Санкт-Петербургский государственный университет

В.И. Богатко, Е.А. Потехина

ДВУМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ЗА ФРОНТОМ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

Рекомендовано учебно-методической комиссией математико-механического факультета

Рецензенты: *д-р. физ.-мат. наук, профессор М.А. Рыдалевская (Санкт-Петербургский государственный университет),*
д-р. физ.-мат. наук, профессор И.А. Халидов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет).

Богатко В.И., Потехина Е.А.

Двумерные нестационарные автомодельные течения газа за фронтом сильной ударной волны: Учеб. пособие / В.И. Богатко, Е.А. Потехина — СПб.: СПбГУ. 2019. 31 с. Библ. 3 назв.

В настоящем учебном пособи рассматриваются автомодельные нестационарные течения газа за фронтом сильной ударной волны: особенности течния, постановка задачи, метод построения аналитического решения.

Представленное пособие может быть использовано при подготовке бакалавров и магистров по направлению «Механика и математическое моделирование», а также специальностов по направлениям «Механика», «Фундаментальная математика и механика».

Пособие предназначено для студентов и аспирантов механических отделений университетов и технических вузов.

Предисловие

Учебное пособие «Двумерные нестационарные автомодельные течения газа за фронтом сильной ударной волны» посвящено построению приближенных аналитических решений сложной нелинейной задачи о движении газа за фронтом сильной ударной волны.Задача решается в переменных Лагранжа. Для получения приближенного аналитического решения применяется метод тонкого ударного слоя. В пособии подробно излагается схема применения этого метода для решения системы уравнений, описывающей в переменных Лагранжа нестационарные автомодельные течения газа за фронтом сильной ударной волны. В качестве примера рассматривается задача о расширении эллиптического поршня

Целью настоящего учебного пособия является ознакомление студентов старших курсов с разделом газовой динамики, посвященном изучению пространственных нестационарных течений с сильными ударными волнами, а также на примере двумерных нестационарных автомодельных течений с наиболее распространенным методом построения приближенных аналитических решений — методом тонкого ударного слоя.

Материал, содержащийся в пособии, с 2015 года используется при чтении лекций по спецкурсам «Нестационарные задачи газовой динамики», «Гиперзвуковая аэродинамика» и «Прикладная газодинамика» и при проведении ряда занятий на семинаре «Метод малого параметра» для студентов математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Пособие предназначено для подготовке специалистов по направлению «Механика», «Фундаментальная математика и механика» и бакалавров и магистров по направлению «Механика и математическое моделирование». Пособие также может быть использовано для обучения студентов и аспирантов механических отделений университетов и технических вузов.

[0] *Сведения об авторах:*
Богатко Всеволод Иванович — кандидат физ.-мат. наук, доцент Санкт-Петербургского государственного университета,
Потехина Елена Александровна — кандидат физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник Санкт-Петербургского государственного университета.

Введение

Получить аналитическое решение газодинамической задачи без каких-либо упрощений или дополнительных предположений удается крайне редко из-за нелинейности системы уравнений, описывающей конкретную задачу.

Для построения приближенного аналитического решения чаще всего используют наличие какого-либо малого параметра, присутствующего в постановке задачи. Этот параметр может присутствовать как в самой нелинейной системе уравнений в частных производных, описывающей течение газа в возмущенной области, так и в граничных условиях. Он может иметь отношение к свойствам движущегося газа (слабая нестационарность потока, малая его запыленность и т.д.) и к особенностям обтекаемой границы (например, слабая искривленность обтекаемой поверхности).

В потоке совершенного газа с постоянными теплоемкостями за фронтом ударной волны отношение плотностей на поверхности разрыва выражается формулой

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1}\frac{1}{M^2 \sin^2 \beta},$$

где β — угол между наклоном ударной волны и направлением потока перед фронтом, ρ_0 — плотность газа перед фронтом ударной волны, ρ — плотность газа в возмущенной области за фронтом ударной волны, M — число Маха распространяющейся поверхности разрыва, k — показатель адиабаты.

Первое слагаемое в правой части равно $\frac{1}{6}$ при $k = 1,4$ и при уменьшении эффективного показателя адиабаты будет уменьшаться. Таким образом, при больших скоростях мы имеем два малых параметра $\varepsilon = \frac{k-1}{k+1}$ и $\hat{\varepsilon} = \frac{1}{M^2}$. Но, как показывают расчеты, второе слагаемое с ростом скорости движения летательного аппарата убывает значительно быстрее первого.

При распространении ударных волн большой интенсивности за фронтом волны происходит значительное повышение температуры. Возникающие при этом физико-химические процессы оказывают существенное влияние на параметры течения газа, а также на положение и форму фронта поверхности сильного разрыва. Поэтому при определении параметров течения газа за поверхностью разрыва необходимо учитывать реальные свойства газа, что существенно усложняет процесс построения решения задачи. Однако, как показывают расчеты, влияние реальных свойств газа на газодинамические параметры потока за фронтом ударной волны достаточно хорошо можно учесть изменением показателя адиабаты k [1]. Если под k понимать эффективный показатель адиабаты, то уравнение состояния можно взять в квазисовершенном виде и переписать соответствующим образом условия динамической совместности, считая что показатель адиабаты терпит разрыв на фронте ударной волны.

Сказанное выше наталкивает на мысль рассматривать течение за интенсивной ударной волной как своего рода пограничный слой вблизи поверхности ударной волны и использовать для расчета таких течений метод разложения решения в ряды по степеням параметра ε, равного отношению плотности газа перед ударной волной к характерному значению плотности газа за ней, и параметра $\hat{\varepsilon}$, зависящего от характерной скорости распространения поверхности сильного разрыва. Такой подход к решению задач газовой динамики с сильными ударными волнами получил название метода тонкого ударного слоя или метода Г.Г.Черного [2].

С математической точки зрения это приводит к тому, что при решении задачи в переменных Эйлера область течения в предельном случае выродится в пространство меньшего числа измерений и газодинамические параметры течения будут неоднозначными функциями координат и времени. Поэтому при построении приближенных аналитических решений задая газовой динамики с сильными ударными волнами приходится отказываться от переменных Эйлера и решать задачу в переменных Лагранжа, в которых размерность области течения сохраняется и при переходе к предельному течению такой неоднозначности не возникает.

Такая ситуация имеет место не только в задачах о распространении сильных ударных волн, когда ввиду большой сжимаемости газа во фронте ударной волны основная масса газа в возмущенной области сосредоточивается в узкой прифронтовой зоне (или слое). Это касается и задач обтекания тел, движущихся с большой сверхзвуковой скоростью. Толщина этого слоя тем меньше, чем меньше отношение плотности газа перед волной к плотности газа за волной.

Это основное предположение метода тонкого ударного слоя хорошо согласуется с имеющимися точными решениями. Так, например, при сильном взрыве согласно точному решению в значительной области вблизи центра взрыва плотность газа весьма мала: в сферическом случае при $k = 1,4$ около 80% объема возмущенной области занимает всего лишь 5% всей массы движущегося газа [3].

Таким образом, применение координат Лагранжа является характерной чертой метода тонкого ударного слоя, обусловленной самой спецификой задач газовой динамики с сильными ударными волнами. Следует отметить, что в тех немногих случаях, когда удается проинтегрировать упрощенную систему уравнений газовой динамики (в начальном приближении или для главных членов разложения) в переменных Эйлера, решение получается в параметрическом виде, а параметр по своему физическому смыслу является переменной Лагранжа, так как позволяет идентифицировать конкретную частицу газа.

Несмотря на то, что в настоящее время нет доказательства сходимости, а, следовательно, и строго математического обоснования метода тонкого ударного слоя, тем не менее хорошее совпадение аналитических расчетов по этому методу с результатами численных расчетов и с экспериментальными данными свидетельствуют о возможности использования этого метода при решении задач газовой динамики с интенсивными ударными волнами.

