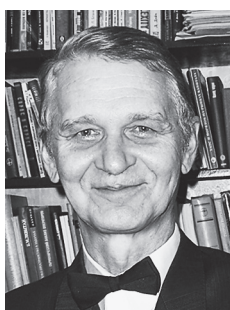


Естественнонаучный подход к экономической динамике: эконофизика, нейросетевой анализ и квантовые финансы*

Часть 2

Natural sciences approach to the economic dynamics: econophysics, neuro network analysis and quantum finance
Part 2

УДК 330.4



Ю. А. Куперин

профессор Санкт-Петербургского государственного университета, доктор физико-математических наук 198540, Санкт-Петербург, ул. Ульяновская, д. 1; e-mail: yuri.kuperin@gmail.com

Yu. A. Kuperin

198540, Saint-Petersburg, ul. Ulianovskaya, 1; e-mail: yuri.kuperin@gmail.com

В статье дан обзор основных естественнонаучных подходов, используемых эконофизиками для изучения экономической динамики. Эти подходы заимствованы в основном из таких областей математики и теоретической физики, как нелинейный анализ временных рядов, нейроинформатика, фрактальный и мультифрактальный анализ, детерминированный хаос и квантовая теория поля. В частности, в статье показано, каким образом могут быть использованы самоорганизующиеся карты Кохонена для решения задачи кластеризации портфелей DJIA и NASDAQ100. Методы теоретической эконофизики иллюстрируются применением континуального интеграла для получения точного результата: обобщение формулы Блэка—Шолза на случай стохастической волатильности.

The article gives a review of basic natural science approaches which are used by econophysicists for economic dynamics studying. These approaches in their majority are borrowed from such fields of mathematics theoretical physics as time series non-linear analysis, neuro-informatics, fractal and multi-fractal analysis, dominated chaos and quantum field theory. In particular, the article shows how self-organized charts of Kohonen can be used for the solution of DJIA and NASDAQ100 portfolios clusterization tasks. Methods of theoretical econophysics are illustrated by the implementation of continual integral for receiving precise result: generalization of Black-Shawls formula for the cases of stochastic volatility.

Ключевые слова: искусственные нейронные сети, самоорганизующиеся карты, кластеризация, европейские опционы, стохастическая волатильность, формула Блэка—Шолза, континуальный интеграл

Keywords: man-made neuro-networks, self-organizing charts, clusterization, European options, stochastic volatility, Black-Shawls formula, continual integral

* Данная статья представляет собой продолжение материалов, опубликованных в журнале «Экономика и управление» № 11, 2009 г.

3. Кластеризация портфелей DJIA и NASDAQ100 с помощью самоорганизующихся карт

В этом разделе мы приводим еще один пример из области применения искусственных нейронных сетей: решение задачи портфельной диверсификации. Более конкретно задача ставилась так: обучить специальную искусственную нейронную сеть — самоорганизующуюся сеть Кохонена, или, что то же самое, самоорганизующуюся карту — кластеризовать компании, входящие в индекс DJIA по признаку «похожести» динамики котировок акций. Помимо этого требовалось визуализировать результаты кластеризации (карты Кохонена для этого приспособлены), найти «расстояние» между компаниями и определить ошибку кластеризации. Наконец, ставилась задача проследить, как динамически меняются результаты кластеризации в зависимости от выбранного периода исторических данных по компаниям.

Кратко результаты решения всех этих задач приведены в настоящем разделе. Более детальную информацию можно найти, в частности, в [1]. О том, как методом самоорганизующихся карт (СОК) решаются другие задачи из области экономики, финансов, бизнеса, маркетинга и даже демографии, можно узнать из [2].

Исследование индекса Dow-Jones Industrial Average

Рассмотрим m временных рядов $S_i(t)$, $0 < i \leq m$, $0 < t \leq n$, представляющих, например, логарифмические приращения цен акций, входящих в индекс DJIA. Определим коэффициент корреляции между рядами S_i и S_j стандартным образом:

$$\rho_{ij} = \frac{\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle}{\sqrt{\langle S_i^2 - \langle S_i \rangle^2 \rangle - \langle S_j^2 - \langle S_j \rangle^2 \rangle}}$$

где треугольные скобки обозначают усреднение по t .

