_s^++\varepsilon_s^-g_s^-, \tag{9}$$

Пусть $\hat{W}$ – матрица оператора W: $WU^*\varphi_s=\sum_t\hat{W}_{st}\varphi_t$, а $\varepsilon^\pm$, σ – векторы с компонентами $\varepsilon_s^\pm$, σ_s. Векторы $\varepsilon^\pm$ будем называть граничными векторами элемента f. Из (9) получаем уравнения для граничных векторов

$$i\varepsilon^++\varepsilon^-=\sigma,\quad i\varepsilon^+-\varepsilon^-=\hat{W}^{\text{т}}\sigma. \tag{10}$$

Граничными векторами элементов из области определения оператора A_W будем называть граничные векторы их $\mathscr{L}_W$-компоненты. Из условий (10) следует, что граничные векторы элемента $u\in\mathscr{D}(A_W)$ удовлетворяют соотношению связи

$$\varepsilon^-=i(I+\hat{W}^{\text{т}})(I-\hat{W}^{\text{т}})^{-1}\varepsilon^+=B^{\text{in}}\varepsilon^+, \tag{11}$$

где B^{in} – эрмитова матрица. Условие (11) выделяет в семействе расширений A_W самосопряженные и является аналогом «токового» соотношения (7).

3. ПОЛНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН

Рассмотрим в ортогональной сумме «внутреннего», «кластерного» и «внешнего» подпространств $\mathscr{H}^{\text{in}}\oplus\mathscr{H}_b^{\text{ex}}\oplus\mathscr{H}_\infty^{\text{ex}}$ симметричный оператор $\mathscr{A}_0=A_0^{\text{in}}\oplus\overline{A_0^{\text{ex}}}=A_0^{\text{in}}\oplus\bar{A}_b\oplus\bar{A}_\infty$. Он имеет дефектные подпространства $\mathfrak{N}\oplus\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}^*\oplus\mathfrak{M}^*$, где $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_b\oplus\mathfrak{M}_\infty$, $\mathfrak{M}^*=\mathfrak{M}_b^*\oplus\mathfrak{M}_\infty^*$. Граничные векторы элементов линеалов $\mathfrak{N}\dotplus\mathfrak{N}^*$, $\mathfrak{M}_b\dotplus\mathfrak{M}_b^*$, $\mathfrak{M}_\infty\dotplus\mathfrak{M}_\infty^*$ будем обозначать через $\varepsilon_{\text{in}}^\pm$,

$\varepsilon_b^{\pm}$, $\varepsilon_\infty^{\pm}$. Граничным вектором элемента $u\in(\mathfrak{N}\dot{+}\mathfrak{N}^*)\oplus(\mathfrak{M}_b\dot{+}\mathfrak{M}_b^*)\oplus(\mathfrak{M}_\infty\dot{+}\dot{+}\mathfrak{M}_\infty^*)=\mathfrak{D}$ назовем вектор $\varepsilon^{\pm}=(\varepsilon_{\text{in}}^{\pm}, \varepsilon_b^{\pm}, \varepsilon_\infty^{\pm})$.

Пользуясь развитым формализмом, можно описать все самосопряженные расширения оператора $\mathcal{A}_0$ (см. [9]). Мы ограничимся здесь рассмотрением лишь двух расширений $\mathcal{A}_\tau$, $\mathcal{A}_\nu$; они выделяются заданием линеала $\mathcal{L}_{\tau,\nu}\subset\mathfrak{D}$, граничные векторы которого удовлетворяют соотношениям

(12) $\qquad \tau: \varepsilon^+=\mathfrak{T}\varepsilon^-,$

где $\mathfrak{T}=\begin{pmatrix} T_i & Z^* \\ Z & T_e \end{pmatrix}$, T_i, T_e — самосопряженные матрицы, и ν: для некоторого вектора $\nu=(\nu_{\text{in}}, \nu_b, \nu_\infty)$ выполнено

(13) $\qquad \varepsilon^+\|\nu, \quad \varepsilon^-\perp\nu.$

Операторы $\mathcal{A}_\tau$, $\mathcal{A}_\nu$,

$$\mathcal{A}_{\tau,\nu}=\mathcal{A}_0-i(I|\mathfrak{N}-I|\mathfrak{N}^*+I|\mathfrak{M}-I|\mathfrak{M}^*)|\mathcal{L}_{\tau,\nu},$$

с областями определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\tau,\nu})=\mathcal{D}(A_0^{\text{in}})\oplus\mathcal{D}(\bar{A}_b)\oplus\mathcal{D}(\bar{A}_\infty)+\mathcal{L}_{\tau,\nu}$$

самосопряжены.