В рамках этого метода предполагается, что $M = \infty$, и при построении решения газодинамической задачи параметры течения в возмущенной области вблизи фронта сильной ударной волны представляются в виде рядов специального вида по степеням малого параметра, характеризующего отношение плотностей газа на фронте ударной волны.

При использовании метода Г.Г.Черного решение задачи начинается с нахождения так называемого предельного течения, которое является точным решением (его иногда называют "ньютоновским"решением) уравнений газодинамики, когда отношение плотностей газа на фронте ударной волны стремится к нулю. И чем больший вклад вносит это предельное течение в решение задачи, тем меньше членов разложения придется искать для достижения нужной точности искомого приближенного решения.

Хорошее совпадение результатов расчетов, полученных с помощью этого метода, с результатами численных расчетов и экспериментальными данными позволяет сделать вывод о возможности его применения для приближенного решения задач газовой динамики с интенсивными ударными волнами. При этом расчеты показывают, что приемлемое для практических приложений совпадение приближенных решений с точными решениями и экспериментальными данными может быть получено, если в разложении искомых функций в ряд по степеням параметра ε ограничиться первыми двумя членами.

Несмотря на большие успехи численного эксперимента в задачах газовой динамики, получение простых и достаточно точных для практических расчетов аналитических решений представляет значительный интерес. Такие решения могут иметь как самостоятельное значение, так и использоваться для оценки точности вновь разрабатываемых численных методов. Кроме того, при решении конкретной задачи их иногда полезно использовать в комбинации с численными методами для ускорения вычислительной процедуры.

Дополнительное разложение в ряд по параметру $\hat{\varepsilon}$, зависящему от характерной скорости распространения поверхности сильного разрыва, применялось для учета конечности числа Маха при решении задач с сильными ударными волнами. При этом рассматривался вариант, когда параметры ε и $\hat{\varepsilon}$ предполагались независимыми.

В то же время известно, что с ростом скорости распространения поверхности разрыва плотность газа за фронтом головной ударной волны растет, а величина эффективного показателя адиабаты уменьшается и вместе с уменьшением параметра $\hat{\varepsilon}$ уменьшается и параметр ε. Поэтому довольно естественно считать эти параметры зависимыми. При этом, как показывают расчеты параметров газа на фронте ударной волны, параметр $\hat{\varepsilon}$ стремится к нулю значительно быстрее, чем ε. В то же время из уравнения состояния следует, что параметр $\hat{\varepsilon}$ должен быть пропорционален ε. Поэтому приближенно учесть конечность некоторого характерного значения числа Маха поверхности разрыва можно положив $\hat{\varepsilon} = \varepsilon q$. Так как параметр $\hat{\varepsilon}$ с ростом скорости движения тела убывает значительно быстрее, чем ε, то естественно считать q малой величиной. Предположение о малости q соответствует таким режимам движения, при которых $(k-1)M \gg 1$.

В настоящем пособии излагается схема применения метода тонкого ударного слоя для решения системы уравнений, описывающей в переменных Лагранжа нестационарные автомодельные течения газа за фронтом сильной ударной волны. В качестве примера рассматривается задача о расширении эллиптического поршня.

1. Автомодельность и переменные Лагранжа

При классической постановке задачи в переменных Лагранжа условия задаются на некоторой поверхности $t = t_0$ ($t_0 = const$) и ищется закон движения частицы как функция координат Лагранжа и времени. Однако в задачах с поверхностью разрыва (задачи обтекания тела сверхзвуковым потоком, задачи распространения ударных волн) закон движения частицы газа не изменится до тех пор, пока она не пересечет поверхность сильного разрыва. Кроме того различные частицы пересекают поверхность разрыва в разное время, следовательно, закон движения различных частиц газа будет меняться в разное время при переходе частицы газа через поверхность ударной волны. Поэтому в четырехмерном пространстве (x, y, z, t) за переменные Лагранжа целесообразно выбирать значения параметров, характеризующих частицу, не на поверхности $t = t_0$, а на поверхности $t = \sigma$, где σ – тот момент времени, когда частица пересекает поверхность разрыва. Оставшиеся переменные будут определять положение в пространстве точки пересечения частицей газа поверхности разрыва (точки входа в ударный слой). Поэтому и условия следует ставить на ударной волне и там идентифицировать частицу, отмечая место ее входа в возмущенную область течения газа.

В задачах газовой динамики с сильными ударными волнами основная масса газа располагается вблизи фронта ударной волны.

Решение таких задач с помощью метода тонкого ударного слоя в переменных Эйлера приводит к тому, что в предельном случае (при разложении решения в ряд по малому параметру, характеризующему отношение плотностей газа на фронте ударной волны) область течения в физической плоскости вырождается в пространство меньшего числа измерений. В связи с этим при решении таких задач целесообразно использовать переменные Лагранжа, при этом объектом изучения будут служить отдельные частицы газа, сплошным образом заполняющего некоторый движущийся объем, и вырождения области течения не происходит. При этом следует отметить, что в тех немногих случаях, когда удается проинтегрировать упрощенную систему уравнений газовой динамики в переменных Эйлера, решение получается в параметрическом виде, а параметр по своему физическому смыслу является переменной Лагранжа. Таким образом подход Лагранжа соответствует физической сущности задачи.

Рассмотрим автомодельные течения газа в пространстве (t, x, y, z) (t – время, (x, y, z) – декартовы координаты) за фронтом сильной ударной волны. При этом все параметры газа являются функциями трех переменных

$$\varphi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right).$$

Выясним, как проявится автомодельность задачи при переходе от переменных Эйлера к переменным Лагранжа, в которых будем решать задачу.

Под автомодельностью течения будем понимать следующее: те частицы, у которых отношение текущего момента времени t к моменту времени входа частицы газа в ударный слой $t = \sigma$ одинаково, имеют одинаковые газодинамические параметры, а отношение их декартовых координат пропорциональны отношению времен

$$\frac{x}{x'},\ \frac{y}{y'},\ \frac{z}{z'},\ \frac{t}{\sigma}.$$

Поскольку в качестве независимой переменной фигурирует отношение времен, отсюда следует, что

$$\frac{x}{t} = \frac{x'}{\sigma},\quad \frac{y}{t} = \frac{y'}{\sigma},\quad \frac{z}{t} = \frac{z'}{\sigma}.$$

Таким образом пришли к привычному понятию автомодельности. Под $(x',\, y',\, z')$ можно понимать координаты точки входа частицы газа в возмущенную область (ударный слой).

2. Постановка задачи.

2.1. Система уравнений, описывающая течение газа в возмущенной области.

Систему уравнений, описывающую течение невязкого газа в возмущенной области за фронтом сильной ударной волны запишем сначала в **переменных Эйлера**

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{V}}{d\,t} &= -\frac{1}{R}\nabla P, \\
\frac{\partial\,R}{\partial\,t} + \operatorname{div}\left(R\,\overrightarrow{V}\right) &= 0, \\
\frac{d\,I}{d\,t} &= \frac{1}{R}\frac{d\,P}{d\,t}, \\
R &= R(I,P).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $\overrightarrow{V}$ – вектор скорости частиц газа, P – давление, R – плотность, I – энтальпия.

Рассмотрим теперь двумерные (плоские и осесимметричные) нестационварные автомодельные течения невязкого газа за фронтом сильной ударной волны, распространяющейся по закону

$$
x = N_0\,t\,f_1(s) = N_0\,t\,r(\psi)\cos\psi, \quad y = N_0\,t\,f_2(s) = N_0\,t\,r(\psi)\sin\psi, \tag{2}
$$

где N_0 – некоторая характерная скорость перемещения фронта ударной волны, s – длина дуги кривой $r = r(\psi)$, ψ – полярный угол в плоскости (x, y). Функция $r(\psi)$ подлежит определению в ходе решения задачи.