Мы исследовали недельные котировки акций входящих в индекс DJIA за периоды с 10 Jan. 94 по 27 Oct. 97 и с 10 Nov. 1997 по 27 Aug. 2001*. Этот биржевой индекс включает в себя акции 30 компаний — следовательно, количество различных коэффициентов корреляции ρ_{ij} равно $(30 \times 29)/2 = 435$. В табл. 1 представлены максимальные и минимальные значения ρ_{ij} за каждый исследуемый период. Наибольший коэффициент корреляции за период с 10 Jan. 94 по 27 Oct. 97 соответствует компаниям «JP Morgan Chase» и «American Express», а с 10 Nov. 1997 по 27 Aug. 2001 —

* Данные взяты с сайта finance.yahoo.com.

Максимальные и минимальные значения коэффициентов корреляции компаний из индекса DJIA за исследуемые периоды

Временной период	Min ρ_{ij}	Max ρ_{ij}
с 10 Jan. 94 по 27 Oct. 97	-0,04	0,61
с 10 Nov. 97 по 27 Aug. 01	-0,06	0,72

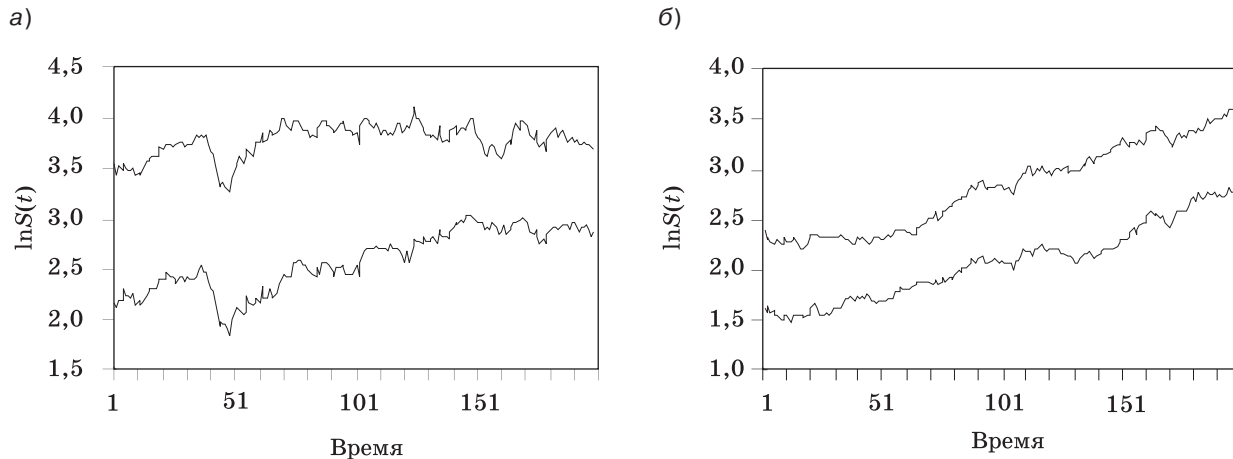


Рис. 1. а) изменение во времени $\ln S(t)$ компаний «JP Morgan Chase» (верхний график) и «American Express» (нижний график) с 10 Jan. 1994 по 27 Oct. 1997; б) изменение во времени $\ln S(t)$ компаний «JP Morgan Chase» (верхний график) и «Citigroup» (нижний график) с 10 Nov. 1997 по 27 Aug. 2001

компаниям «JP Morgan Chase» и «Citigroup». Все три компании занимаются предоставлением финансовых услуг. Соответствующие графики, дающие визуальное представление о скоррелированности логарифмов цен акций этих компаний, приведены на рис. 1.

Дополнительную информацию о поведении матрицы коэффициентов корреляции во времени можно получить, изучив эмпирическую функцию плотности распределения вероятности $P(\rho_{ij})$ полного набора 435 коэффициентов корреляции. Известно, что для большинства финансовых временных рядов $P(\rho_{ij})$ имеет форму колокола, причем среднее значение $P(\rho_{ij})$ слабо зависит от времени, тогда как среднеквадратичное отклонение почти не меняется [3].

