УДК 531.011 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4
MSC 70F25

Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. I

М. П. Юшков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Юшков М. П.* Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. I // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 680–701. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.413

В работе рассматриваются исследования, посвященные движению неголономных систем со связями высокого порядка. Задача о движении таких систем формулируется как обобщенная задача Чебышёва. Для исследования движения этих систем построены две теории их движения. В первой из них строится совместная система дифференциальных уравнений относительно неизвестных обобщенных координат и множителей Лагранжа, а во второй — уравнения движения получаются с помощью применения обобщенного принципа Гаусса. При исследованиях связи высокого порядка рассматриваются как программные. Таким образом, ставится задача отыскания управления, обеспечивающего выполнение программы, заданной в виде дополнительной системы дифференциальных уравнений, линейной относительно производных порядка $n \geqslant 3$ от искомых обобщенных координат. Тем самым, в рассмотрение вводится некоторый новый класс задач управления. Приводится ряд примеров решения реальных механических задач, сформулированных как обобщенные задачи Чебышёва. Предлагаемая статья представляет собой обзор многолетних исследований, проведенных на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Ключевые слова: неголономная механика, связи высокого порядка, принцип максимума Понтрягина, обобщенный принцип Гаусса, управление, гашение колебаний, обобщенная краевая задача.

В статье дается обзор многолетних исследований, проведенных на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ, посвященных решению обобщенных задач Чебышёва. Под обобщенной задачей Чебышёва понимают задачу, в которой решение системы уравнений движения должно одновременно удовлетворять дополнительной системе дифференциальных уравнений высокого порядка $n \geqslant 3$. Тем самым в рассмотрение вводится некоторый новый класс задач управления. Обобщенная задача Чебышёва рассматривается как расширение задачи Чебышёва из теории синтеза механизмов, в которой требуется построить устройство, определенные звенья которого должны с заданной точностью выполнять требуемые движения. Примером таких устройств могут служить известные механизмы Чебышёва с остановками определенных звеньев в заданных положениях.

Для решения обобщенной задачи Чебышёва предлагается применять две теории движения неголономных систем со связями высокого порядка, разработанные на кафедре теоретической и прикладной механики СПбГУ. При этом дополнительная система дифференциальных уравнений рассматривается как набор программных связей высокого порядка, реакции которых оказываются искомыми управляющими силами, решающими обобщенную задачу Чебышёва. В первой теории строится совместная система дифференциальных уравнений относительно неизвестных обобщенных координат и множителей Лагранжа, а во второй — используется обобщенный принцип Гаусса. Применение теорий демонстрируется решением задачи о движении спутника Земли (космического аппарата) с зафиксированной величиной ускорения.

В следующей статье того же названия вторая теория будет применяться для решения одной из важнейших задач теории управления о переводе механической системы за указанное время из одного фазового состояния в другое.

1. Постановка задачи. Общеизвестны выдающиеся работы П. Л. Чебышёва, посвященные самым различным областям математики и механики [1]. В частности, он являлся создателем теории синтеза механизмов [2], в которой он ставил задачу создания таких машин, отдельные звенья которых с указанной точностью должны были совершать заданные движения. Среди таких устройств можно вспомнить, например, многозвенники с остановками определенных частей в заданных положениях[1]. Постановку подобных задач назовем задачей Чебышёва. Далее в предлагаемой статье будет предложено обобщение такой задачи на случай требования удовлетворения решением изучаемой системы уравнений некоторой дополнительной системе дифференциальных уравнений высокого порядка.

Итак, поставим следующую задачу. Пусть движение механической системы под действием обобщенных сил $Q = (Q_1, \ldots, Q_s)$ в обобщенных координатах $q = (q^1, \ldots, q^s)$ описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \\
T = \frac{M}{2}\,\mathrm{g}_{\alpha\beta}\dot q^\alpha \dot q^\beta\,, \qquad \alpha,\beta = \overline{0,s}\,, \quad q^0 = t\,,\ \dot q^0 = 1\,,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где M — масса всей системы.

Потребуем, чтобы движение этой механической системы одновременно удовлетворяло системе дифференциальных уравнений ($n \geqslant 3$)

$$
\begin{gathered}
f_n^\varkappa \equiv a_{n\sigma}^{l+\varkappa}(t, q, \dot q, \ldots, \overset{(n-1)}{q})\overset{(n)}{q^\sigma} + a_{n0}^{l+\varkappa}(t, q, \dot q, \ldots, \overset{(n-1)}{q}) = 0\,, \\
\sigma = \overline{1,s}\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,, \qquad k \leqslant s\,, \qquad l = s-k\,,
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

где введены обозначения типа $\overset{(n)}{q^\sigma} = d^n q^\sigma / dt^n$. Сформулированную задачу назовем обобщенной задачей Чебышёва. Как уже отмечалось, она усложнена относительно обсуждавшейся ранее задачи Чебышёва из области синтеза механизмов тем, что теперь требуется найти не только движение некоторых звеньев механизма, а и движение всей системы, удовлетворяющее дополнительной системе дифференциальных уравнений высокого порядка (1.2).

[1]Ряд механизмов, выполненных под руководством П. Л. Чебышёва (в том числе и лично изготовленных им из дерева и сохранивших его пометки), находится в Музее истории Петербургского университета, в Музее истории математико-механического факультета и на кафедре теоретической и прикладной механики СПбГУ [3].

Для решения поставленной задачи требуется найти дополнительные силы $R = (R_1, \ldots, R_s)$, добавив которые к правым частям уравнений (1.1), то есть переписав их в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma + R_\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{1.3}$$

мы получим замкнутую постановку задачи. Таким образом, под *обобщенной задачей Чебышёва* понимается решение совместной системы уравнений (1.2), (1.3), в которой неизвестными функциями времени являются $q = (q^1, \ldots, q^s)$ и $R = (R_1, \ldots, R_s)$.

Отметим, что обобщенную задачу Чебышёва по предложению академика С. С. Григоряна иногда называют и смешанной задачей динамики [4], так как в ней имеются признаки как прямой, так и обратной задач динамики. Действительно, с одной стороны, мы ищем движение при заданных силах $Q = (Q_1, \ldots, Q_s)$, а с другой стороны, при заданных характеристиках движения (1.2) отыскиваем обобщенные силы $R = (R_1, \ldots, R_s)$.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если на движение системы наложены голономные связи

$$f_0^\varkappa(t, q) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \tag{1.4}$$

или неголономные связи первого порядка

$$f_1^\varkappa(t, q, \dot{q}) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \tag{1.5}$$

или линейные неголономные связи второго порядка

$$\begin{gathered} f_2^\varkappa\,(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \equiv\; a_{2\sigma}^{l+\varkappa}\,(t, q, \dot{q})\,\ddot{q}^{\,\sigma} + a_{2,0}^{l+\varkappa}\,(t, q, \dot{q}) = 0\,, \\ \sigma = \overline{1, s}\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \quad l = s - k\,, \end{gathered} \tag{1.6}$$

то при идеальности этих связей их силы реакций соответственно имеют вид [5]

$$\mathbf{R} = \Lambda_\varkappa \nabla f_0^\varkappa\,, \qquad \mathbf{R} = \Lambda_\varkappa \nabla' f_1^\varkappa\,, \qquad \mathbf{R} = \Lambda_\varkappa \nabla'' f_2^\varkappa\,, \qquad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{1.7}$$

Использованные в формулах (1.7) обобщенные операторы Гамильтона ∇' и ∇'' были введены Н. Н. Поляховым [6, 7]. Из них как частный случай при задании голономных связей получается классический оператор Гамильтона (оператор набла).