В осесимметричном случае под плоскостью (x, y) следует подразумевать меридиональную плоскость, при этом за ось симметрии принимается ось x.

При указанном законе движения ударной волны возмущенное движение газа за ее фронтом можно считать автомодельным.

Систему уравнений газовой динамики (1), описывающую такие движения газа, можно записать в безразмерном виде следующим образом

$$(v_x - \xi)\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + (v_y - \eta)\frac{\partial v_x}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi},$$

$$(v_x - \xi)\frac{\partial v_y}{\partial \xi} + (v_y - \eta)\frac{\partial v_y}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \eta},$$

$$(v_x - \xi)\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + (v_y - \eta)\frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial v_y}{\partial \eta}\right) + \nu\,\frac{\rho\, v_y}{\eta} = 0, \qquad (3)$$

$$(v_x - \xi)\frac{\partial i}{\partial \xi} + (v_y - \eta)\frac{\partial i}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho}\left[(v_x - \xi)\frac{\partial p}{\partial \xi} + (v_y - \eta)\frac{\partial p}{\partial \eta}\right],$$

$$\rho = \rho(i, p).$$

Здесь v_x и v_y – компоненты вектора скорости, отнесенные к N_0; ρ – плотность, отнесенная к плотности покоящегося перед фронтом волны газа ρ_0; p и i – давление и энтальпия, отнесенные к $\rho_0\, N_0^2$ и N_0^2 соответственно; $\nu = 0$ для плоских и $\nu = 1$ для осесимметричных движений;

$$\xi = \frac{x}{N_0\, t}, \qquad \eta = \frac{y}{N_0\, t}.$$

Перейдем в системе уравнений (3) от плотности ρ к обратной величине $\tau = \dfrac{1}{\rho}$. В результате получим для совершенного газа:

$$(v_x - \xi)\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + (v_y - \eta)\frac{\partial v_x}{\partial \eta} = -\tau\frac{\partial p}{\partial \xi},$$

$$(v_x - \xi)\frac{\partial v_y}{\partial \xi} + (v_y - \eta)\frac{\partial v_y}{\partial \eta} = -\tau\frac{\partial p}{\partial \eta},$$

$$(v_x - \xi)\frac{\partial \tau}{\partial \xi} + (v_y - \eta)\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = \tau\left(\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial v_y}{\partial \eta} + \nu\,\frac{v_y}{\eta}\right), \qquad (4)$$

$$(v_x - \xi)\frac{\partial i}{\partial \xi} + (v_y - \eta)\frac{\partial i}{\partial \eta} = \tau\left[(v_x - \xi)\frac{\partial p}{\partial \xi} + (v_y - \eta)\frac{\partial p}{\partial \eta}\right],$$

$$\tau = \tau(i, p) = \frac{k-1}{k}\,\frac{i}{p}.$$

Перейдем теперь к **переменным Лагранжа** по формулам

$$\xi = \xi(\mu, \psi) \qquad \text{и} \qquad \eta = \eta(\mu, \psi) \qquad \text{где} \qquad \mu = \frac{\sigma}{t}, \qquad (5)$$

σ – момент времени входа частицы газа в возмущенную область течения, ψ – полярный угол точки входа.

Тогда для компонент вектора скорости получим следующие формулы

$$v_x = \frac{1}{N_0}\,\frac{d\,x}{d\,t} = \xi - \mu\,\dot{\xi}, \qquad v_y = \frac{1}{N_0}\,\frac{d\,y}{d\,t} = \eta - \mu\,\dot{\eta}. \tag{6}$$

Здесь и далее точкой будем обозначать дифференцирование по μ, то есть $\dot{f} \equiv \frac{\partial\,f}{\partial\,\mu}$.

Для перехода к дифференцированию по новым переменным μ и ψ получим следующие формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\,\mu} &= \frac{\partial}{\partial\,\xi}\,\dot{\xi} + \frac{\partial}{\partial\,\eta}\,\dot{\eta}, \\ \frac{\partial}{\partial\,\psi} &= \frac{\partial}{\partial\,\xi}\,\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi} + \frac{\partial}{\partial\,\eta}\,\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}. \end{aligned}$$

Решая эту алгебраическую систему относительно производных $\frac{\partial}{\partial\,\xi}$ и $\frac{\partial}{\partial\,\eta}$, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\,\xi} &= \frac{1}{\delta}\,\left(\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial}{\partial\,\mu} - \dot{\eta}\,\frac{\partial}{\partial\,\psi}\right), \\ \frac{\partial}{\partial\,\eta} &= \frac{1}{\delta}\,\left(-\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial}{\partial\,\mu} + \dot{\xi}\,\frac{\partial}{\partial\,\psi}\right), \\ \text{где} \qquad \delta &= \frac{D(\xi,\eta)}{D(\mu,\psi)} = \dot{\xi}\,\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi} - \dot{\eta}\,\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi}. \end{aligned} \tag{7}$$

Подставим формулы (7) в систему уравнений (4).

Рассмотрим подробно первое уравнение системы уравнений (4). Сначала преобразуем первое слагаемое в левой части уравнения:

$$\begin{aligned} &(v_x\, - \,\xi)\frac{\partial\,v_x}{\partial\,\xi} = (-\mu\,\dot{\xi}\,)\,\frac{1}{\delta}\,\left(\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,v_x}{\partial\,\mu} - \dot{\eta}\,\frac{\partial\,v_x}{\partial\,\psi}\right) = \\ &= (-\mu\,\dot{\xi}\,)\,\frac{1}{\delta}\,\left[\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}\,(-\mu\,\ddot{\xi}\,) - \dot{\eta}\,\left(\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi} - \mu\,\frac{\partial^2\,\xi}{\partial\,\mu\,\partial\psi}\right)\right]. \end{aligned}$$

Аналогично для второго слагаемого получим:

$$(v_y - \eta)\frac{\partial v_x}{\partial \eta} = (-\mu\,\dot\eta\,)\,\frac{1}{\delta}\,\left(-\frac{\partial\xi}{\partial\psi}\,\frac{\partial v_x}{\partial\mu} + \dot\xi\,\frac{\partial v_x}{\partial\psi}\right) =$$

$$= (-\mu\,\dot\eta\,)\,\frac{1}{\delta}\,\left[-\frac{\partial\xi}{\partial\psi}\,(-\mu\,\ddot\xi\,) + \dot\xi\,\left(\frac{\partial\xi}{\partial\psi} - \mu\,\frac{\partial^2\xi}{\partial\mu\,\partial\psi}\right)\right].$$

В результате получим левую часть первого уравнения системы (4) в новых переменных:

$$(-\mu\,\dot\xi\,)\,\frac{1}{\delta}\,\left[\frac{\partial\eta}{\partial\psi}\,(-\mu\,\ddot\xi\,) - \dot\eta\,\left(\frac{\partial\xi}{\underline{\underline{\partial\psi}}} - \mu\,\frac{\partial^2\xi}{\underline{\partial\mu\,\partial\psi}}\right)\right] +$$

$$(-\mu\,\dot\eta\,)\,\frac{1}{\delta}\,\left[-\frac{\partial\xi}{\partial\psi}\,(-\mu\,\ddot\xi\,) + \dot\xi\,\left(\frac{\partial\xi}{\underline{\underline{\partial\psi}}} - \mu\,\frac{\partial^2\xi}{\underline{\partial\mu\,\partial\psi}}\right)\right] =$$

Одинаковоподчеркнутые слагаемые взаимно уничтожаются.

$$= (-\mu\,\dot\xi\,)\,\frac{1}{\delta}\,\frac{\partial\eta}{\partial\psi}\,(-\mu\,\ddot\xi\,) + (-\mu\,\dot\eta\,)\,\frac{1}{\delta}\,\left[-\frac{\partial\xi}{\partial\psi}\,(-\mu\,\ddot\xi\,)\right] =$$