На рис. 2 и 3 изображена кластерная структура индекса DJIA, построенная методом СОК. Все пространство компаний разделилось на группы векторов, расстояние между которыми внутри каждой группы наименьшее с учетом выбора масштаба кластеризации.

Заметим, что чем ближе кластеры по градации серого цвета, тем больше коэффициент корреляции между ценами акций компаний, принадлежащих этим кластерам, и наоборот. В табл. 2 и 3 представлены коэффициенты корреляции между акциями компаний, попавших в кластеры из левого верхнего и правого верхнего углов карты.

Приведенная выше статистика показывает, что метод СОК вполне справился с задачей классификации портфеля DJIA. Важно также отметить, что для различных исторических периодов изменяется как структура кластеров, так и само их количество. Таким образом, с помощью обученной СОК возможно построить набор карт для различных исторических периодов и создать из этого набора атлас, который будет давать представление о динамике портфеля.

4. Квантовые финансы

Под квантовыми финансами мы будем понимать применение методов квантовой теории поля для постро-

ения количественных моделей финансовой динамики. К таким методам мы относим метод континуального интеграла, теорию суперсимметрии, теорию струн и методы ренормгруппы. Данный подход к моделированию финансовой динамики завоевывает все большую популярность среди экономистов. Происходит это, наверное, потому, что ни один из перечисленных методов не является чисто математическим — все они содержат глубокие физические идеи. В этом-то и состоит залог успеха.

В данном разделе мы приводим пример применения метода континуального интеграла для оценки стоимости европейского опциона типа CALL с учетом стохастической динамики волатильности. Такой подход является обобщением известной техники Блэка—Шолза, в которой волатильность считается постоянным параметром модели. Оказывается, удастся не только представить с помощью интеграла по траекториям переходные вероятности, но и получить компактные аналитические формулы для цены опционов. Эти формулы обобщают формулу Блэка—Шолза и переходят в нее в пределе постоянной волатильности [4]. К основным результатам представленного здесь исследования можно отнести следующее: поскольку в своей основе изучаемая задача имеет нелинейность очень сильного порядка, ее удалось представить в технике функционального интегрирования в элегантном и обозримом виде; на этом пути был найден подход, позволяющий преодолеть нелинейность и получить компактный, аналитический ответ.

Отметим, что попытки применить технику функционального интеграла предпринимались и в работах других авторов [5; 6, p. 327; 7]. Например, такая техника использовалась в [5], однако вычислить окончательный ответ аналитически не удалось и все расчеты пришлось производить численно, с использованием метода Монте-Карло. То же справедливо и относительно других упомянутых работ. Ниже мы очень сжато представим основные этапы вывода обоб-

Таблица 2

Матрица корреляций для компаний, попавших в 2 самых удаленных кластера за период с 10 Jan. 94 по 27 Oct. 97

	AA	CAT	GM	HD	IP	WMT
JNJ	-0,03	0,16	0,14	0,19	0,07	0,16
MCD	0,04	0,20	0,04	0,17	0,05	0,07

Таблица 3

Матрица корреляций для компаний, попавших в два самых удаленных кластера за период с 10 Nov. 97 по 27 Aug. 01

	AA	CAT	EK	HON	IP	UTX
JNJ	0,07	0,17	0,04	-0,04	0,07	0,21
MRK	-0,01	0,14	0,02	0,13	0,10	0,25
PG	0,06	0,16	0,08	0,14	0,07	0,28

щенной формулы Блэка—Шолза. Опущенные детали и вычисления можно найти в [4].