Расширения $\mathcal{A}_{\tau,\nu}$ будем интерпретировать как полный гамильтониан, задающий «внутреннюю» и «внешнюю» динамики, а также взаимодействие между ними. Отметим, что построенные самосопряженные расширения $\mathcal{A}_{\tau,\nu}$ выделяются условием сохранения полного тока вероятности при переходе между внутренним, кластерным и внешним подпространствами. Ниже мы также показываем, что оба семейства расширений $\mathcal{A}_{\tau,\nu}$ позволяют смоделировать размыкание каналов связи между перечисленными пространствами. При этом в пределе отсутствия связи в пространстве $\mathcal{H}^{\text{ex}}$ получается исходный оператор A^{ex}, а в пространстве $\mathcal{H}^{\text{in}}$ — оператор A^{in}. В частности, при $T_i=T_e=0$, $Z=Z^*=\alpha I$ размыкание каналов связи происходит при $\alpha\to 0$.

4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРОВ $\mathcal{A}_{\tau,\nu}$

Опишем спектральные характеристики гамильтонианов $\mathcal{A}_{\tau,\nu}$. Мы ограничимся здесь построением рассеянных волн, собственных функций дискретного спектра и S-матрицы.

Рассеянные волны, отвечающие положительным значениям спектрального параметра $\lambda>0$, определяются как решения однородного уравнения

(14) $\qquad \mathcal{A}_{\tau,\nu}\mathcal{U}=\lambda\mathcal{U}, \quad \mathcal{U}=\{u^{\text{in}}, u^{\text{ex}}\}.$

Внутренняя часть $u^{\text{in}}=u_0^{\text{in}}+\sum_s \varepsilon_s^+g_s^+ + \varepsilon_s^-g_s^-$ удовлетворяет уравнению

(15) $\qquad A^{\text{in}}u_0^{\text{in}}+\sum_s(-\varepsilon_s^+g_s^- + \varepsilon_s^-g_s^+)=\lambda u^{\text{in}}$

и дополнительным условиям связи (12) или (13). Из (13) имеем

(16) $\qquad u_0^{\text{in}}=(A^{\text{in}}-\lambda I)^{-1}\sum_s((\lambda\varepsilon_s^+-\varepsilon_s^-)g_s^+ + (\lambda\varepsilon_s^-+\varepsilon_s^+)g_s^-).$

Условие ортогональности [8, 10]

(17) $$(A^{\text{in}}-iI)u_0^{\text{in}}\perp\mathfrak{N}, \quad u_0^{\text{in}}\in\mathcal{D}(A_0^{\text{in}}),$$

налагает дополнительную связь на граничные векторы внутренней задачи

(18) $$\varepsilon_{\text{in}}^-=\Delta_{\text{in}}(\lambda)\varepsilon_{\text{in}}^+,$$

где $\Delta_{\text{in}}(\lambda)$ — матрица оператора $\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}(I+\lambda A^{\text{in}})(A^{\text{in}}-\lambda I)^{-1}\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ в базисе порождающих элементов $\{\varphi_s\}_{s=1}^n$.

Рассмотрим матричное решение $u^{\text{ex}}=(u_b, u_\infty)$ системы уравнений

(19) $$A_0{}^*u^{\text{ex}}=\lambda u^{\text{ex}}$$

такое, что

(20) $$u_\infty=f_--f_+S, \quad u_b=\Phi_0C,$$

где C, S — квадратные невырожденные матрицы, $f_\pm$ — матричное решение Йоста, определяемое асимптотикой $f_\pm=\exp\{\pm iKr\}$, $r\to\infty$; через $K=(I\lambda-Q)^{1/2}$ обозначена матрица импульсов каналов, Φ_0 — регулярное в нуле матричное решение уравнения (19). Из определения граничных элементов $\varepsilon_b^\pm$ и из (20) находим связь

(21) $$\varepsilon_b^-=\Delta_b(\lambda)\varepsilon_b^+,$$

где $\Delta_b=-\Phi_0'(b)\Phi_0^{-1}(b)$. Аналогично для $\varepsilon_\infty^\pm$ уравнение связи имеет вид

(22) $$\varepsilon_\infty^-=\Delta_\infty(\lambda)\varepsilon_\infty^+$$

с некоторой матрицей Δ_∞. Соотношения (20) и (22) позволяют выразить S-матрицу в терминах Δ_∞:

(23) $$S=-(\Delta_\infty f_+-f_+')^{-1}(f_-'-\Delta_\infty f_-),$$

где через $f_\pm$, $f_\pm'$ обозначены значения решений Йоста и их производных в точке $r=b$. Вычисление S-матрицы сводится, таким образом, к вычислению матрицы Δ_∞, которую можно выразить через известные матрицы Δ_{in}, Δ_b. Для этого достаточно воспользоваться соотношениями (12) или (13), фиксирующими самосопряженное расширение, и условиями (18) и (21). Проведем это вычисление, например, для случая ν. Для упрощения алгебраических выкладок рассмотрим частный случай (13):