Вынесем за скобку вторую производную от ξ.

$$= (-\mu^2\,\ddot\xi\,)\,\frac{1}{\delta}\,\left(\dot\xi\,\frac{\partial\eta}{\partial\psi} - \dot\eta\,\frac{\partial\xi}{\partial\psi}\right) = \mu^2\,\ddot\xi\,\frac{1}{\delta}\,\delta = \mu^2\,\ddot\xi.$$

Окончательно, первое уравнение системы (4) преобразуется к виду

$$\mu^2\ddot\xi\,\delta = -\tau\left(\frac{\partial\eta}{\partial\psi}\,\frac{\partial p}{\partial\mu} - \dot\eta\,\frac{\partial p}{\partial\psi}\right). \tag{8}$$

Аналогично из второго уравнения системы (4) получим:

$$\mu^2\ddot\eta\,\delta = \tau\left(\frac{\partial\xi}{\partial\psi}\,\frac{\partial p}{\partial\mu} - \dot\xi\,\frac{\partial p}{\partial\psi}\right). \tag{9}$$

Переходя к новым переменным в уравнении неразрывности, умножим сразу всё уравнение на δ.

$$
(-\mu\,\dot\xi)\left(\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,\tau}{\partial\,\mu}-\dot\eta\,\frac{\partial\,\tau}{\underline{\partial\,\psi}}\right)+(-\mu\,\dot\eta)\left(-\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,\tau}{\partial\,\mu}+\dot\xi\,\frac{\partial\,\tau}{\underline{\partial\,\psi}}\right)=
$$

$$
=\tau\Bigg[\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,(\xi-\mu\,\dot\xi)}{\partial\,\mu}-\dot\eta\frac{\partial\,(\xi-\mu\,\dot\xi)}{\partial\,\psi}-\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,(\eta-\mu\,\dot\eta)}{\partial\,\mu}+
$$

$$
+\dot\xi\,\frac{\partial\,(\eta-\mu\,\dot\eta)}{\partial\,\psi}+\nu\,\delta\,\frac{\eta-\mu\,\dot\eta}{\eta}\Bigg].
$$

Преобразуем полученное уравнение. Рассмотрим сначала левую часть уравнения и приведем в ней подобные члены. В результате получим:

$$
-\mu\,\frac{\partial\,\tau}{\partial\,\mu}\left(\dot\xi\,\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}-\dot\eta\,\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi}\right)=-\mu\,\delta\frac{\partial\,\tau}{\partial\,\mu}.
$$

Обратимся теперь к правой части уравнения:

$$
\tau\Bigg[-\mu\,\ddot\xi\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}-\dot\eta\,\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi}+\mu\,\dot\eta\,\frac{\partial\,\dot\xi}{\partial\,\psi}+\mu\,\ddot\eta\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi}+\dot\xi\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}-
$$

$$
\mu\,\dot\xi\frac{\partial\,\dot\eta}{\partial\,\psi}+\nu\,\delta\,\frac{\eta-\mu\,\dot\eta}{\eta}\Bigg]=
$$

Перегруппируем члены правой части уравнения:

$$
=\tau\Bigg[-\mu\left(\ddot\xi\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}+\dot\xi\frac{\partial\,\dot\eta}{\partial\,\psi}-\ddot\eta\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi}-\dot\eta\frac{\partial\,\dot\xi}{\partial\,\psi}\right)-
$$

$$
\dot\eta\,\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi}+\dot\xi\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}+\nu\,\delta\,\frac{\eta-\mu\,\dot\eta}{\eta}\Bigg]=
$$

Отсюда получим:

$$
=\tau\left[-\mu\,\frac{\partial\,\delta}{\partial\,\mu}+\delta+\nu\,\delta\,\frac{\eta-\mu\,\dot\eta}{\eta}.\right].
$$

Окончательно уравнение неразрывности (третье уравнение системы (4)) будет иметь вид:

$$
-\mu\,\delta\frac{\partial\,\tau}{\partial\,\mu}=\tau\left[-\mu\,\frac{\partial\,\delta}{\partial\,\mu}+\delta+\nu\,\delta\,\frac{\eta-\mu\,\dot\eta}{\eta}\right]. \tag{10}
$$

Уравнение энергии (четвертое уравнение системы (4)) перепишем в виде:

$$(v_x - \xi)\left(\frac{\partial i}{\partial \xi} - \tau\,\frac{\partial p}{\partial \xi}\right) + (v_y - \eta)\left(\frac{\partial i}{\partial \eta} - \tau\,\frac{\partial p}{\partial \eta}\right) = 0.$$

и перейдем к переменным μ и ψ по формулам (7), умножая всё уравнение на δ.

$$-\mu\,\dot{\xi}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\frac{\partial i}{\partial \mu} - \underline{\dot{\eta}\frac{\partial i}{\partial \psi}} - \tau\,\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\frac{\partial p}{\partial \mu} + \underline{\underline{\tau\,\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial \psi}}}\right) -$$

$$-\mu\,\dot{\eta}\left(-\frac{\partial \xi}{\partial \psi}\frac{\partial i}{\partial \mu} + \underline{\dot{\xi}\frac{\partial i}{\partial \psi}} + \tau\,\frac{\partial \xi}{\partial \psi}\frac{\partial p}{\partial \mu} - \underline{\underline{\tau\,\dot{\xi}\frac{\partial p}{\partial \psi}}}\right) = 0$$

Приведем подобные члены и выделим якобиан δ. Тогда получим:

$$-\delta\,\frac{\partial i}{\partial \mu} + \delta\,\tau\,\frac{\partial p}{\partial \mu} = 0$$

или

$$\frac{\partial i}{\partial \mu} = \tau\,\frac{\partial p}{\partial \mu}. \tag{11}$$

И, наконец, перепишем уравнение сосотояния:

$$\tau = \tau(i,\,p) = \frac{k-1}{k}\,\frac{i}{p}. \tag{12}$$

Система уравнений (8)-(12) не достаточно удобна для применения метода тонкого ударного слоя, так как в уравнениях (8)-(10) правые и левые части уравнений имеют одинаковый порядок малости и одновременно обращаются в ноль при $\tau \to 0$.

Действительно, уравнение неразрывности (10) можно представить в виде

$$\delta \left[(1+\nu)\,\tau + \mu\,\frac{\partial\,\tau}{\partial\,\mu} \right] = \tau\,\mu \left(\frac{\partial\,\delta}{\partial\,\mu} + \nu\,\delta\,\frac{\partial\,\ln\eta}{\partial\,\mu} \right). \tag{13}$$

Интегрируя его по μ, получим:

$$\delta\,\eta^{\nu} = C(\psi)\,\tau\,\mu^{\nu+1}. \tag{14}$$

Произвольную функцию $C(\psi)$ следует определить из условий динамической совместности на фронте ударной волны.

Из уравнения неразрывности в форме (14) и следует, что в предельном течении (при $\tau \to 0$) все частицы расположены на фронте ударной волны, так как $\delta = 0$ при $\tau = 0$.

Комбинируя уравнения (8) и (9), получим:

$$\mu^2\,(\dot{\xi}\,\ddot{\xi} + \dot{\eta}\,\ddot{\eta}) = -\tau\,\frac{\partial\,p}{\partial\,\mu}, \tag{15}$$

$$\mu^2 \left(\ddot{\xi}\,\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi} + \ddot{\eta}\,\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi} \right) = -\tau\,\frac{\partial\,p}{\partial\,\psi}, \tag{16}$$

Для определения давления, которое исчезает из системы уравнений (15-16) при предельном переходе, можно воспользоваться любым из уравнений (8) или (9) с учетом (14), или их комбинацией.