Будем рассматривать модель рынка, в которой отсутствуют арбитражные возможности и транзакционные издержки, а также предполагается наличие безрисковой процентной ставки. В основе модели лежат стохастические дифференциальные уравнения на цену спот-актива и его волатильность. Иными словами, рынок спот-активов моделируется специаль-

ными марковскими случайными процессами. Уравнения цены спот-актива $S(t)$ и его волатильности $V(t)$ запишем в виде:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \chi S + \sigma SR,$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \mu V + \varepsilon VQ.$$

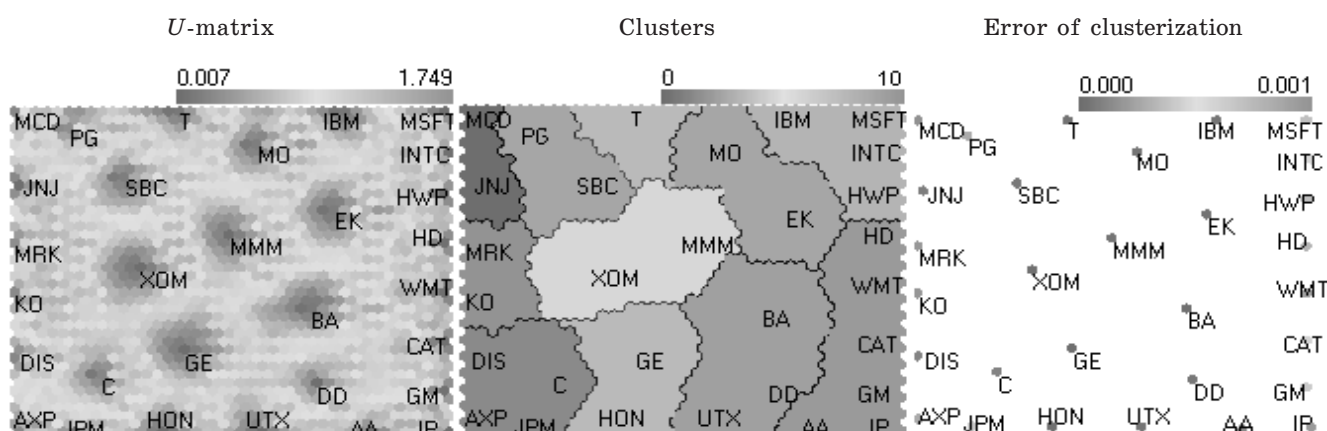


Рис. 2. Кластерная структура СОК для индекса DJIA за период с 10 Jan. 1994 по 27 Oct. 1997. Левая панель — унифицированная матрица расстояний; средняя панель — кластеризованная СОК; правая панель — матрица ошибок кластеризации

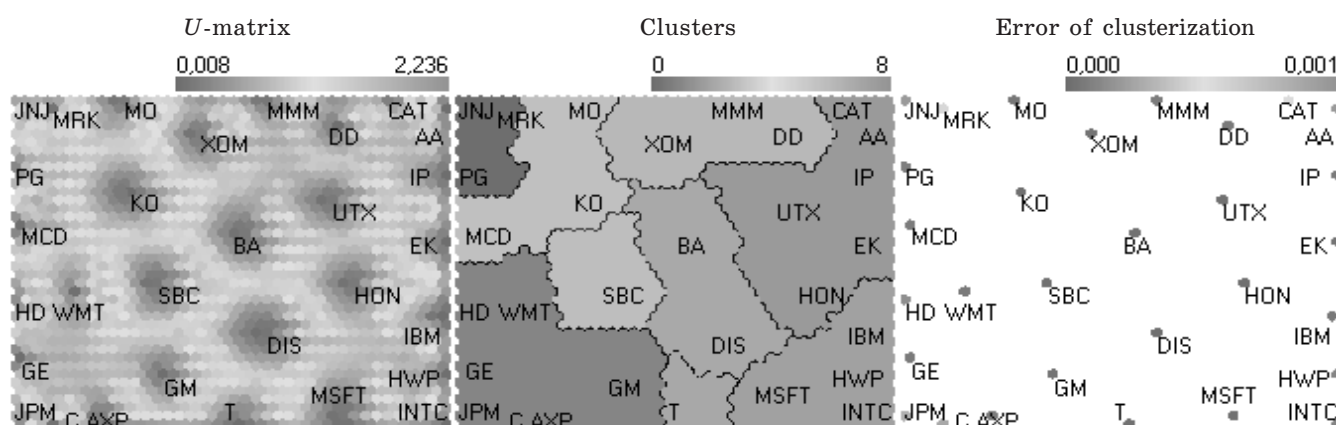


Рис. 3. Кластерная структура СОК для индекса DJIA за период с 10 Nov. 97 по 27 Aug. 01. Левая панель — унифицированная матрица расстояний; средняя панель — кластеризованная СОК; правая панель — матрица ошибок кластеризации