(24) $$\nu_b^{-1}\varepsilon_b^+=\nu_\infty^{-1}\varepsilon_\infty^+=\nu_{\text{in}}^{-1}\varepsilon_{\text{in}}^+, \quad \nu_b\varepsilon_b^-+\nu_\infty\varepsilon_\infty^-+\nu_{\text{in}}\varepsilon_{\text{in}}^-=0,$$

где ν_{in}, ν_b, ν_∞ — заданные вещественные числа. В этом случае

(25) $$\Delta_\infty=-(-\beta^2\Delta_b+\gamma^2\Delta_{\text{in}}),$$

где $\beta^2=(\nu_b/\nu_\infty)^2$, $\gamma^2=(\nu_{\text{in}}/\nu_\infty)^2$. Случай τ рассматривается аналогично.

Для вычисления u^{in} воспользуемся выражением базисных элементов $\{g_s^\pm\}$ через порождающие элементы $\{\varphi_s\}$:

(26) $$g_s^+=(A^{\text{in}}-iI)^{-1}A^{\text{in}}\varphi_s, \quad g_s^-=(A^{\text{in}}-iI)^{-1}\varphi_s.$$

Вычисляя u_0^{in} из (16), находим выражение для внутренней функции u^{in},

(27) $$u^{\text{in}}=(A^{\text{in}}+iI)(A^{\text{in}}-\lambda I)^{-1}\sum_s\varepsilon_{s,\,\text{in}}^+\varphi_s.$$

Величины ε_{in}^+ могут быть выражены непосредственно через граничные векторы ε_∞^+ внешнего канала и в конечном счете через матрицу Δ_∞ или S-матрицу.

Аналогично подсчитывается ранее не фиксированная матрица C, $C=\Phi_0^{-1}(b)\varepsilon_b^+$, где ε_b^+ вновь выражаются в терминах Δ_∞. Тем самым дано полное описание решения задачи рассеяния (14) в случае ν; для случая τ решение получаем аналогично.

Из представления (25) следует, в частности, что параметр γ играет роль «константы связи» подпространств $\mathscr{H}^{in}$ и $\mathscr{H}_\infty^{ex}$, а параметр β — «константы связи» подпространств $\mathscr{H}_b^{ex}$ и $\mathscr{H}_\infty^{ex}$, причем

$$(28)\qquad \gamma^2+\beta^2=\nu_\infty^{-2}\|\nu\|^2-1.$$

Таким образом, полагая $\beta=0$, $\gamma\neq0$ или $\beta\neq0$, $\gamma=0$, можно «отсоединять» кластерное $\mathscr{H}_b^{ex}$ или внутреннее $\mathscr{H}^{in}$ подпространства от внешнего подпространства $\mathscr{H}_\infty^{ex}$ и регулировать динамику компаунд-состояния в соответствии с анзацем Б введения. Наконец, нормируя вектор ν: $\|\nu\|=1$ и полагая в (28) $\beta=\gamma=0$, видим, что $\nu_\infty^2=1$, т. е. рассеяние во внешнем канале в этом случае происходит без потерь, а соответствующая S-матрица отвечает столкновению твердых сфер радиуса $b/2$.

5. СТРУКТУРА S-МАТРИЦЫ

Формулы (20), (23), (25) в случае ν и аналогичные им формулы для случая τ дают формальное решение задачи о построении матрицы рассеяния, отвечающей процессам $2\to2$ для составных частиц. При этом матрица $\Delta_{in}(\lambda)$ играет в нашей модели фундаментальную роль: она содержит полную информацию о спектральных свойствах внутреннего гамильтониана A^{in}. Именно $\Delta_{in}(\lambda)$ есть интеграл Шварца меры $d\langle E_t^{A^{in}}\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle$ [8],

$$(29)\qquad \Delta_{in}^{\alpha\beta}(\lambda)=\int\frac{\lambda t+1}{t-\lambda}\,d\langle E_t^{A^{in}}\varphi_\alpha,\varphi_\beta\rangle,$$

и, таким образом, обладает следующими свойствами.

А. Всюду вне спектра оператора A^{in}

$$\Delta_{in}(\lambda)=\Delta_{in}^*(\lambda),\qquad \operatorname{Im}\lambda=0.$$

Б. $\Delta_{in}(\lambda)$ голоморфна в $\operatorname{Im}\lambda>0$ и имеет там положительную мнимую часть

$$-i(\Delta_{in}(\lambda)-\Delta_{in}^*(\lambda))>0,\qquad \operatorname{Im}\lambda>0.$$

В. Все полюсы $\Delta_{in}(\lambda)$ просты, лежат на вещественной оси и совпадают с собственными числами внутреннего гамильтониана A^{in}.