Важно, что в классической аналитической механике для идеальных связей (1.4), (1.5), (1.6) множители Лагранжа $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa = \overline{1, k}$, определяются как известные функции переменных $t, q, \dot{q}$ [5]:

$$\Lambda_\varkappa = \Lambda_\varkappa(t, q, \dot{q})\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{1.8}$$

Для голономных связей функции (1.8) были получены в начале прошлого века А. М. Ляпуновым [8] и Г. К. Сусловым [9], а для неголономных связей впервые были приведены в работе [10], а затем повторены в первом издании учебника [11, 1985 г.]. Через десять лет этот результат другими методами был получен в США [12, 13], Италии [14], Польше [15], Швеции [16], Советском Союзе [17, 18].

В отличие от этого, если сформулированную обобщенную задачу Чебышёва рассматривать как неголономную задачу с идеальными линейными неголономными связями (1.2) порядка $n \geqslant 3$, то реакции этих связей (играющие роль искомых управляющих сил с точки зрения поставленного нового класса задач теории управления) приходится искать как неизвестные функции времени. Очевидно при этом, что всегда будет существовать такой набор этих функций $R_\sigma(t)$, $\sigma=\overline{1,s}$, при воздействии которого на механическую систему можно добиться не только заданного движения $q^\sigma(t)$, $\sigma=\overline{1,s}$, но и выполнения любых их комбинаций вместе с их производными, заданных в виде (1.2).

Эти рассуждения снимают вопрос, возникавший у некоторых известных механиков Советского Союза при постановке обобщенной задачи Чебышёва. Дело в том, что, как указывают Л. А. Парс [19] и В. В. Румянцев [20], силы не могут зависеть от ускорений. Поэтому многие считали, что задание связей высокого порядка потребует и задания сил реакций этих связей, зависящих не только от ускорений, но и от более высоких порядков производных от обобщенных координат. Но, как мы видели, эти силы реакций приходится в обобщенной задаче Чебышёва считать неизвестными функциями времени, подлежащими одновременному определению вместе с обобщенными координатами.

Для решения сформулированной обобщенной задачи Чебышёва были построены две теории движения неголономных систем со связями высокого порядка (см. пункты 3 и 7).

2. О математическом аппарате решения обобщенных задач Чебышёва. Решающую роль для создания теории движения неголономных систем со связями высокого порядка сыграл учебник «Теоретическая механика» [11, 1985 г.] для студентов университетов, обучающихся по специальностям «математика» и «механика». Написание этого учебника было инициировано известным ученым-механиком, заслуженным деятелем науки РСФСР, доктором технических наук, профессором Н. Н. По́ляховым (1906–1987). Как и положено учебнику, предназначавшемуся для классических университетов, он содержал и ряд последних научных результатов авторов (см., например, работы [4, 6, 7, 10, 21]). Это позволило по-новому изложить две центральные главы учебника — «Движение при наличии связей» и «Вариационные принципы механики». Важно, что при этом, опираясь на понятие обобщенного оператора Гамильтона [6, 7], введенное Н. Н. Поляховым, удалось методически однотипно изложить теории движения как голономных, так и неголономных систем.

Естественным продолжением этих глав было создание двух теорий движения неголономных систем со связями высокого порядка, необходимых для решения формулируемой обобщенной задачи Чебышёва. Эти теории были изложены в докторской диссертации М. П. Юшкова «Уравнения движения неголономных систем и вариационые принципы механики» и опубликованы в монографии [22]. В дальнейшем развитие и применение теорий происходило при плодотворном научном сотрудничестве М. П. Юшкова и С. А. Зегжды (1935–2015). В предлагаемой статье дается, в частности, обзор их научных статей и бакалаврских работ и магистерских и кандидатских диссертаций их учеников [23–32]. Среди этих работ следует выделить докторскую диссертацию Ш. Х. Солтаханова, изложенную в его монографии [33]. Все эти исследования были подытожены в двух монографиях [5, 34], причем первая из них была переведена на китайский язык [35], а вторая была опубликована на английском языке издательством Springer [36]. Решение практически важных задач из одной из важнейших областей теории управления с помощью решения обобщенной задачи Чебышёва дано в монографии [37]. Важно, что в настоящее время Издательский дом «Санкт-Петербургский государственный университет» готовит публикацию двухтомного учебника для классических университетов Н. Н. Поляхова, С. А. Зегжды, П. Е. Товстика, М. П. Юшкова «Теоретическая и прикладная механика», в котором в большой степени будут отражены перечисленные выше результаты.

Подчеркнем особую роль в идее создания теории движения неголономных систем со связями высокого порядка профессора Н. Н. Поляхова, создавшего на кафедре теоретической и прикладной механики школу аналитической механики. Но в этом отношении следует упомянуть и работы профессора В. С. Новосёлова (1926–2019), окончившего математико-механический факультет в 1951 г. и уже через год защитившего кандидатскую диссертацию по движению систем с переменными массами. Позже он опубликовал эти исследования в монографии [38]. В дальнейшем В. С. Новосёлов стал заниматься вопросами неголономной механики и защитил в 1959 г. докторскую диссертацию в Московском университете. Его научные работы в аналитической механике (см., напр., [39, 40]) высоко оценивают ученые-механики, на них неоднократно ссылался и Н. Н. Поляхов. С 1961 г. В. С. Новосёлов заведовал кафедрой теоретической астрономии (позже носившей название кафедры небесной механики), а с 1969 г. возглавил кафедру механики управляемого движения на вновь организованном факультете прикладной математики — процессов управления СПбГУ.

Помимо этого на кафедре активно продолжали заниматься различными вопросами аналитической механики, например, применением принципа Гаусса в динамике систем со случайными силами [41] или приложением неголономной механики к теории электромеханических систем [42].

Перейдем к изложению первой теории движения неголономных систем со связями высокого порядка.

3. Первая теория движения неголономных систем со связями высокого порядка. Применяя для решения поставленной обобщенной задачи Чебышёва аппарат неголономной механики, будем трактовать программу движения, заданную в виде системы дифференциальных уравнений (1.2) порядка $n \geqslant 3$, как программные линейные связи высокого порядка, а их реакции — как управляющие силы, обеспечивающие выполнение программы (1.2). Но эти силы задаются системой управления, формирующей интересующие нас силы R_σ в виде

$$R_\sigma = \Lambda_\varkappa b_\sigma^\varkappa \,, \quad \sigma = \overline{1, s} \,, \quad \varkappa = \overline{1, k} \,,$$

где коэффициенты $b_\sigma^\varkappa$ оказываются заданными, а $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa = \overline{1, k}$, являются искомыми обобщенными управляющими силами.