Здесь R и Q — коррелированные гауссовы шумы с нулевым средним и корреляторами вида:

$$\langle R_t R_{t'} \rangle = \langle Q_t Q_{t'} \rangle = \delta(t - t'),$$

$$\langle R_t Q_{t'} \rangle = \rho \delta(t - t').$$

Параметры в уравнениях имеют следующий смысл: χ и μ — параметры сноса, σ — волатильность, а ε — «волатильность волатильности». Обозначим цену европейского опциона CALL через $f(t, S(t), V(t))$. Следуя идеологии вывода оригинальной формулы Блэка—Шолза [8; 9], можно получить на цену $f(t, S(t), V(t))$ стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + 2\rho\varepsilon\sigma^3 S \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial V} + \varepsilon^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \right] -$$

$$-rf = -rS \frac{\partial f}{\partial S} - \mu\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial V}$$

— обобщающее стандартное уравнение Блэка—Шолза. Здесь r — безрисковая процентная ставка, появившаяся в уравнении при хеджировании соответствующего портфеля. Поскольку цена и квадрат волатильности положительны, удобно сделать замену переменных:

$$S = e^x, \quad -\infty < x < \infty \quad \text{и} \quad V = e^y, \quad -\infty < y < \infty.$$

Обозначим через $p(x, y, \tau | x', y')$ условную плотность вероятности того, что логарифм цены актива x и логарифм волатильности спот-актива y , фиксированные при $\tau = 0$, в текущий момент времени τ будут иметь значения x и y соответственно. Тогда цена опциона при $0 < t < T$ описывается следующими формулами:

$$f(t, x, y) = e^{-(T-t)r} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' p(x, y, T-t | x', y') g(x'),$$

$$p(x, y, T-t | x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} dy' p(x, y, T-t | x', y').$$

Условная вероятность может быть выражена через функциональный интеграл по логарифму цены и логарифму волатильности:

$$p(x, y, T-t | x', y') = \int DY \frac{\exp(L)}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)\tau\omega}}.$$

Здесь действие равно $L = L_0 + L_1$, где

$$L_0 = -\frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^\tau \left(\frac{dy}{dt} + \mu - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right)^2 dt,$$

$$L_1 = \frac{1}{2(1-\rho^2)\omega} \left[\begin{aligned} & x(T) - x(0) + r\tau - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^\tau e^{Y(t)} dt + \\ & + \frac{2\rho}{\varepsilon} \left(e^{\frac{Y(0)}{2}} - e^{\frac{Y(\tau)}{2}} \right) + \\ & + \frac{\rho}{\varepsilon} \left(\mu - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \int_0^\tau e^{\frac{Y(t)}{2}} dt \end{aligned} \right]^2.$$

Приведенный выше функциональный интеграл вычисляется по квантово-полевому обобщению метода

стационарной фазы [10]. Метод стационарной фазы проводится по параметру ε . После достаточно громоздких вычислений, которые мы опускаем из-за ограниченности объема статьи, был получен окончательный аналитический ответ:

$$f = S \exp\left(\frac{\sigma^2\omega\tau((1-\rho^2)(1+\Delta)-1)}{2}\right) N(d_1) - e^{r\tau} K N(d_2),$$

где K — страйковая цена;

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

— стандартизованное нормальное распределение, аргументы которого задаются формулами:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \sigma^2\omega \left((1-\rho^2)(1+\Delta) - \frac{1}{2} \right) \right) \tau}{\sqrt{(1-\rho^2)(1+\Delta)\sigma^2\tau\omega}},$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\omega \right) \tau}{\sqrt{(1-\rho^2)(1+\Delta)\sigma^2\tau\omega}}.$$