Используя первое из них – (8), получим:

$$\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,p}{\partial\,\mu} - \dot{\eta}\,\frac{\partial\,p}{\partial\,\psi} = -\frac{\mu^{\nu+3}}{\eta^{\nu}}\,\ddot{\xi}\,C(\psi). \tag{17}$$

Легко показать, что в предельном случае уравнения (8) и (9) равносильны.

Действительно, при $\tau = 0$ имеем:

$$\delta = \dot{\xi}\,\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi} - \dot{\eta}\,\frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi} = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi} = \frac{\dot{\xi}}{\dot{\eta}}\,\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}.$$

Подставляя это выражение в (9), получим:

$$\mu^2\,\ddot{\eta}\,\delta = \tau \left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{\eta}}\,\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,p}{\partial\,\mu} - \dot{\xi}\,\frac{\partial\,p}{\partial\,\psi} \right)$$

или

$$\mu^2\,\frac{\ddot\eta\,\dot\eta}{\dot\xi}\,\delta=\tau\left(\frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,p}{\partial\,\mu}-\dot\eta\,\frac{\partial\,p}{\partial\,\psi}\right).$$

В предельном случае $\dfrac{\ddot\eta\,\dot\eta}{\dot\xi}=-\ddot\xi$ и мы приходим к уравнению (8).

В дальнейшем вместо системы (8)-(12) будем рассматривать систему уравнений (15)-(17), (11) и (12).

Эта система может быть использована для построения некоторой итерационной процедуры, где за исходное приближение удобно взять предельное течение газа ($\tau=0$). Действительно, при $\tau=0$ указанная система уравнений расщепляется и уравнения (15)-(16) служат для определения закона движения частиц газа. Затем по найденному закону движения из уравнения (17) определится давление газа. Далее по найденной из уравнения (11) энтальпии и давлению газа из уравнения состояния (12) находим величину обратную плотности τ.

Чтобы определить закона движения в следующем приближении, вернемся к уравнениям (15)-(16) и вычислим правые части на основе предельного течения. Таким образом процесс уточнения решения может быть продолжен.

2.2. Граничные условия

Теперь обратимся к граничным условиям для системы уравнений (15)-(17), (11) и (12), решение которой должно удовлетворять условиям динамической совместности на фронте интенсивной ударной волны (2).

Пусть газ покоится перед фронтом ударной волны. Поскольку на фронте ударной волны $\mu=1$, условия динамической совместности можно записать в виде

$$\begin{cases}\xi(1,\psi)-\dot\xi(1,\psi)=r\,(1-\tau)\,\cos\gamma\,\cos(\psi-\gamma),\\ \eta(1,\psi)-\dot\eta(1,\psi)=r\,(1-\tau)\,\cos\gamma\,\sin(\psi-\gamma),\end{cases}\tag{18}$$

$$p_{\,\Phi}(1,\psi)=r^2(1-\tau)\,\cos^2\gamma,\tag{19}$$

$$i_{\,\Phi}(1,\psi)=\frac{1-\tau^2}{2}\,r^2\cos^2\gamma,\tag{20}$$

где $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{d\,r}{r\,d\,\psi}$, γ – угол между радиусом-вектором и внешней нормалью к фронту ударной волны (2) в точке входа частицы газа,

$$r(\psi) = \sqrt{f_1^2(s_0) + f_2^2(s_0)}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{f_2(s_0)}{f_1(s_0)},$$

s_0 – значение параметра s в точке входа частицы газа в ударный слой.

Используя соотношения (18), найдем функцию $C(\psi)$ в уравнении (14)

$$C(\psi) = r^{\nu+2}\,\sin^{\nu}(\psi).$$

Теперь мы имеем в системе (15)-(17), (11) и (12) пять уравнений для определения пяти неизвестных функций ξ, η, p, i, τ. Если функция $r(\psi)$ не задана, то недостающим уравнением для замыкания задачи должно служить какое-либо краевое условие, связанное со спецификой рассматриваемой задачи. Таким условием может быть условие обтекания, условие на поршне, количество взрывчатого вещества, при взрыве которого образовалась искомая сильная ударная волна. При этом может быть полезна формула для расстояния частицы от фронта ударной волны в плоскости автомодельных переменных

$$\Lambda = \int_{\mu}^{1} \frac{\tau\,\mu^{\nu+1}\,r^{\nu+2}\sin^{\nu}(\psi)}{\eta^{\nu}\,Q(\mu\,\psi)}\,\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\,\mu, \qquad (*)$$

где

$$Q(\mu\,\psi) = \frac{\partial\,\eta}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial}{\partial\,\psi}\,(r\,\sin\psi) + \frac{\partial\,\xi}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial}{\partial\,\psi}(r\,\cos\psi),$$

штрих – производная по ψ.

В некоторых задачах (например, в задаче о поршне), используя эту формулу, удается найти форму фронта ударной волны в следующем приближении, не уточняя закон движения частицы газа.

3. Решение задачи

В рамках метода тонкого ударного слоя предположим, что решение системы уравнений (15)-(17),(11) и (12) представимо в виде:

$$
\begin{array}{ll}
\xi = \xi_0 + \varepsilon\,\xi_1 \cdots & \eta = \eta_0 + \varepsilon\,\eta_1 \cdots \\
p = p_0 + \varepsilon\,p_1 \cdots & i = i_0 + \varepsilon\,i_1 \cdots \\
\tau = \varepsilon\,\tau_0 + \varepsilon^2\,\tau_1 \cdots & r = r_0 + \varepsilon\,r_1 \cdots
\end{array}
\tag{21}
$$

где ε – некоторое характерное значение величины τ.

3.1. Предельное решение.

Подставляя (21) в (16) и сохраняя только члены, не содержащие ε, для определения закона движения частиц получим систему

$$
\begin{cases}
\dot{\xi}_0\,\ddot{\xi}_0 + \dot{\eta}_0\,\ddot{\eta}_0 = 0, \\
\ddot{\xi}_0\,\dfrac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi} + \ddot{\eta}_0\,\dfrac{\partial\,\eta_0}{\partial\,\psi} = 0.
\end{cases}
\tag{22}
$$

При этом следует учитывать, что в предельном случае $\delta = 0$, следовательно $\eta_0 = f(\xi_0)$.

Действительно, если на систему (22) посмотреть как на систему двух алгебраических уравнений относительно $\ddot{\xi}_0$ и $\ddot{\eta}_0$, то определитель, составленный из коэффициентов системы, должен равняться нулю, так как нас не интересует тривиальное решение этой системы.

$$
\begin{vmatrix}
\dot{\xi}_0 & \dot{\eta}_0 \\
\dfrac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi} & \dfrac{\partial\,\eta_0}{\partial\,\psi}
\end{vmatrix}
= \dot{\xi}_0\,\frac{\partial\,\eta_0}{\partial\,\psi} - \dot{\eta}_0\,\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi} = 0.
$$

В то же время, в силу соотношения (14) в предельном случае при $\tau = 0$ этот определитель тоже должен равняться нулю. А он представляет собой якобиан для функций ξ_0 и η_0. Следовательно, между этими двумя функциями существует указанная выше функциональная зависимость, где вид функции f определяется формой фронта ударной волны (2).

Тогда система уравнений (22) сводится к одному уравнению

$$
\ddot{\xi}_0\,[1 + (f')^2] + f'\,f''(\dot{\xi}_0)^2 = 0.
\tag{23}
$$

Интегрируя (23) по μ дважды, получим:

$$\int \sqrt{1+[f'(\xi_0)]^2}\, d\,\xi_0 = \mu\, C_1(\psi) + C_2(\psi). \tag{24}$$

Отсюда видно, что путь пройденный частицей в ударном слое вдоль фронта ударной волны линейно зависит от μ.