В первой теории движения неголономных систем со связями высокого порядка в предположении идеальности наложенных связей составляется совместная система дифференциальных уравнений относительно искомых функций времени q^σ, $\sigma = \overline{1, s}$, $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa = \overline{1, k}$:

$$\begin{gathered} \ddot{q}^{\,\sigma} = F^\sigma(t, q, \dot{q}, \Lambda) \,, \quad \sigma = \overline{1, s} \,, \\ \overset{(n-2)}{\Lambda_\varkappa} = C_\varkappa^n(t, q, \dot{q}, \Lambda, \dot{\Lambda}, \, \ldots \, , \overset{(n-3)}{\Lambda}) \,, \qquad \varkappa = \overline{1, k} \,, \qquad n \geqslant 3 \,. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Построение функций F^σ и $C_\varkappa^n$ подробно обсуждается в монографиях [5, 34]. Для интегрирования системы (3.1) должны быть заданы начальные условия

$$\begin{gathered} \Lambda_\varkappa(t_0) = \Lambda_\varkappa^0 \,, \quad \dot{\Lambda}_\varkappa(t_0) = \dot{\Lambda}_\varkappa^0 \,, \quad \ldots \quad , \quad \overset{(n-3)}{\Lambda_\varkappa}(t_0) = \overset{(n-3)}{\Lambda_\varkappa^{\,0}} \,, \\ q^\sigma(t_0) = q_0^\sigma \,, \qquad \dot{q}^\sigma(t_0) = \dot{q}_0^\sigma \,, \qquad \varkappa = \overline{1, k} \,, \quad \sigma = \overline{1, s} \,. \end{gathered} \tag{3.2}$$

4. Применение первой теории для решения некоторой обобщенной задачи Чебышёва. Количество примеров механических систем со связями высокого порядка весьма невелико. Один из таких примеров приводит Г. Гамель в своей монографии [43], накладывая на движение точки ограничение в виде требования равенства вертикальной составляющей ускорения произведению двух горизонтальных составляющих того же ускорения. Несмотря на внешнее изящество такой связи высокого порядка, она представляет мало интереса, так как не несет в себе никакого физического содержания.

По-видимому, первый пример реальной механической системы, на движение которой наложена неголономная связь высокого порядка, сформулирован в статьях [44, 45]. Остановимся на нем подробнее, так как он наглядно демонстрирует применение первой теории движения неголономных систем со связями высокого порядка для решения обобщенной задачи Чебышёва.

Рассмотрим движение искусственного спутника Земли (ИСЗ) в поле ее притяжения. Положение ИСЗ будем характеризовать полярными координатами $q^1 \equiv r,\ q^2 \equiv \varphi$, причем начало координат поместим в центре Земли. При движении спутника вокруг Земли по эллипсу его ускорение непрерывно меняется. Поставим задачу определения движения спутника, если, начиная с некоторого момента времени t_0, когда модуль его ускорения равен w_0, при дальнейшем движении спутника модуль его ускорения не будет меняться и все время будет равен w_0. Это означает, что должно выполняться условие

$$w_0^2 = (\ddot r - r\dot\varphi^2)^2 + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)^2\,.$$

Это условие означает, что, начиная с момента времени t_0, на движение спутника (космического аппарата) будет наложена нелинейная неголономная связь второго порядка

$$f_2(q,\dot q,\ddot q) \equiv (\ddot r - r\dot\varphi^2)^2 + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)^2 - w_0^2 = 0\,. \tag{4.1}$$

Таким образом, поставлена реальная механическая задача из области космонавтики, которая сформулирована в виде обобщенной задачи Чебышёва: требуется найти такую управляющую силу, приложив которую к спутнику одновременно с силой притяжения Земли, получим движение, удовлетворяющее дифференциальному уравнению (4.1).

Здесь следует оговориться: в обобщенной задаче Чебышёва система уравнений (1.2) должна быть линейной. Но к линейному уравнению мы сведем уравнение связи (4.1) путем его дифференцирования по времени. В результате получим

$$f_3 \equiv \dot f_2 = (\ddot r - r\dot\varphi^2)(\dddot r - \dot r\dot\varphi^2 - 2r\dot\varphi\ddot\varphi) + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)(\dot r\ddot\varphi + r\dddot\varphi + 2\ddot r\dot\varphi + 2\dot r\ddot\varphi) = 0\,. \tag{4.2}$$

Уравнение связи (4.2) удобно переписать в стандартном виде:

$$f_3(q,\dot q,\ddot q,\dddot q) \equiv a_{3r}\dddot r + a_{3\varphi}\dddot\varphi + a_{3,0} = 0\,, \tag{4.3}$$

в котором коэффициенты $a_{3r}, a_{3\varphi}, a_{3,0}$ зависят от r, φ и их двух первых производных.

Будем решать поставленную обобщенную задачу Чебышёва с помощью аппарата движения неголономных систем при связях высокого порядка, рассматривая связь (4.3) как программную и трактуя ее реакцию как управление, обеспечивающее выполнение программы движения, заданной в виде линейного дифференциального уравнения третьего порядка (4.3).

Запишем векторное уравнение Ньютона при наложении идеальной неголономной связи третьего порядка (4.3), используя обобщенный оператор Гамильтона, введенный Н. Н. Поляховым ($\mathbf{e}^r$, $\mathbf{e}^\varphi$ — векторы взаимного базиса введенной полярной системы координат):

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \Lambda\nabla''' f_3 \equiv \mathbf{F} + \Lambda\left(\frac{\partial f_3}{\partial \dddot{r}}\,\mathbf{e}^r + \frac{\partial f_3}{\partial \dddot{\varphi}}\,\mathbf{e}^\varphi\right). \tag{4.4}$$

Здесь

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu m}{r^2}\,\mathbf{e}^r\,,$$

где m — масса спутника, а μ — постоянная Гаусса для поля притяжения Земли.

Умножая уравнение (4.4) на векторы основного базиса $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, получим

$$\begin{gathered}\Lambda_*(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \frac{\mu}{r^2}\,,\\ \Lambda_*(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0\,,\\ \Lambda_* = \frac{\Lambda}{m} - 1\,.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Из системы (4.5) получаем первую группу дифференциальных уравнений вида (3.1):

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 + \frac{\mu}{\Lambda_* r^2}\,, \tag{4.6}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r}\,. \tag{4.7}$$

Для того чтобы получить дополнительное дифференциальное уравнение относительно Λ_* (как частный случай второй группы дифференциальных уравнений в формулах (3.1)), продифференцируем по времени первое и второе уравнения системы (4.5):

$$\dot{\Lambda}_*(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \Lambda_*(\dddot{r} - \dot{r}\dot{\varphi}^2 - 2r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + 2\frac{\mu}{r^3}\dot{r} = 0\,, \tag{4.8}$$

$$\dot{\Lambda}_*(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) + \Lambda_*(3\dot{r}\ddot{\varphi} + r\dddot{\varphi} + 2\ddot{r}\dot{\varphi}) = 0\,. \tag{4.9}$$

Чтобы исключить третьи производные и удовлетворить связи $f_2 = 0$ и $f_3 = 0$, домножим уравнения (4.8) и (4.9) на коэффициенты при $\dddot{r}$ и $\dddot{\varphi}$ в уравнении (4.3) соответственно и результаты сложим:

$$\dot{\Lambda}_* = \frac{2\mu\dot{r}\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right)}{r^3((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2)}\,.$$

Используя связь (4.1) и первое уравнение системы (4.5), сможем написать

$$\dot{\Lambda}_* = -\frac{2\mu^2}{w_0^2}\frac{\dot{r}}{\Lambda_* r^5}\,. \tag{4.10}$$

Дифференциальные уравнения (4.6), (4.7) и (4.10) задают систему, интегрирование которой дает решение поставленной задачи.