В ситуации общего положения $\Delta_{in}(\lambda)$ реально зависит от λ (не константа и не нуль).

Свойства матрицы $\Delta_{in}(\lambda)$ вместе с известными аналитическими свойствами решений Φ_0, $f_\pm$ фиксируют аналитическую структуру многоканальной S-матрицы на римановой поверхности $\mathscr{R}_\lambda^g$ энергии λ рода $g=n/2-1$ или $g=(n+1)/2-1$ в зависимости от того, является четным или нечетным число каналов n [11]. В общем случае наличие невырожденных (смещенных относительно нуля) порогов существенно усложняет аналитические свойства S-матрицы и требует специального исследования; оно будет проведено в другом месте. Здесь же мы ограничимся рассмотрением S-матрицы на римановой поверхности $k^2=\lambda$, т. е. в случае, когда имеется единственная общая граница непрерывного спектра во всех каналах, $\lambda=0$. В этом случае существует тривиальная униформизация с импульсом k, $k^2=\lambda$, в качестве униформизующей переменной. Связь $k^2=\lambda$ отображает $\mathscr{R}_\lambda^0$ на плоскость (k) и позволяет изучить S-матрицу на плоскости (k).

Из свойств $\Delta_{\text{in}}(k)$, Φ_0, $f_\pm$ следует, что

1) $I-SS^*>0$, $\operatorname{Im} k>0$;

2) S – внутренняя [12] матрица-функция переменной k, допускающая факторизацию $S=S_sS_B$, где S_s – сингулярный сомножитель, не имеющий особенностей на конечном расстоянии, S_B – произведение Бляшке – Потапова [13] (отсутствие особенностей у S_s на конечном расстоянии следует из мероморфности S). В конечномерном случае, $\dim S<\infty$, функция S всегда имеет скалярное кратное [12] (например, $\det S$) и, таким образом, сингулярный множитель $\det S$ может быть лишь вида e^{-2ikbN}. Согласно теореме Хелсона [14] сингулярный сомножитель у S отсутствует в том и только в том случае, когда скалярная функция $\det S$ есть произведение Бляшке ($\dim S<\infty$). Отсюда и из того, что $\det S_s=$ $=e^{-2ikbN}$, следует, что в ситуации общего положения условие $b=0$ необходимо и достаточно для того, чтобы матрица S была произведением Бляшке – Потапова;

3) корни S-матрицы расположены в полуплоскости $\operatorname{Im} k>0$ симметрично относительно мнимой оси и, быть может, на отрицательной мнимой оси, а полюсы – в сопряженных точках.

6. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В нашей модели S-матрица является единственной «измеряемой» величиной и содержит полную информацию об операторе A^{in}, определяющем динамику внутренней подсистемы. В связи с этим возникает вопрос о разрешимости обратной задачи – восстановлении оператора A^{in} по заданной S-матрице соответствующего класса [2)]. Не останавливаясь здесь подробно на этой задаче, наметим лишь основные моменты ее решения в случае вырожденных порогов.

Итак, пусть задана матрица-функция S, обладающая перечисленными свойствами. Выделив из S сингулярный сомножитель S_s, восстанавливаем по S_B матрицу-функцию $\Delta(\lambda)$, связанную с S_B дробно-линейным преобразованием

$$S_B=-(iK-\Delta)^{-1}(iK+\Delta) \tag{30}$$

и такую, что Δ голоморфна, ограничена в верхней полуплоскости и имеет там положительную мнимую часть. Тогда существует ограниченная, не

[2)] При фиксированной схеме самосопряженного расширения или, в частности, при фиксированных константах связи β, γ.

убывающая на вещественной оси $N\times N$-матрица-функция σ такая, что

$$(31)\qquad \Delta(\lambda)=\int\frac{t\lambda+1}{t-\lambda}\,d\sigma(t)+c,\qquad \operatorname{Im}c=0.$$

Применяя к (31) формулу обращения Рисса — Герглотца, можно восстановить матрицу-функцию $\sigma(t)$.