Через Δ обозначена величина:

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{\rho^2 \left[\frac{\varphi^2}{2\tau} + 2\varphi e^{\mu\tau/2} + 2\tau e^{\mu\tau} \right]}{(1-\rho^2)\omega\tau},$$

где φ дается формулой:

$$\varphi = \frac{4(e^{\mu\tau/2} - 1) - 2\tau\mu e^{\mu\tau/2}}{\mu}.$$

Эти зависимости и есть обобщение формулы Блэка—Шолза на случай стохастической волатильности. В случае постоянной волатильности необходимо перейти к пределам: $\mu \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Нетрудно убедиться, что при этом полученные нами соотношения переходят в формулу Блэка—Шолза.

Описание структуры данных для экспериментальной проверки

Полученные формулы тестировались на данных по опционам на индекс FTSE100. Выбирался опцион типа CALL с дневной нарезкой с сайта www.liiffe.com. Терминальное время для опциона Dec. 2004 со страйком 3200. Данные по опциону брались за три месяца «времени жизни опциона», т. е. за февраль, март, и апрель 2004 г.

Оценка точности формул и сравнение с формулой Блэка—Шолза

Процедура тестирования полученных формул и их сравнение с формулой Блэка—Шолза проводилась следующим образом. Брались данные по опционам и данные по спот-активам с некоторым «запасом», так чтобы было возможно вычислить статистически значимую историческую волатильность по данным на индекс. Далее цена опциона вычислялась по формуле Блэка—Шолза исходя из исторической волатильности. Безрисковая процентная ставка выбиралась равной 6%/год. Вычислялась также цена опциона по предложенным здесь формулам. Коэффициент