5. Исследование движений спутников с постоянными ускорениями серий «Космос» и «Молния» на основе первой теории движения неголономных систем со связями высокого порядка. Для получения начальных данных для системы дифференциальных уравнений (4.6), (4.7), (4.10) воспользуемся известными формулами (см. [11], e — эксцентриситет орбиты, p — фокальный параметр):

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}\,, \quad \dot\varphi = \frac{\sqrt{p\mu}}{r^2}\,, \quad \dot r = \frac{pe\dot\varphi\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}\,, \quad \ddot\varphi = -\frac{2\dot r\dot\varphi}{r}\,, \quad \ddot r = r\dot\varphi^2 - \frac{\mu}{r^2}\,. \tag{5.1}$$

Рассмотрим движение одного из советских спутников системы «Космос» с высотами над поверхностью Земли в перигее $H_\pi = 183$ км и в апогее $H_\alpha = 244$ км (здесь и далее численные данные взяты из интернета). Считаем, что радиус Земли $R_З = 6371$ км и ускорение силы тяжести на поверхности Земли $\mathrm{g}_0 = 9.82\cdot 10^{-3}$ км/с^2 (то есть принимаем, что Земля является шаром с равномерно распределенной массой). Тогда получаем

$$r_\pi = 6554\,\text{км}\,, \quad r_\alpha = 6615\,\text{км}\,, \quad \mu = \mathrm{g}_0 R_З^2 = 398590\,\text{км}^3/\text{с}^2\,,$$
$$e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = 0.004632\,, \quad p = r_\pi(1+e) = 6584.36\,\text{км}\,.$$

Будем рассматривать случай, когда ускорение спутника закрепляется при его положении в перигее. Тогда начальные данные при $t_0 = 0$ для численного интегрирования системы уравнений (4.6), (4.7), (4.10) по формулам (5.1) принимают значения (дополняем их согласно формулам (3.2) условием $\Lambda(0) = 0$, что эквивалентно требованию $\Lambda_*(0) = -1$):

$$\begin{gathered} r(0) = 6554\,\text{км}\,, \quad \varphi(0) = 0\,, \quad \dot r(0) = 0\,, \\ \dot\varphi(0) = 0.00119263\,\text{с}^{-1}\,, \quad \ddot r(0) = 0.0000429824\,\text{км/с}^2\,, \\ \ddot\varphi(0) = 0\,, \quad \Lambda(0) = 0\,. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Результаты численного интегрирования при начальных данных (5.2) представлены на рис. 1. Из левой части рисунка видно, что изучаемый спутник при постановке исследуемой задачи практически движется по окружности. Отметим, что исходно спутник при заданных параметрах орбиты движется по почти круговой орбите. Первоначально большинство спутников Земли запускались именно подобным образом, что позволяло при расчетах их движения пользоваться малостью эксцентриситета e орбиты. На правой части рисунка изображена зависимость от времени множителя Лагранжа, формирующего управляющую силу, обеспечивающую выполнение программы движения, заданной в виде дифференциального уравнения (4.3). Отметим, что технически создание потребной управляющей силы легко осуществить установкой на спутник дополнительного реактивного двигателя.

Если рассмотреть траекторию спутника системы «Космос» в нашей задаче в крупном масштабе, то можно заметить, что после закрепления ускорения спутник начинает вращаться, попеременно касаясь двух концентрических окружностей с центрами в центре Земли (штрихованные дуги окружности на рис. 2). После начала движения с внутренней окружности первое такое приближение к наружной окружности прослеживается на последовательности фрагментов траектории (сплошная линия), представленных на рис. 2.

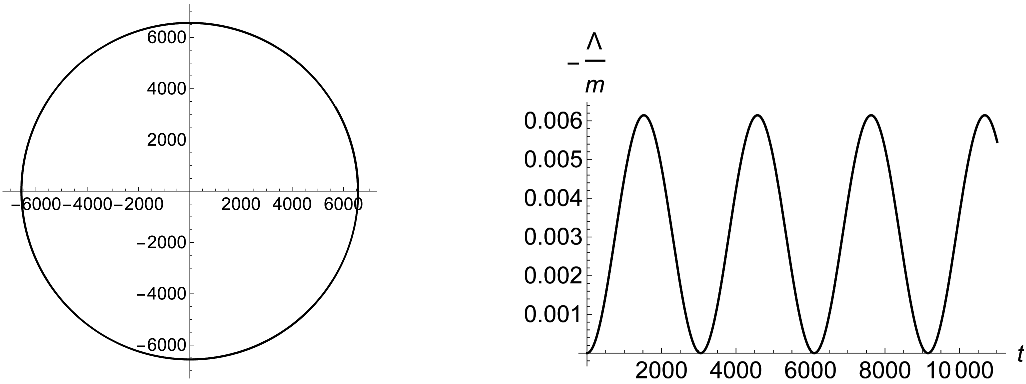

Рис. 1. Движение ИСЗ системы «Космос» с постоянной величиной ускорения при использовании первой теории движения.

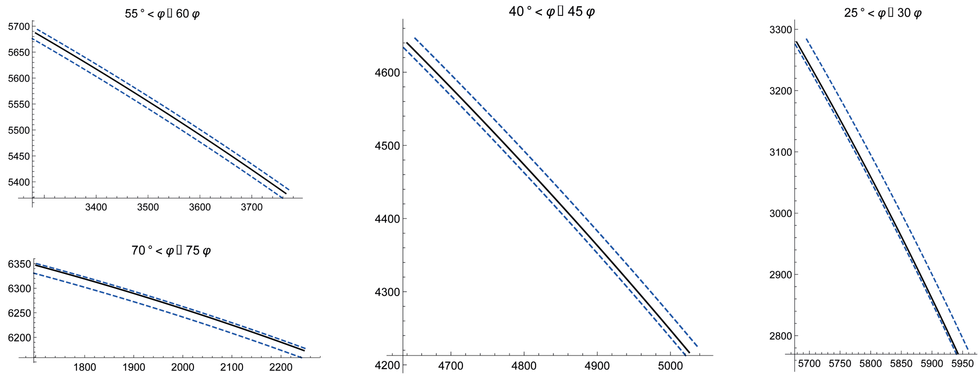

Рис. 2. Участки движения спутника системы «Космос» с постоянной величиной ускорения при использовании первой теории движения.