Обозначим через $\hat{\mathscr{H}}$ совокупность непрерывных вектор-функций $p(t)$ со значениями в $\mathbb{C}^N$ и зададим метрику

$$\langle p,q\rangle_{\hat{\mathscr{H}}}=\int\langle p(t),d\sigma(t)\,q(t)\rangle_{\mathbb{C}^N}.$$

Будем считать, что функции p и q эквивалентны, если $\langle p-q,\ p-q\rangle_{\hat{\mathscr{H}}}=0$. После факторизации по этому отношению и пополнения $\hat{\mathscr{H}}$ превращается в гильбертово пространство. Зададим в $\hat{\mathscr{H}}$ оператор $\hat{A}$ формулой $\hat{A}p(t)=tp(t)$. Общая кратность его спектра равна N, а стандартный базис в $\mathbb{C}^N$ является порождающим. Построим по оператору $\hat{A}$ оператор-функцию $\hat{\Delta}=\mathscr{P}(\hat{A}-\lambda I)^{-1}(\hat{A}\lambda+I)\mathscr{P}$, где $\mathscr{P}$ — проектор на указанное порождающее подпространство. В базисе из порождающих элементов соответствующая матрица имеет вид

$$\hat{\Delta}_{\alpha\beta}(\lambda)=\int\frac{t\lambda+1}{t-\lambda}\,d\sigma_{\alpha\beta}(t).$$

Построив по формуле (30) с помощью $\hat{\Delta}$ матрицу $\hat{S}$, убеждаемся в том, что $S_B=\hat{S}$.

Оператор $\hat{A}$ — функциональная модель самосопряженного оператора с N-кратным спектром. Следовательно, для всякой N-канальной системы с разбиением полного пространства состояний $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}^{\mathrm{in}}\oplus\mathscr{H}^{\mathrm{ex}}$ существует эквивалентная ей модель рассматриваемого типа.

7. ИЛЛЮСТРАЦИИ

Рассмотрим случай s-волнового одноканального рассеяния, интерпретируя частицы как адроны, в результате столкновения которых на расстояниях $r<b$ образуется составной кварковый мешок (СКМ) [3, 4], динамика которого в отсутствие связи с внешним и кластерным каналами задается оператором A^{in}. В этом случае матрица рассеяния S, отвечающая расширению $\mathscr{A}_\nu$, принимает вид

$$(32)\qquad S=e^{-2ikb}\,\frac{\Delta_\infty+ik}{\Delta_\infty-ik},$$

где Δ_∞ задается формулой (25). С учетом свойств А—В раздела 5 видим, что $\Delta_{\mathrm{in}}(k)$ есть P-матрица Джаффе — Лоу [1], а $\Delta_b(k)=k\operatorname{ctg}kb$ — P-матрица, отвечающая свободной динамике адронов. Поскольку мы интересуемся взаимодействием кваркового и адронного каналов, всюду ниже будем полагать $\beta=0$. Тогда из определения величин $\varepsilon_\infty^\pm$ и из (22) следует, что радиальная зависимость адрон-адронного взаимодействия имеет вид

$$(33)\qquad V^{\mathrm{ex}}=-\gamma^2\Delta_{\mathrm{in}}(\lambda)\,\delta(r-b).$$

Следовательно, в моделях со связью адронного и кваркового каналов лишь на поверхности СКМ энергетическая зависимость адрон-адронного взаимодействия не может быть произвольной: она задается согласно (33) интегралом Шварца спектральной меры внутреннего гамильтониана A^{in}. Отметим также, что в общем случае связь $\Delta_{\text{in}}(\lambda)$ со спектральной мерой $d\sigma(t) = \langle E_t^{A^{\text{in}}}\varphi, \varphi\rangle$ имеет вид

$$\Delta_{\text{in}}(\lambda) = V_0 + \lambda\delta_\infty\sigma + \int \frac{t\lambda+1}{t-\lambda}\, d\sigma, \tag{34}$$

где $\delta_\infty\sigma$ — скачок спектральной меры на бесконечности, $\delta_\infty\sigma \geqslant 0$, $V_0=\text{const}$, $\operatorname{Im} V_0=0$. Таким образом, потенциал V^{ex} может, вообще говоря, содержать член, линейно зависящий от энергии. Этот член связан с расположением спектра оператора A^{in} на бесконечности и тем самым с конфайнментом сколь угодно высоко возбужденных состояний СКМ.

В низкоэнергетическом приближении в качестве A^{in} целесообразно рассматривать конечномерный оператор с простым спектром. Пусть λ_s — его собственные числа, $\mathcal{P}_s$ — соответствующие ортогональные собственные проекторы: $A^{\text{in}} = \sum\limits_s \lambda_s \mathcal{P}_s$. Тогда из (29) следует, что

$$\Delta_{\text{in}}(\lambda) = \sum_s \frac{1+\lambda_s\lambda}{\lambda_s-\lambda}\langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi\rangle \tag{35}$$

— рациональная функция с положительной мнимой частью в $\operatorname{Im}\lambda > 0$. В рассматриваемом случае непрерывный спектр оператора $\mathcal{A}_\nu$ состоит из абсолютно непрерывной ветви $[0, \infty)$, а дискретный спектр — из конечного числа точек $\lambda=k^2$ — корней уравнения $\gamma^2\Delta_{\text{in}}(k^2) = -ik$, $\operatorname{Im} k > 0$. Соответствующие точки $k=i\varkappa$ лежат на положительной мнимой оси и совпадают с полюсами матрицы рассеяния S.