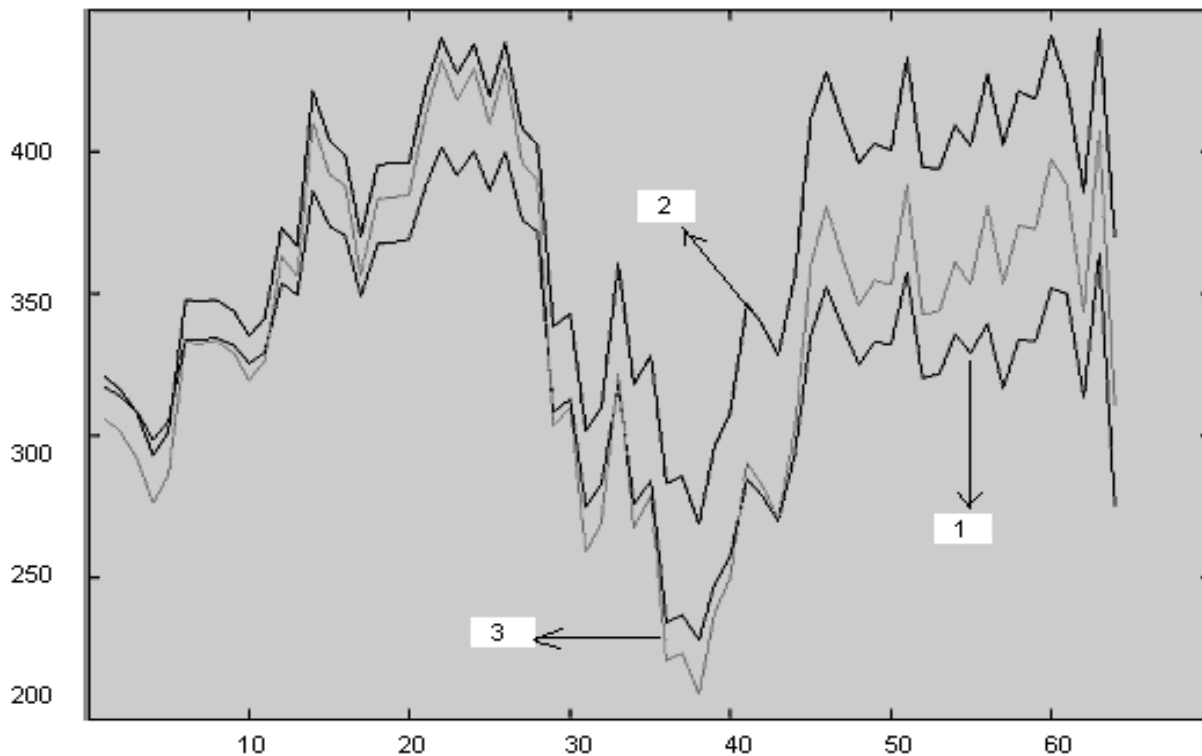


Рис. 4. Линия 1 — реальные данные по опционам; линия 2 — цена опциона, полученная на основе формулы Блэка—Шолза; линия 3 — цена опциона на основе предложенных формул.
По оси ординат отложена цена европейского опциона CALL в USD, по оси абсцисс — время в днях

корреляции между шумами выбирался равным 0,4, а значение μ — таким образом, чтобы предложенные формулы давали наилучшую аппроксимацию реальных данных. Например, при $\mu = -3$ были получены результаты, представленные на рис. 4. Визуально можно заметить, что предложенная в работе формула дает лучшую аппроксимацию, чем оригинальная формула Блэка—Шолза. Были также вычислены средние ошибки по рассматриваемой в работе выборке за три месяца. Оказалось, что средняя ошибка по оригинальной формуле Блэка—Шолза составляет 14,11%, а по предложенной нами формуле — 5,56%.

Подытожим результаты, полученные в этом разделе. Статистическая обработка показывает, что формула Блэка—Шолза дает большую погрешность, чем предложенная нами обобщенная формула. Из проведенного исследования можно сделать несколько основных заключений.

- Проблема стохастической волатильности была сведена к технике вычисления континуальных интегралов.
- Поскольку рассматриваемая в работе задача в своей основе содержит нелинейность высокого порядка, в развитом в работе формализме ее удалось представить в компактном, элегантном виде.
- Был предложен метод, который позволил «обработать» эту нелинейность и получить аналитический ответ для цены европейских опционов.

В заключение автор выражает глубокую благодарность коллегам и ученикам, принимавшим участие в исследованиях, результаты которых представлены в данной работе. Это Л. А. Дмитриева, С. В. Котелкин,

И. В. Сорока, А. А. Жеребцов, П. Б. Гольдин, Р. Р. Счастливец.

Литература

1. Жеребцов А. А., Куперин Ю. А. Применение самоорганизующихся карт Кохонена для кластеризации индексов DJIA и NASDAQ100 // Вестник СПбГУ. Сер. 8: Менеджмент. 2005. Вып. 65 (№ 8).
2. Дебок Г., Кохонен Т. Анализ финансовых данных с помощью самоорганизующихся карт / Пер. с англ. М.: АЛЬПИНА, 2001.
3. Mantegna R. N. Degree of Correlation Inside a Financial Market // Applied Nonlinear Dynamics and Stochastic Systems near the Millennium / Ed. by J. V. Kadtke, A. Bulsara. New York: AIP Press, 1997.
4. Гольдин П. Б. Аналитические результаты для оценки опционов со стохастической волатильностью: Интернатурный проект по экспериментальной программе дополнительного образования «Информационные технологии, экономическая физика и менеджмент сложных систем» (рук. Ю. А. Куперин). 2005.
5. Baaquie B. E., Kwek L. C., Srikant M. A Path Integral Approach to Option Pricing With Stochastic Volatility: Some Exact Results // arXiv: cond-mat/9708178 v1, 22 Aug 1997.
6. Heston S. A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options // The Review of Financial Studies. 1993. 6.
7. Montagna G., Nicrosini O. A Path Integral Way to Option Pricing // arXiv: cond-mat/0202143 v1, 8 p., Feb. 2002.
8. Wilmott P., Howison S., Dewynne J. The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction. Cambridge University Press, 1995.
9. Hull J. C. Options, Futures, and Other Derivatives. 3rd ed. Prentice-Hall, 1997.
10. Васильев А. Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. СПб.: Изд-во ПИЯФ, 1998.