Более наглядно движение спутника с постоянным ускорением между двумя концентрическими окружностями наблюдается у спутников, запущенных на высоко эллиптические орбиты. С этой целью рассмотрим движение спутника системы «Молния». Перигей такой орбиты располагался над Москвой, а апогей — над Владивостоком. В силу выполнения закона площадей такие спутники быстро двигались над Москвой, но медленно, как бы «зависая», над Владивостоком. При запуске серии таких спутников над Владивостоком всегда находился спутник, обеспечивавший хорошую передачу телевизионного сигнала из Москвы.

Итак, для спутника системы «Молния» имеем

$$r_\pi = 6871\,\text{км}\,, \quad r_\alpha = 46371\,\text{км}\,, \quad \mu = \mathrm{g}_0 R_3^2 = 398590\,\text{км}^3/\text{с}^2\,,$$
$$e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = 0.741895\,, \quad p = r_\pi(1+e) = 11968.6\,\text{км}\,,$$

поэтому начальные условия для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений таковы:

$$\begin{gathered} r(0) = 6871\,\text{км}\,, \quad \varphi(0) = 0\,, \quad \dot r(0) = 0\,, \quad \Lambda(0) = 0\,, \\ \dot\varphi(0) = 0.001463\,\text{с}^{-1}\,, \quad \ddot r(0) = 0.00626368\,\text{км}/\text{с}^2\,, \quad \ddot\varphi(0) = 0\,. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Результаты интегрирования уравнений движения при начальных данных (5.3) представлены на рис. 3.

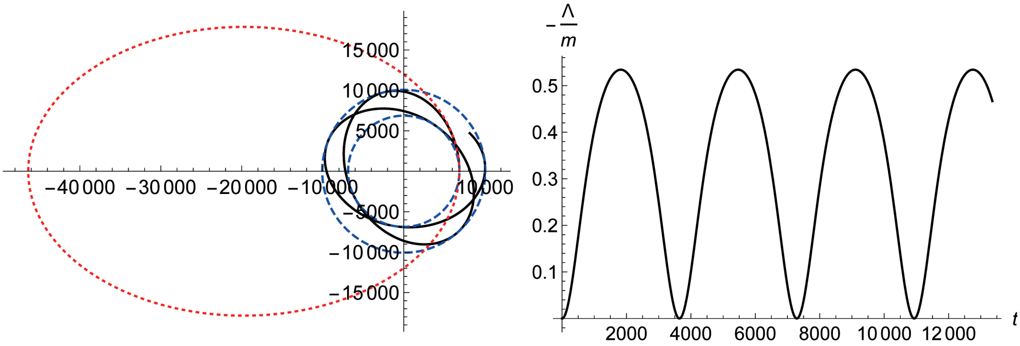

Рис. 3. Движение спутника системы «Молния» с постоянной величиной ускорения при использовании первой теории движения.

Сравним вычисления, полученные для двух рассмотренных ИСЗ. Орбита спутника серии «Космос» является почти круговой, поэтому его ускорение меняется мало. Следовательно, для создания движения с постоянным ускорением требуется незначительная обобщенная сила $\Lambda = \Lambda(t)$. В отличие от этого спутник серии «Молния» при закреплении величины ускорения в перигее начинает двигаться по почти эллиптической траектории, резко отличающейся от первоначальной орбиты. Это требует значительно бо́льшей управляющей обобщенной силы, увеличивающейся по сравнению с предыдущей на два порядка (сравнить графики на правых частях рис. 2 и 3).

Изучение движения спутника с постоянным по модулю ускорением в безразмерном виде подробно рассмотрено в монографиях [5, 34]. Помимо этого, в них изложена задача о плавном переходе спутника с круговой орбиты на круговую как пример движения с неголономной связью третьего порядка. При этом плавность перелета характеризовалась параметрами специально построенного обобщенного уравнения Сирса.

6. Касательное пространство. Реакции связей. Введем в рассмотрение дифференцируемое многообразие всех положений механической системы, которые она может иметь в данный момент времени. Евклидова структура касательного пространства к этому многообразию [46] при использовании криволинейной системы координат $q = (q^1, \ldots, q^s)$ определяется матрицей $(\mathrm{g}_{\sigma\tau})$. Элементы этой матрицы равны коэффициентам положительно определенной квадратичной формы

$$T^{(2)} = \frac{M}{2}\,\mathrm{g}_{\sigma\tau}\dot{q}^\sigma\dot{q}^\tau\,.$$

Выбранная система криволинейных координат в касательном пространстве задает основной и взаимный базисы

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s\}\,, \quad \{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^s\}\,. \tag{6.1}$$

Теперь уравнения Лагранжа второго рода (1.1) в касательном пространстве можно представить в виде векторного уравнения, имеющего вид второго закона Ньютона (подробнее см. в монографиях [5, 34])

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y}\,, \quad \text{где} \quad \mathbf{W} = W_\sigma \mathbf{e}^\sigma\,, \quad \mathbf{Y} = Q_\sigma \mathbf{e}^\sigma\,. \tag{6.2}$$

Перейдем к несвободному движению механической системы при наложении голономных связей (1.4), неголономных связей первого порядка (1.5) и линейных неголономных связей второго порядка (1.6). Отметим, что уравнения связей (1.6) могут задаваться самостоятельно, правда, в настоящее время известен единственный пример [47] подобной связи, осуществляемой механическим путем. В этом примере изучается навивание нити, несущей тяжелую точку, на поверхность вертикального кругового цилиндра. Помимо этого, в виде (1.6) можно записать как связи (1.5), продифференцировав их по времени, так и связи (1.4), продифференцировав их по времени дважды. Таким образом, связи голономной механики и связи классической неголономной механики можно представить в виде (1.6).

Обратим внимание на то, что уравнения связей (1.6) можно переписать в виде скалярных произведений

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} \cdot \mathbf{W}^K = \chi_2^\varkappa\,(t, q, \dot q)\,, \quad \chi_2^\varkappa\,(t, q, \dot q) = a_{2\sigma}^{l+\varkappa}\,\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot q^\alpha \dot q^\beta - a_{20}^{l+\varkappa}\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{6.3}$$

Подчеркнем, что правые части $\chi_2^\varkappa$ в формулах (6.3) являются заданными функциями переменных $t, q, \dot q$, а введенные векторы $\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1, k}$, имеют вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = a_{2\sigma}^{l+\varkappa} \mathbf{e}^\sigma\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,.$$

Ковариантные компоненты этих векторов определяются коэффициентами $a_{2\sigma}^{l+\varkappa}$, $\sigma = \overline{1, s}$, задаваемыми уравнениями связей (1.6). Напомним, что согласно формулам (6.1) базисы используемой криволинейной системы координат считаются заданными.