Проследим за движением собственных чисел оператора $\mathcal{A}_\nu$ и изменением его собственных функций при размыкании канала связи $(\gamma\to 0)$ между внутренней и внешней подсистемами.

Пользуясь теоремой Руше, находим, что при $\gamma\to 0$ отрицательные собственные числа $-\varkappa_s^2$ оператора $\mathcal{A}_\nu$ стремятся к собственным числам $\lambda_s = -a_s^2$ оператора A^{in}:

$$\varkappa_s - a_s \sim \gamma^2 \frac{1+\lambda_s^2}{2|\lambda_s|}\langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi\rangle.$$

Соответствующие собственные функции дискретного спектра экспоненциально убывают во внешнем канале: $u_\infty^s = e^{-\varkappa_s r}$, $r>b$. Внутренние компоненты этих функций, $u_{\text{in}}^s = (A^{\text{in}}+i)(A^{\text{in}}+\varkappa_s^2)^{-1}\gamma e^{-\varkappa_s b}\varphi$, имеют конечный предел

$$\lim_{\gamma\to 0} \gamma u_{\text{in}}^s = a_s\{(a_s^2+i)\langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi\rangle\}^{-1}\mathcal{P}_s\varphi e^{-a_s b},$$

совпадающий с истинной собственной функцией СКМ (примитивом), отвечающей собственному значению $\lambda_s = -a_s^2$.

Положительным собственным числам $\lambda_s = a_s^2$ оператора A^{in} при малых γ отвечают полюсы матрицы рассеяния, однако эти полюсы k_s лежат уже в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} k<0$, т. е. являются резонансами:

$$k_s \sim a_s - i\gamma^2 \frac{1+\lambda_s^2}{2\lambda_s} \langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi\rangle.$$

Внешняя часть u_∞^s соответствующего решения уравнения (14) оказывается растущей функцией при $r\to\infty$ и является, таким образом, резонансным состоянием, отвечающим резонансу k_s: $u_\infty^s = e^{ik_s r}$, $r>b$. Внутренняя часть резонансного состояния

$$u_{\text{in}}^s = (A^{\text{in}}+i)(A^{\text{in}}-k_s^2)^{-1}\gamma e^{ik_s b}\varphi$$

близка к соответствующей собственной функции оператора A^{in}:

$$\gamma u_{\text{in}}^s \sim -ia_s\{(a_s^2-i)\langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi\rangle\}^{-1}\mathcal{P}_s\varphi e^{ia_s b}.$$

Решение нестационарной задачи

$$i\mathcal{U}_t = \mathcal{A}_\nu \mathcal{U}, \qquad \mathcal{U} = \{u_\infty(t, r), u_{\text{in}}(t)\},$$

при начальном условии, совпадающем с резонансным состоянием $\mathcal{U}_s$: $\mathcal{A}_\nu\mathcal{U}_s = k_s^2\mathcal{U}_s$, равно $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_s e^{-ik_s^2 t}$. Запишем при малых γ выражение для внутренней и внешней частей этого решения в виде

$$u_\infty(t, r) \sim \gamma e^{ia_s^2 t} \exp\left\{-\gamma^2 \frac{1+\lambda_s^2}{\lambda_s} \langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi\rangle t\right\} e^{ik_s r},$$

$$u_{\text{in}}(t) \sim ie^{ia_s^2 t} \exp\left\{-\gamma^2 \frac{1+\lambda_s^2}{\lambda_s} \langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi\rangle t\right\} \times$$
$$\times\, a_s\{(a_s^2 - i)\langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi\rangle\}^{-1}\mathcal{P}_s\varphi e^{ia_s b}.$$

Видно, что это решение представляет собой расходящуюся затухающую во времени волну $u_\infty(t, r)$ в адронном канале и экспоненциально затухающую по времени «стоячую» волну в СКМ. Обратную величину декремента затухания

(36) $$\tau_s = \lambda_s\{\gamma^2(1+\lambda_s^2)\langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi\rangle\}^{-1}$$

следует интерпретировать как время жизни СКМ относительно распада в адронный канал.

Обсудим теперь процедуру определения параметров модели по данным рассеяния. Такими параметрами в случае расширения $\mathcal{A}_\nu$ являются эффективный радиус b СКМ, спектральная мера $\langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi\rangle$ оператора A^{in} и константа связи γ. Определение этих параметров может быть проведено по следующим наборам данных.