Для определения произвольных функций $C_1(\psi)$ и $C_2(\psi)$ выделим главные члены в условиях динамической совместности (18), полагая $\tau = 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_0(1,\psi) &= \frac{r_0\, r_0'\,(r_0' \cos\psi - r_0 \sin\psi)}{r_0^2 + (r_0')^2},\\
\dot{\eta}_0(1,\psi) &= \frac{r_0\, r_0'\,(r_0' \sin\psi + r_0 \cos\psi)}{r_0^2 + (r_0')^2},\\
\xi_0(1,\psi) = r_0 \cos\psi, &\qquad \eta_0(1,\psi) = r_0 \sin\psi.
\end{aligned} \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24), получим:

$$C_1(\psi) = \frac{r_0\, r_0'}{\sqrt{r_0^2 + (r_0')^2}}; \quad C_2(\psi) = s_0 - C_1(\psi);$$

$$s_0 = \int_0^{\psi} \sqrt{r_0^2 + (r_0')^2} d\psi.$$

Тогда закон движения частицы вдоль фронта ударной волны можно записать в виде:

$$\xi_0 = f_1(s), \qquad \eta_0 = f_2(s), \qquad s = s_0 + C_1(\psi)\,(\mu - 1).$$

Теперь перейдем к определению давления. После подстановки (18) в (14) найдем функцию $C(\psi)$, входящую в интеграл уравнения неразрывности,

$$C(\psi) = (\sin\psi)^{\nu} r^{\nu+2}$$

и удержим главные члены в уравнении (17):

$$\frac{\partial\, \eta_0}{\partial\, \psi}\, \frac{\partial\, p_0}{\partial\, \mu} - \dot{\eta}_0\, \frac{\partial\, p_0}{\partial\, \psi} = \Phi_0(\mu, \psi), \tag{26}$$

где

$$\Phi_0(\mu, \psi) = -\mu^{\nu+3}\,\ddot{\xi}_0\, r_0^{\nu+2}\left(\frac{\sin\psi}{\eta_0}\right)^{\nu}.$$

Следует заметить, что уже в предельном случае при определении давления сказывается осесимметричный характер течения.

Общее решение уравнения (26) можно представить в виде

$$p_0(\mu,\, \psi) = F(\eta_0) + \int_1^{\mu} \frac{\Phi_0(\mu, \psi)}{f_2'\left[\dfrac{d\, s_0}{d\,\psi} + C_1'(\mu - 1)\right]}. \tag{27}$$

Отметим, что за аргумент произвольной функции вместо η_0 или s можно взять любую величину, характеризующую положение частицы при ее движении вдоль фронта ударной волны.

Определяя произвольную функцию F из (19) и переходя к интегрированию по дуге, для давления в предельном случае окончательно получим:

$$p_0(\mu,\, \psi) = p_{0\Phi} + \frac{1}{f_2'}\int_1^{\mu} \frac{\Phi_0(\mu, \psi)\, d\,\mu}{s_0' + C_1'(\mu - 1)}.$$

Из уравнения (11) находим:

$$\frac{\partial\, i_0}{\partial\,\mu} = 0, \qquad i_0 = i_{0\Phi}\,(\psi) = \frac{1}{2}\,\frac{r_0^4}{r_0^2 + (r')^2}.$$

Из уравнения состояния (12) по p_0 и i_0 находим τ_0. Так, например, для термодинамически совершенного газа имеем:

$$\tau_0 = \frac{r_0^4}{p_0}\,\frac{1}{r_0^2 + (r_0')^2}.$$

3.2. Поправки первого приближения.

Для определения следующих членов разложения из уравнений

(15)-(17) и (11) получим систему:

$$\dot{\xi}_0\,\ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_0\,\dot{\xi}_1 + \dot{\eta}_0\,\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_0\,\dot{\eta}_1 = -\frac{\tau_0}{\mu^2}\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\mu}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\,\ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_0\,\frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,\psi} + \frac{\partial\,\eta_0}{\partial\,\psi}\,\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_0\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\psi} = -\frac{\tau_0}{\mu^2}\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\psi}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial\,\eta_0}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,p_1}{\partial\,\mu} - \dot{\eta}_0\,\frac{\partial\,p_1}{\partial\,\psi} = \Phi_1(\mu\,\psi), \tag{30}$$

$$\frac{\partial\,i_1}{\partial\,\mu} = \tau_0\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\mu}, \tag{31}$$

где

$$\Phi_1(\mu\,\psi) = \dot{\eta}_1\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\psi} - \frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\mu} - \\ - \mu^{\nu+3}\,r^{\nu+2}\left(\frac{\sin\psi}{\eta_0}\right)^{\nu}\left(\ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_0\,\frac{\nu\eta_1}{\eta_0} + (\nu+2)\,\ddot{\xi}_0\,\frac{r_1}{r_0}\right).$$

При решении обратной задачи (когда фронт волны задан) следует положить

$$r_1(\psi) = r_2(\psi) = \ldots = 0.$$

Граничные условия для системы (28)-(31) при $\mu = 1$ найдем из (18)-(20). Собирая члены при ε в первой степени, для обратной задачи получим:

$$\dot{\xi}_1 = \frac{r_0}{r_0'}\,\dot{\eta}_0; \qquad \dot{\eta}_1 = \frac{r_0}{r_0'}\,\dot{\xi}_0; \qquad p_1 = -\frac{r_0^4}{r_0^2 + (r_0')^2}; \qquad i_1 = 0. \tag{32}$$

Умножим уравнение (28) на $\left(-\dfrac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\right)$, а уравнение (24) на $\dot{\xi}_0$ и сложим. Тогда, учитывая, что $\eta_0 = f(\xi_0)$, получим уравнение первого порядка

$$\dot{\xi}_0\,\ddot{\xi}_0\,\frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,\psi} + \dot{\xi}_0\,\ddot{\eta}_0\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\psi} - \ddot{\xi}_0\,\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\,\dot{\xi}_1 - \ddot{\eta}_0\,\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\,\dot{\eta}_1 = \\ = \frac{\tau_0}{\mu^2}\left(\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\mu} - \dot{\xi}_0\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\psi}\right).$$

Далее, интегрируя уравнение (28) по μ, имеем:

$$\dot{\xi}_0\,\dot{\xi}_1 + \dot{\eta}_0\,\dot{\eta}_1 = \int_\mu^1 \frac{\tau_0}{\mu^2}\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\mu}\,d\mu + V(\psi).$$

Функцию $V\,(\psi)$ следует определить из граничных условий.

Таким образом, вместо двух уравнений второго порядка для определения закона движения частиц в следующем приближении $\xi_1(\mu,\,\psi)$ и $\eta_1(\mu,\,\psi)$ мы получили систему двух уравнений в частных производных первого порядка:

$$\dot{\xi}_0\,\ddot{\xi}_0\,\frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,\psi} + \dot{\xi}_0\,\ddot{\eta}_0\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\psi} - \ddot{\xi}_0\,\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\,\dot{\xi}_1 - \ddot{\eta}_0\,\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\,\dot{\eta}_1 = \frac{\tau_0}{\mu^2}\left(\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\mu} - \dot{\xi}_0\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\psi}\right), \tag{33}$$

$$\dot{\xi}_0\,\dot{\xi}_1 + \dot{\eta}_0\,\dot{\eta}_1 = \int_\mu^1 \frac{\tau_0}{\mu^2}\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\mu}\,d\mu + V(\psi),$$

где

$$V(\psi) = \frac{{r_0'}^4\,r_0}{[r_0^2 + (r_0')^2]^2}\,r_1$$

в случае прямой задачи и $V(\psi) = 0$ в случае обратной задачи.