Итак, наложение на движение механической системы связей (1.6) выделяет в касательном s-мерном пространстве K-пространство размерности k с базисом $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{l+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^s\}$. Удобно ввести l-мерное ортогональное к нему L-пространство с базисом $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_l\}$, так что

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = 0\,, \quad \lambda = \overline{1, l}\,, \quad l = s - k\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,.$$

Таким образом, наложение связей (1.6) разбивает касательное пространство на прямую сумму подпространств K и L, имеющих соответственно размерности k и l. При этом легко проследить, что базис $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{l+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^s\}$ превращается в $\{\nabla' {f_1}^{l+1}, \ldots, \nabla' {f_1}^s\}$ при задании неголономных связей (1.5) и в базис $\{\nabla {f_0}^{l+1}, \ldots, \nabla {f_0}^s\}$ при задании голономных связей (1.4).

Разбиение касательного пространства уравнениями связей на два ортогональных подпространства позволяет векторное уравнение Ньютона несвободного движения механической системы

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}\,, \tag{6.4}$$

где $\mathbf{R}$ является вектором касательного пространства, который характеризует влияние наложенных связей, представить в виде двух уравнений

$$M\mathbf{W}^K = \mathbf{Y}^K + \mathbf{R}^K\,, \tag{6.5}$$

$$M\mathbf{W}_L = \mathbf{Y}_L + \mathbf{R}_L\,. \tag{6.6}$$

Так как левая часть уравнения (6.5) за счет выполнения связей (6.3) оказывается заданной функцией переменных $t, q, \dot{q}$, то для выполнения связей в этом уравнении требуется добавить составляющую реакции связей

$$\mathbf{R}^K = \Lambda_{\varkappa} \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} . \tag{6.7}$$

Кстати, отсюда видно, что при известной функции $\mathbf{Y}(t, q, \dot{q})$ мы из уравнения (6.5) при учете формулы (6.7) получаем выражения множителей Лагранжа как известные функции тех же переменных.

В свою очередь на составляющую $\mathbf{W}_L$, входящую в уравнение (6.6), математическое задание связей (1.6) (или (6.3)) никаких ограничений не накладывает, поэтому это уравнение может выполняться при любом векторе $\mathbf{R}_L$, в частности, и при

$$\mathbf{R}_L = 0 . \tag{6.8}$$

Именно связи, для которых выполняется (6.8), называются идеальными. При таких связях векторное уравнение движения в L-пространстве (6.6) приобретает вид уравнения движения свободной механической системы (6.2). Если же $\mathbf{R}_L \neq 0$, то формирование этого вектора должно объясняться из физической реализации материального задания связей. Таким образом, мы видим, что реакции идеальных связей действительно имеют вид (1.7).

7. Принцип Гаусса. Обобщенный принцип Гаусса. Вторая теория движения неголономных систем со связями высокого порядка. Классический принцип Гаусса, справедливый при задании идеальных связей (1.4), (1.5), (1.6), записывается в виде (см., напр., [5, 34])

$$\delta'' Z = 0 , \tag{7.1}$$

где применено обычное обозначение для принуждения по Гауссу

$$Z = \frac{M}{2} \left(\mathbf{W} - \frac{\mathbf{Y}}{M} \right)^2 .$$

Два штриха в формуле (7.1) подчеркивают, что варьируются только вторые производные от обобщенных координат. Производя это варьирование, получим представление принципа Гаусса в другой записи:

$$\big(M\mathbf{W} - \mathbf{Y} \big) \cdot \delta'' \mathbf{W} = 0 . \tag{7.2}$$

Так как связи считаются идеальными, то векторное уравнение несвободного движения (6.4) принимает вид

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}^K ,$$

поэтому уравнение (7.2) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{R}^K \cdot \delta'' \mathbf{W} = 0 . \tag{7.3}$$

Условие (7.3) возможно представить и как

$$\delta''(\mathbf{R})^2 = 0 , \tag{7.4}$$

что можно трактовать как требование минимальности реакции при наложении идеальных связей (1.6).

Интересно дать геометрическую интерпретацию принципа Гаусса. Напомним, что связи (1.6) разбивают касательное пространство на два ортогональных подпространства K и L с базисами $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{l+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^{s}\}$ и $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_l\}$. Сами связи в пространстве обобщенных ускорений задают l-мерную плоскость $\mathbb{T}(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$, для которой t, q и $\dot{q}$ являются заданными параметрами. На этой плоскости должны находиться концы векторов ускорения $\mathbf{W}$ механической системы. В ней же находятся и векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$, $\lambda = \overline{1, l}$. Напомним [5, 34], что вариация ускорения $\delta''\mathbf{W}$ определяется как вектор $\delta''\mathbf{W} = \delta''\ddot{q}^{\,\sigma}\mathbf{e}_\sigma$, который может быть представлен разложенным по базису пространства L и поэтому подчиняется условиям

$$\nabla'' f_2^{\varkappa} \cdot \delta''\mathbf{W} = 0\,, \qquad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{7.5}$$

Из формул (7.2) и (7.5) легко получить, что реакция идеальных неголономных связей второго порядка действительно выражается формулой (6.7), то есть принадлежит пространству K.

Запись принципа Гаусса в форме (7.4) показывает, что в случае наложения идеальных линейных неголономных связей второго порядка их реакция $\mathbf{R}/M = \mathbf{W} - \mathbf{Y}/M$ «принуждает» двигаться механическую систему с минимальным значением величины этой реакции. Поэтому принцип Гаусса иногда называют и принципом наименьшего принуждения.

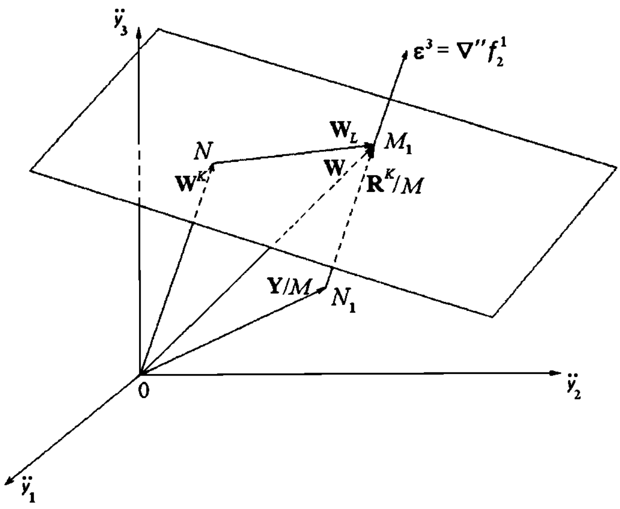

Рис. 4. Ускорение точки при наличии связи второго порядка.

Все эти рассуждения в случае движения одной материальной точки при наложении идеальной неголономной связи

$$f_2^1(t, y, \dot{y}, \ddot{y}) \equiv a_{2\sigma}^3(t, y, \dot{y})\,\ddot{y}_\sigma + a_{2,0}^3(t, y, \dot{y}) \;=\; 0\,, \quad \sigma = \overline{1, 3}\,, \tag{7.6}$$

где $y = (y_1, y_2, y_3)$ — декартовые координаты изучаемой точки, поясняются рисунком 4. На нем в пространстве ускорений точки нарисована плоскость (7.6), задаваемая вектором $\mathbf{W}^K$, на ней в точке M_1 заканчивается вектор $\mathbf{W}$ ускорения материальной точки, перпендикулярно плоскости от точки M_1 идет вектор взаимного базиса $\boldsymbol{\varepsilon}^3 = \nabla'' f_2^1$, по которому должна быть направлена реакция $\mathbf{R}^K$ идеальной связи (7.6). Сама эта реакция $\mathbf{R}^K/M$ на рис. 4 представляется вектором $\overrightarrow{N_1 M_1}$, проведенным перпендикулярно плоскости связи из конца вектора силы $\mathbf{Y}^K/M$, действующей на материальную точку. Из самого построения этого вектора следует, что он имеет наименьшую длину, то есть согласно принципу Гаусса, записанному в виде (7.4), реакция, обеспечивающая выполнение идеальной связи (7.6), действительно оказывается минимальной.