1. Пусть в заданном энергетическом интервале известны полюсы λ_s матрицы Δ_∞, ширины резонансов τ_s^{-1}, значение фазы $\delta = {}^1/_2 i \ln S$ при $k=0$ и длина рассеяния $a = -\frac{d}{dk}\delta\Big|_{k=0}$. Тогда, пользуясь выражением для вычетов Δ_∞-матрицы,

(37) $$\operatorname*{res}_{\lambda_s} \Delta_\infty = \gamma^2(1+\lambda_s^2)\langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi\rangle,$$

и соотношением (36), вычисляем значения вычетов в терминах известных величин λ_s, τ_s:

$$(38) \qquad \operatorname*{res}_{\lambda_s} \Delta_\infty = \lambda_s \tau_s^{-1}.$$

Параметр γ определяется из условия полноты:

$$(39) \qquad \sum_s \operatorname*{res}_{\lambda_s} \Delta_\infty (1 + \lambda_s^2) = \gamma^2 \sum_s \langle \mathcal{P}_s \varphi, \varphi \rangle = \gamma^2,$$

которое вместе с (37) позволяет восстановить спектральную меру

$$(40) \qquad \langle \mathcal{P}_s \varphi, \varphi \rangle = \operatorname*{res}_{\lambda_s} \Delta_\infty \{\gamma^2 (1 + \lambda_s^2)\}^{-1}.$$

Далее, с помощью (40) находим значение $\Delta_{\text{in}}(0)$ в терминах λ_s и $\langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi \rangle$:

$$(41) \qquad \Delta_{\text{in}}(0) = \sum_s \lambda_s^{-1} \langle \mathcal{P}_s \varphi, \varphi \rangle.$$

Из представления (32) следует равенство

$$(42) \qquad b = a e^{2i\delta(0)} - \gamma^{-2} \Delta_{\text{in}}^{-1}(0),$$

которое вместе с (41) определяет параметр b.

2. Пусть известна фаза $\delta(k)$ при $k \geqslant 0$. При фиксированном значении параметра b полюсы $\lambda_s = k_s^2$ матрицы Δ_∞ определяются как решения уравнения $S = e^{-2ikb}$, или, что то же самое, уравнения $\delta(k) = -kb + \pi s$. Полученные значения λ_s позволяют вычислить вычеты $\operatorname*{res}_{\lambda_s} \Delta_\infty$ матрицы Δ_∞, связанной с фазой δ соотношением (32), и по формулам (39)—(41) найти величины γ, $\langle \mathcal{P}_s\varphi, \varphi \rangle$, $\Delta_{\text{in}}(0)$. Подставив найденные параметры в (42), проверяем для заданного b выполнение этого равенства. Если найденные параметры удовлетворяют равенству (42), то процедура подгонки параметров закончена; в противном случае, задавая новое значение параметра b, ее следует повторять до тех пор, пока (42) не превратится в равенство с заданной точностью.

Приведенные рассуждения показывают, что информация о фазах в заданном энергетическом интервале позволяет определить все параметры модели и решить явно обратную задачу о восстановлении внутреннего гамильтониана A^{in} (точнее, его функциональной модели).

Описанная выше схема определения параметров модели позволяет, например, оценить величины констант связи γ и ширины резонансов τ_s^{-1} для ${}^1S_0$ и ${}^3S_1$-каналов в NN-рассеянии по данным фазового анализа в интервале от 0 до 1 ГэВ. Именно в ${}^1S_0$-канале $b=1{,}4$ Фм, $a=5{,}4$ Фм, $\lambda_1 = 0{,}23$ ГэВ, $\lambda_2 = 1$ ГэВ [2, 3] и таким образом, $\gamma^2 = 0{,}002$, $\tau_1^{-1} \simeq 10$ МэВ. Соответственно в ${}^3S_1$-канале $b=1{,}4$ Фм, $a=-23{,}6$ Фм, $\lambda_1=0{,}24$ ГэВ, $\lambda_2 = 1$ ГэВ [2, 3], что дает $\gamma^2=0{,}01$, $\tau_1^{-1} \simeq 50$ МэВ.