Система уравнений (33) может быть сведена к одному уравнению второго порядка, например, для функции $\eta_1(\mu,\,\psi)$:

$$\frac{\partial^2\,\eta_1}{\partial\,\mu\,\partial\,\psi} - \frac{1}{\dot{\xi}_0}\,\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial^2\eta_1}{\partial\mu^2} - \frac{\ddot{\eta}_0}{\dot{\eta}_0}\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\psi} + \left(\ddot{\eta}_0\,\frac{\dot{\xi}_0^2 - \dot{\eta}_0^2}{\dot{\xi}_0^3\,\dot{\eta}_0}\,\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi} - \frac{1}{\dot{\xi}_0}\,\frac{\partial^2\,\xi_0}{\partial\,\mu\,\partial\,\psi}\right)\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\mu} = \frac{\dot{\xi}_0\,\dot{\eta}_0}{\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2}\left[\frac{\partial\,F_2}{\partial\,\psi} - \frac{\partial}{\partial\,\mu}\left(F_1 - \frac{F_2}{\dot{\xi}_0}\,\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\right)\right], \tag{34}$$

где F_1 и F_2 определяются формулами:

$$F_1(\mu,\,\psi) = \frac{\tau_0}{\mu^2\,\dot{\xi}_0\,\ddot{\xi}_0}\left(\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\mu} - \dot{\xi}_0\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\psi}\right),$$

$$F_2(\mu,\,\psi) = \frac{1}{\dot{\xi}_0}\left[\int_\mu^1 \frac{\tau_0}{\mu^2}\,\frac{\partial\,p_0}{\partial\,\mu}\,d\mu + V(\psi)\right].$$

Переходя от независимых переменных μ и ψ к переменным $\xi_0(\mu,\,\psi)$ и ψ, по формулам

$$\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\mu}=\dot{\xi}_0\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\xi_0},\qquad \frac{\partial^2\,\eta_1}{\partial\,\mu^2}=\dot{\xi}_0^2\,\frac{\partial^2\,\eta_1}{\partial\,\xi_0^2}-\frac{\ddot{\eta}_0\,\dot{\eta}_0}{\dot{\xi}_0}\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\xi_0},$$

$$\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\psi}=\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\xi_0}+\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\psi},$$

$$\frac{\partial^2\,\eta_1}{\partial\,\mu\,\partial\,\psi}=\dot{\xi}_0\,\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\,\frac{\partial^2\,\eta_1}{\partial\,\xi_0^2}+\ddot{\xi}_0\,\frac{\partial^2\,\eta_1}{\partial\,\xi_0\,\partial\,\psi}+\frac{\partial^2\,\xi_0}{\partial\,\mu\,\partial\,\psi}\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\xi_0}$$

приведем гиперболическое уравнение (34) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2\,\eta_1}{\partial\,\xi_0\,\partial\,\psi}-\frac{\ddot{\eta}_0}{\dot{\xi}_0\,\dot{\eta}_0}\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\psi}=L_1(\xi_0\,\psi),\tag{35}$$

где

$$L_1(\xi_0\,\psi)=\frac{\dot{\eta}_0}{\dot{\xi}_0^2+\dot{\eta}_0^2}\left[\frac{\partial\,F_2}{\partial\,\psi}-\frac{\partial}{\partial\,\mu}\left(F_1-\frac{F_2}{\dot{\xi}_0}\,\frac{\partial\,\xi_0}{\partial\,\psi}\right)\right],\qquad \xi_0=\xi_0(\mu\,\psi).$$

Общее решение уравнения (35) можно представить в виде

$$\eta_1(\xi_0,\,\psi)=\int\dot{\eta}_0\,C_3(\psi)d\psi+\int\dot{\eta}_0\,B(\xi_0,\,\psi)d\psi+C_4(\xi_0),\tag{36}$$

где

$$B(\xi_0,\,\psi)=\int\frac{1}{\dot{\eta}_0}\,L_1(\xi_0,\,\psi\,d\xi_0.$$

Для определения функции $\xi_1(\xi_0,\,\psi)$ в первом уравнении системы (33) перейдем к переменным ξ_0 и ψ:

$$\frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,\psi}-\frac{\dot{\xi}_0}{\dot{\eta}_0}\,\frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,\psi}=F_1(\xi_0\,\psi).$$

Интегрируя по ψ, получим:

$$\xi_1(\xi_0,\,\psi)=\int F_1(\xi_0,\,\psi)d\psi+\int\dot{\xi}_0\,[C_3(\psi)+B(\xi_0,\,\psi)]d\psi+C_5(\xi_0).\tag{37}$$

Для определения трех произвольных функций $C_3(\psi)$, $C_4(\psi)$ и $C_5(\psi)$ имеем второе уравнение системы (33) и два очевидных условия при $\mu = 1$: $\xi_1 = r_1 \cos\psi$, $\eta_1 = r_1 \sin\psi$ (прямая задача) и $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$ (обратная задача, при которой $r_1 = 0$).

Удовлетворяя условиям на фронте ударной волны, из (36) и (37) получим:

$$\xi_1 = \int_\varphi^\psi F_1(\xi_0,\, \psi) d\psi + \int_\varphi^\psi \dot{\xi}_0 \, [C_3(\psi) + B(\xi_0,\, \psi)] d\psi + r_1 \cos\psi, \qquad (38)$$

$$\eta_1 = \int_\varphi^\psi \dot{\eta}_0 \, [C_3(\psi) + B(\xi_0,\, \psi)] d\psi + r_1 \sin\psi,$$

где $\quad \xi_0 = \xi_0(\varphi), \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{f_2(s)}{f_1(s)}.$

Теперь из второго уравнения системы (33) для определения функции C_3 получим:

$$(\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2)\, \dot{\varphi}\, [C_3(\psi) + B(\xi_0,\, \psi)] = \dot{\xi}_0 \, \frac{\partial}{\partial \mu} \int_\varphi^\psi F_1(\xi_0,\, \psi) d\psi +$$

$$+ \frac{\dot{\xi}_0}{\dot{\eta}_0} \, \frac{\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2}{\dot{\varphi}} \int_\varphi^\psi \dot{\varphi}(\xi_0,\, \psi)\, L_1(\xi_0,\, \psi)\, d\psi + \int_1^\mu \frac{\tau_0}{\mu^2} \, \frac{\partial p_0}{\partial \mu}\, d\mu.$$

Интеграл уравнения (30) можно представить в виде (27).

Далее, интегрируя (31) с учетом (32), получим:

$$i_1(\mu,\, \psi) = 2\, i_o(\psi)\, [\ln p_0(\mu,\, \psi) - \ln p_0(1,\, \psi)]. \qquad (39)$$

Следует отметить, что при построении каждого следующего приближения система уравнений будет отличаться от системы (28)-(31) только правыми частями, а следовательно, может быть проинтегрирована изложенным способом.

4. Пример

В качестве примера рассмотрим в осесимметричном случае ($\nu = 1$) задачу о расширении с большой сверхзвуковой скоростью эллиптического поршня.

Уравнение поршня в плоскости автомодельных переменных зададим в виде:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1. \tag{40}$$

При этом для упрощения выкладок положим:

$$a = 1 + \alpha, \qquad b = 1 - \alpha, \qquad \alpha \ll 1.$$

Сохраняя члены порядка α, для длины дуги вдоль поршня имеем:

$$s = \varphi + \frac{\alpha}{2} \sin 2\,\varphi + O(\alpha^2), \tag{41}$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{\eta}{\xi}$ – полярный угол в плоскости автомодельных переменных.

Фронт ударной волны в предельном течении будет совпадать с поверхностью поршня:

$$r_0(\psi) = 1 + \alpha \cos\, 2\,\psi - \frac{3}{2}\, \alpha^2\, \sin^2\, 2\,\psi. \tag{42}$$

Подставляя (41) и (42) в интеграл уравнения движения частицы газа (24), получим угловой закон движения частицы в виде

$$\varphi = \psi + 2\,\alpha\,(1-\mu)\,\sin\, 2\psi - \frac{\alpha}{2}\,(\sin\, 2\,\varphi - \sin\, 2\,\psi). \tag{43}$$

Отсюда следует, что $\varphi - \psi \sim O(\alpha)$.