Перейдем теперь к обсуждению обобщенного принципа Гаусса. Впервые он был сформулирован в 1974 г. М. А. Чуевым, к сожалению, в малоизвестной статье [48]. Позже независимо от этого тот же принцип с помощью введения линейного преобразования сил был строго изложен в 1983 г. в работе [21]. Поясним существо этого принципа [37], расширяя приведенную выше геометрическую иллюстрацию классического принципа Гаусса.

Рассмотрим случай наложения на движение механической системы линейных неголономных связей третьего порядка

$$f_3^{\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q,\dddot q) \equiv a_{3\sigma}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q)\,\dddot q^{\,\sigma} + a_{3,0}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q) \;=\; 0\,, \quad \varkappa=\overline{1,k}\,. \tag{7.7}$$

Этими уравнениями в пространстве векторов $\dot{\mathbf{W}}$ задается l-мерная плоскость, на которой для удовлетворения связей (7.7) должны находиться концы этих векторов. Если теперь на рис. 4 заменить величины $\ddot y_1,\ \ddot y_2,\ \ddot y_3$ на $\dddot y_1,\ \dddot y_2,\ \dddot y_3$, а векторы $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}^K,\ \mathbf{W}_L,\ \mathbf{Y},\ \mathbf{R}^K$ на векторы $\dot{\mathbf{W}},\ \dot{\mathbf{W}}^K,\ \dot{\mathbf{W}}_L,\ \dot{\mathbf{Y}},\ \dot{\mathbf{R}}^K$, то аналогично предыдущим рассуждениям можно утверждать, что в случае задания связей (7.7) минимизируется величина $\dot{\mathbf{R}}/M = \dot{\mathbf{R}}^K/M$, а тем самым выполняется аналогично формуле (7.1) утверждение

$$\delta'''Z_{(1)} = 0\,, \tag{7.8}$$

где введено обозначение

$$Z_{(1)} = \frac{M}{2}\left(\dot{\mathbf{W}} - \frac{\dot{\mathbf{Y}}}{M}\right)^2. \tag{7.9}$$

Запись (7.8) можно рассматривать как обобщенный принцип Гаусса, справедливый при наложении связей (7.7). Значок (1) в формулах (7.8) и (7.9) указывает на порядок обобщенного принципа по отношению к классическому принципу Гаусса, а три штриха в записи (7.8) подчеркивают, что варииpуются лишь третьи производные от обобщенных координат. Аналогично соотношению формул (7.1) и (7.2) обобщенный принцип Гаусса (7.8) можно переписать в виде

$$\left(M\dot{\mathbf{W}} - \dot{\mathbf{Y}}\right)\cdot\delta'''\dot{\mathbf{W}} = 0\,.$$

Полученный обобщенный принцип Гаусса первого порядка в случае задания линейных неголономных связей порядка $(n+2)$ легко обобщается на обобщенный принцип Гаусса n-го порядка

$$\delta^{(n+2)}Z_{(n)} = 0\,, \tag{7.10}$$

где введено обозначение

$$Z_{(n)} = \frac{M}{2}\left(\overset{(n)}{\mathbf{W}} - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{Y}}}{M}\right)^2. \tag{7.11}$$

В формулах (7.10), (7.11) индекс (n) обозначает порядок производной по времени от вектора, а индекс $(n+2)$ указывает на то, что частный дифференциал вычисляется при фиксированных $t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ldots, \overset{(n+1)}{q^\sigma}$.

При использовании принципа (7.10) должны быть заданы начальные условия

$$\Lambda_\varkappa(t_0) = \Lambda^0_\varkappa\,, \quad \dot{\Lambda}_\varkappa(t_0) = \dot{\Lambda}^0_\varkappa\,, \quad \ldots \quad, \quad \overset{(n-3)}{\Lambda_\varkappa}(t_0) = \overset{(n-3)}{\Lambda_\varkappa}{}^0\,,$$
$$q^\sigma(t_0) = q^\sigma_0\,, \qquad \dot{q}^\sigma(t_0) = \dot{q}^\sigma_0\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,.$$

Минимизируемый в данном пункте по величине вектор $\overrightarrow{\Re} \equiv \overset{(n)}{\mathbf{R}} = M\overset{(n)}{\mathbf{W}} - \overset{(n)}{\mathbf{Y}}$ можно назвать условно «реакцией» линейных неголономных связей порядка $(n+2)$.

Составление уравнений движения согласно второй теории движения неголономных систем со связями высокого порядка базируется на применении обобщенного принципа Гаусса.

8. Исследование движений спутников с постоянными ускорениями серий «Космос» и «Молния» на основе второй теории движения неголономных систем со связями высокого порядка [44, 45, 49]**.** Запишем обобщенный принцип Гаусса для спутника Земли при наложении линейной неголономной связи третьего порядка (4.3):

$$\left(m\dot{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{F}}\right) \cdot \delta'''\dot{\mathbf{w}} = 0\,. \tag{8.1}$$

Перепишем принцип (8.1) в виде

$$(mU_\rho - P_\rho)\,\delta'''U^\rho = 0\,, \quad \rho = 1, 2\,, \quad \mathbf{U} = \dot{\mathbf{w}}\,, \quad \mathbf{P} = \dot{\mathbf{F}}\,. \tag{8.2}$$

Воспользуемся известными формулами (см. [5, 34]) для ковариантных компонент векторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{P}$:

$$U_\rho = \dot{w}_\rho - \Gamma^\tau_{\rho\sigma} w_\tau \dot{q}^\sigma\,, \quad P_\rho = \dot{F}_\rho - \Gamma^\tau_{\rho\sigma} F_\tau \dot{q}^\sigma\,, \quad \rho, \sigma, \tau = 1, 2\,, \tag{8.3}$$

где $\Gamma^\tau_{\rho\sigma}$ — символы Кристоффеля второго рода. Ковариантные компоненты ускорения и силы в формуле (8.3) имеют вид

$$w_1 = w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\,, \quad w_2 = w_\varphi = r(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\,,$$

$$F_1 = -\frac{m\mu}{r^2}\,, \quad F_2 = 0\,.$$

Вариации $\delta'''U^1$ и $\delta'''U^2$ в нашей задаче выражаются следующим образом:

$$\delta'''U^1 = \delta'''\dddot{r}\,, \quad \delta'''U^2 = \delta'''\dddot{\varphi}\,,$$