Напомним, что полученные значения ширин резонансов отвечают отсоединенному кластерному каналу, $\beta=0$. Все вычисления без труда проводятся и для ненулевых значений β. При этом в формуле (42) $\gamma^2\Delta_{\text{in}}(0)$ следует заменить на $(\gamma^2\Delta_{\text{in}}(k) - \beta^2 k \operatorname{ctg} kb)|_{k=0} = -\beta^2/b + \gamma^2 \Delta_{\text{in}}(0)$. Это приводит согласно (36) к следующему результату:

$$\tau_s^{-1} = \frac{\lambda_s^{-1} \langle \mathcal{P}_s \varphi, \varphi \rangle (1 + \lambda_s^2)}{\Delta_{\text{in}}(0)} \left\{ \frac{\beta^2}{b} + \frac{1}{a-b} \right\}.$$

Отсюда видно, что учет кластерного канала приводит к появлению в τ_s^{-1} дополнительного слагаемого в фигурной скобке, отвечающего нетривиальной связи кластерного и адронного каналов, $\beta \neq 0$. Следовательно, полученные выше оценки для ширин резонансов являются минимальными — учет кластерного канала, таким образом, эффективно приводит к уширению резонансов [3)].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Описанная в работе модель теории рассеяния частиц, обладающих внутренней структурой, является математически корректной схемой изучения реакций, идущих через образование промежуточного компаунд-состояния, и может быть применена к широкому кругу физических явлений, таких как многоканальное адрон-адронное рассеяние, резонансные ядерные реакции и т. п. Преимущество модели состоит в том, что с самого начала динамика во внутреннем и внешнем каналах может быть задана с помощью гамильтонианов совершенно различной природы; при этом включение взаимодействия сводится просто к построению всех самосопряженных расширений некоторого сужения ортогональной суммы этих операторов. Такой подход дает богатый класс моделей, допускающих явное решение, поскольку исследование спектральных характеристик полного гамильтониана является, по существу, задачей линейной алгебры. При этом на алгебраическом уровне решается и обратная задача о восстановлении внутреннего гамильтониана и параметров модели по данным рассеяния. Более того, в пределе малых констант связи каналов удается явно проследить связь особенностей S-матрицы внешнего канала (расположение дискретного спектра и резонансов) с отрицательным и положительным спектрами внутреннего гамильтониана.

2. Основной объект моделей адрон-адронного рассеяния, предложенных другими авторами [1—4],— P-матрица — в нашей схеме приобретает непосредственный операторный смысл. А именно, она выражается через интеграл Шварца внутреннего оператора, а P-матричная аксиоматика Джаффе — Лоу [1] является, тем самым, простым следствием свойств интеграла Шварца. Таким образом, наша модель может, в частности, рассматриваться как математическая база моделей, предложенных в работах [1—4].

3. Хорошо известно, что в низкоэнергетической области влияние мезонных и кулоновских эффектов становится существенным. В настоящей работе мы ради простоты игнорировали это обстоятельство. Однако ясно, что модель без труда обобщается на случай наличия дополнительных (кулоновского и т. п.) взаимодействий.

Авторы признательны С. П. Меркурьеву и А. К. Мотовилову за полезные обсуждения.

[3)] Авторы благодарны рецензенту за соображения, высказанные им по поводу предложенных оценок ширин резонансов в отсутствие кластерного канала.

Литература

[1] *Jaffe R. L., Low F. E.*— Phys. Rev., 1979, *D19*, 2105–2112.
[2] *Jaffe R. L., Shatz M. P. F*-wave nucleon – nucleon scattering and the bag-model. Preprint CALT-68-775, 1980.
[3] *Simonov Yu. A.*— Phys. Lett., 1981, *107B*, 1–5.
[4] *Симонов Ю. А.*— ЯФ, 1982, *36*, в. 3, 722–731.
[5] *Chodos A., Jaffe R. L., Johnson K., Thorn C., Weisskopf V.* Chiral symmetry and the bag-model: a new starting point for nuclear physics. Preprint TH. 3368-CERN TRI-PP-82-29, 1982.
[6] *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963.
[7] *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: ЛГУ, 1980.
[8] *Павлов Б. С.*— ТМФ, 1984, *59*, № 3, 345–354.
[9] *Павлов Б. С., Фаддеев М. Д.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1983, *126*, 159–169.
[10] *Куперин Ю. А., Макаров К. А., Павлов Б. С.*— ТМФ, 1985, *63*, № 1, 78–87.
[11] *Ньютон Р.* Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969.
[12] *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
[13] *Потапов З. П.*— Тр. Моск. матем. об-ва, 1955, *4*, 125.
[14] *Helson H.* Lectures on invariant subspaces. N. Y.: Academic Press, 1964.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 1.VII.1985 г.

MODEL OF RESONANCE SCATTERING OF COMPOUND PARTICLES

Kuperin Yu. A., Makarov K. A., Pavlov B. S.

By means of theory of extensions of nonrelativistic Hamiltonian with going out into the auxiliary space of internal degrees of freedom, a model of binary reactions is constructed for the system of particles possessing nontrivial internal structure. The model is applied to the description of hadron-hadron scattering at low and intermediate energies.