Окончательно, для закона движения частицы по поверхности поршня с точностью до членов порядка α имеем:

$$\begin{gathered} \varphi = \psi + 2\,\alpha\,(1-\mu)\,\sin\, 2\psi, \\ \xi_0 = (1 + \alpha\, \cos\, 2\,\varphi)\, \cos\, \varphi, \quad \eta_0 = (1 + \alpha\, \cos\, 2\,\varphi)\, \sin\, \varphi \end{gathered} \tag{44}$$

Для определения давления имеем формулу (27). Вычисления показывают, что интеграл в этой формуле имеет порядок α^2. Поэтому сохраним члены порядка α^2 и в $p_{0\Phi}$:

$$p_{0\Phi} = 1 + 2\,\alpha\,\cos\,2\,\varphi + \alpha^2\,(1 - 8\,\sin^2\,2\,\varphi).$$

Тогда окончательно для давления в предельном случае получим:

$$p_0 = 1 + 2\,\alpha\cos\,2\,\varphi + \alpha^2\left[1 - 8\,\sin^2\,2\varphi + \frac{4(\mu^5 - 1)}{5}\sin^2\,2\varphi\right]. \qquad (45)$$

Далее находим i_0:

$$i_0 = i_{0\Phi} = \frac{1}{2}\,p_{0\Phi} = \frac{1}{2}\,[1 + 2\,\alpha\cos\,2\,\varphi + \alpha^2\,(1 - 8\sin^2\,2\varphi)]. \qquad (46)$$

Для термодинамически совершенного газа имеем:

$$\tau_0 = \frac{p_{0\Phi}}{p_0} = 1 + \alpha^2\,\frac{4(1 - \mu^5)}{5}\sin^2\,2\varphi. \qquad (47)$$

Вообще говоря, функция $r_1(\psi)$ должна определяться из условия на поршне (при $\mu = 0$),состоящего в том, что скорость частиц газа на поршне совпадает со скоростью поршня. Функция $r_1(\psi)$ определяется из этого условия после уточнения закона движения частицы, то есть после нахождения функций $\xi_1(\mu,\,\psi)$ и $\eta_1(\mu,\,\psi)$. Однако, используя формулу (*) из раздела (2.2) в данной задаче можно уточнить форму фронта ударной волны, и не находя закон движения в следующем приближении. Для этого достаточно искать уравнение фронта ударной волны в виде $\vec{r}_\Phi = \vec{r}_{\text{Пор}} + \lambda\,\vec{n}$, где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к фронту ударной волны, или

$$\xi_\Phi = \xi_{\text{Пор}} + \lambda\cos(\vec{n},\,x), \quad \eta_\Phi = \eta_{\text{Пор}} + \lambda\cos(\vec{n},\,y), \quad \lambda = \Lambda(0,\,\psi).$$

Для построения закона движения в следующем приближении вычислим функции F_1 и F_2. Ограничиваясь главными членами, получим:

$$F_1(\mu,\,\psi) = \frac{\mu^2}{2\,\alpha\cos\psi\,\sin 2\,\psi},$$

$$F_2(\mu,\,\psi) = 4\,\alpha\cos\psi\left[\frac{2}{\mu} - 2 + \frac{1 - \mu^3}{3}\right].$$

Тогда отбрасывая члены порядка α по сравнению с единицей в формулах (38), получим:

$$\xi_1(\mu,\,\psi) = \frac{\mu^3}{3}\,\cos\psi + \mu\,C_1(\psi) + C_2(\psi),$$

$$\eta_1(\mu,\,\psi) = \frac{\mu^3}{3}\,\sin\psi + \mu\,C_3(\psi) + C_4(\psi).$$

Для определения произвольных функций из (32) имеем четыре условия:

$$\dot{\xi}_1(1,\,\psi) = \cos\psi, \qquad \dot{\eta}_1(1\,\psi) = \sin\psi.$$
$$\xi_1(1,\,\psi) = r_1(\psi)\,\cos\psi, \qquad \eta_1(1\,\psi) = r_1(\psi)\,\sin\psi.$$

После определения произвольных функций найдем закон движения частицы в следующем приближении:

$$\xi_1(\mu,\,\psi) = \frac{\mu^3-1}{3}\,\cos\psi + r_1(\psi)\,\cos\psi, \tag{48}$$

$$\eta_1(\mu,\,\psi) = \frac{\mu^3-1}{3}\,\sin\psi + r_1(\psi)\,\sin\psi. \tag{49}$$

Подставляя эти формулы при $\mu = 0$ в (28) и учитывая (21), получим:

$$r_1 = \frac{1}{3}.$$

Для определения давления в следующем приближении вычислим сначала функцию $\Phi_1(\mu,\,\psi)$ для произвольного значения ν.

$$\Phi_1(\mu,\,\psi) = -4\,\alpha\,\mu^{\nu+1}\sin\psi\,\sin 2\psi -$$
$$-\,(\nu+1)\,\mu^{2\,\nu+3}\,\cos\psi\,\frac{(1+\alpha\cos\psi)^{\nu+2}\sin^{\nu}\psi}{(1+\alpha\cos\psi)^{\nu}\sin^{\nu}\varphi}.$$

Или

$$\Phi_1(\mu,\,\psi) = -4\,\alpha\,\mu^{\nu+1}\sin\psi\,\sin 2\psi -$$
$$-\,(\nu+1)\,\mu^{2\,\nu+3}\,\cos\psi\,[1 + 2\alpha\nu(\mu-1) + 2\alpha(1-\nu+\nu\mu)\cos 2\psi].$$

Тогда решение уравнения (30) будет иметь вид:

$$p_1(\mu,\,\psi) = -\frac{\nu}{\nu+2} - \frac{\nu+1}{2(\nu+2)}(\mu^{2\nu+4}-1) =$$

$$\frac{1}{2(\nu+2)}[(1-\nu)-(1+\nu)\mu^{2(\nu+2)}].$$

Или при $\nu = 1$

$$p_1(\mu,\,\psi) = \frac{1}{3}\mu^6.$$

Окончательно для давления и энтальпии газа в рассматриваемом приближении получим:

$$p(\mu,\,\psi) = 1 + 2\alpha\cos 2\psi + \varepsilon\frac{1-\nu}{2(\nu+2)}\left\{1 - \frac{1+\nu}{1-\nu}\mu^{2(\nu+2)}\right\},$$

$$i(\mu,\,\psi) = i_0 + i_1 = \frac{1}{2}[1 + 2\alpha\cos 2\varphi] + \varepsilon\frac{4\alpha^2}{\nu+4}(\mu^{\nu+4} - 1)\sin^2 2\psi.$$

Или при $\nu = 1$

$$p(\mu,\,\psi) = 1 + 2\alpha\cos 2\psi + \varepsilon\frac{1}{3}\mu^6,$$

$$i(\mu,\,\psi) = i_0 + i_1 = \frac{1}{2}[1 + 2\alpha\cos 2\varphi] + \varepsilon\frac{4\alpha^2}{5}(\mu^5 - 1)\sin^2 2\psi.$$

После определения τ_1 при необходимости процесс уточнения решения может быть продолжен.

Литература

1. *Лунев В.В.* Течения реальных газов с большими скоростями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 760 с.

2. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. – М.: Физматгиз, 1959. – 228 с.

3. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука. Изд. 8-е. 1977. 440 с.

Содержание

Предисловие **3**

Введение **4**

1. Автомодельность и переменные Лагранжа **8**

2. Постановка задачи. **10**

2.1. Система уравнений, описывающая течение газа в возмущенной области 10

2.2. Граничные условия 17

3. Решение задачи **19**

3.1. Предельное решение 19

3.2. Поправки первого приближения 21

4. Пример **26**

Литература **30**