причем согласно (4.3) они связаны соотношением

$$\delta'''\dddot{\varphi} = -\frac{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2}{r(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})}\delta'''\dddot{r}\,.$$

Поэтому принцип (8.2) можно переписать следующим образом:

$$\left(mU_1 - P_1 - \frac{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2}{r(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})}(mU_2 - P_2)\right)\delta'''\dddot{r} = 0\,. \tag{8.4}$$

Так как ненулевыми символами Кристоффеля будут только

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}\,, \quad \Gamma^1_{22} = -r\,,$$

то формулы (8.3) можно представить в виде

$$U_1 = \dddot{r} - 3\dot{r}\dot{\varphi}^2 - 3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\,, \quad U_2 = 3r\ddot{r}\dot{\varphi} + 3r\dot{r}\ddot{\varphi} + r^2\dddot{\varphi} - r^2\dot{\varphi}^3\,,$$

$$P_1 = \frac{2\mu m\dot{r}}{r^3}\,, \quad P_2 = -\frac{\mu m\dot{\varphi}}{r}\,.$$

Теперь из записи принципа (8.4) из-за произвольности вариации $\delta'''\dddot{r}$ получаем

$$\dddot{r} - \frac{2\mu\dot{r}}{r^3} - 3\dot{r}\dot{\varphi}^2 - \frac{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\left(3r\ddot{r}\dot{\varphi} + 3r\dot{r}\ddot{\varphi} + \frac{\mu\dot{\varphi}}{r} + r^2\dddot{\varphi} - r^2\dot{\varphi}^3\right)}{r\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)} - 3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 0\,. \quad (8.5)$$

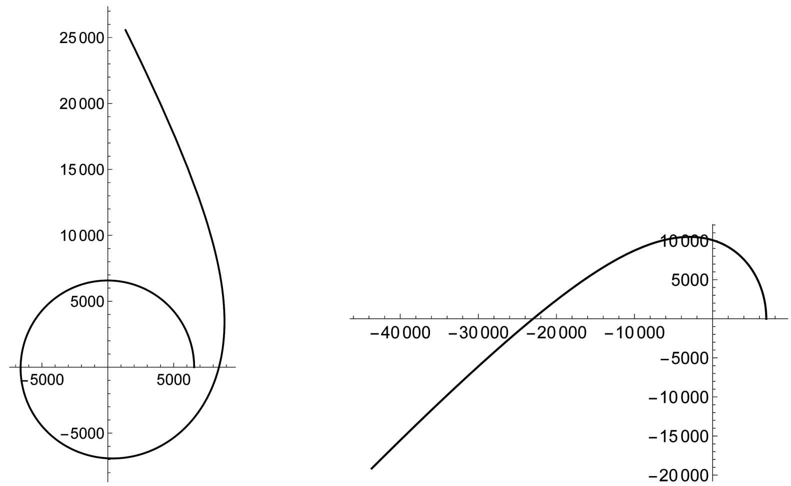

Рис. 5. Движение спутников систем «Космос» и «Молния» с постоянной величиной ускорения при использовании второй теории движения.

Решая систему из уравнений (4.3) и (8.5) относительно $\dddot{r}$ и $\dddot{\varphi}$, имеем

$$\begin{aligned}
\dddot{r} &= \frac{\dot{r}\left(2\mu + 3r^3\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\mu\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right)\left(2\dot{r}\left(2r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right) + r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\right)}{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)^2 + 4\dot{r}^2\dot{\varphi}^2 + 4r\dot{r}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}^2} + 3r^4\dot{\varphi}\ddot{\varphi}}{r^3}\,,\\
\dddot{\varphi} &= \frac{r^3\dot{\varphi}\left(r\dot{\varphi}^2 - 3\ddot{r}\right) - 3r^3\dot{r}\ddot{\varphi} - \frac{\mu\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right)\left(\dot{\varphi}\left(r\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right) - 4\dot{r}^2\right) - 2r\dot{r}\ddot{\varphi}\right)}{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)^2 + 4\dot{r}^2\dot{\varphi}^2 + 4r\dot{r}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}^2}}{r^4}\,.
\end{aligned} \quad (8.6)$$

Интегрирование полученной системы дифференциальных уравнений (8.6) при начальных данных (5.2) и (5.3) дает решение поставленной задачи.

На рис. 5 представлены траектории движения спутников серий «Космос» и «Молния», вычисленные с помощью дифференциальных уравнений, полученных по второй теории для случая, когда закрепление модуля ускорения происходит в перигее. Как видно из этих траекторий, при закреплении ускорения спутника он после некоторого вращения вокруг Земли начинает асимптотически стремиться к движению по прямой.

9. Обсуждение полученных результатов. Сравнивая траектории спутников при закреплении их ускорения в перигее, полученные по двум теориям движения неголономных систем со связями высокого порядка (при решении обобщенных задач Чебышёва, полученных разными методами), видим их принципиальное различие.

С точки зрения механики неголономных систем различие полученных решений можно пояснить следующим образом. Первая теория строится на преобразованиях векторного уравнения Ньютона в случае приложения идеальных линейных неголономных связей высокого порядка (в нашем примере на преобразованиях уравнения (4.4)). Таким уравнениям движения соответствует принцип Мажерона — Делеану (см., напр., [5, 34]), обеспечивающий минимальность модуля силы реакции связей. Во второй же теории используется обобщенный принцип Гаусса [21], дающий минимальность модуля соответствующей производной (в нашем случае первой производной) от вектора реакции наложенных связей высокого порядка.

Однако, и полученные результаты интересно дополнить следующими рассуждениями. Как известно, движение точки с постоянным ускорением происходит либо при равномерном вращении по окружности, либо в случае прямолинейного равноускоренного движения. Элементы первого такого движения при вращении спутника между двумя концентрическими окружностями получены с помощью первой теории, а асимптотическое стремление спутника к равноускоренному движению по прямой было получено в случае применения второй теории. Таким образом, видим, что две различные теории движения неголономных систем со связями высокого порядка в нашем примере удачно дополняют друг друга.

Литература

1. *Чебышёв П. Л.* Сочинения П. Л. Чебышёва, изданные под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сонина. СПб.: Имп. Акад. Наук. Т. I. 1899; Т. II. 1907.

2. Научное наследие П. Л. Чебышёва. Выпуск второй. Теория механизмов / отв. редакторы Н. Г. Бруевич и И. И. Артоболевский. М.; Л.: Изд. АН СССР. 1945.

3. *Kuteeva G., Yushkov M., Rimushkina E.* Pafnutii Lvovich Chebyshev as a mechanician // 2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading. 2015. Art. no. 7106746. URL: http://www.scopus.com/alert/results/record.url?AID=1979589&ATP=search&eid=2-s2.0-84938238584&origin=SingleRecordEmailAlert (дата обращения: 13.06.2019).

4. *Зегжда С. А., Юшков М. П.* Смешанная задача динамики // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 5. С. 628–630.

5. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Наука; Физматлит, 2005.

6. *Поляхов Н. Н.* Уравнения движения механических систем при нелинейных, неголономных связях в общем случае // Вестн. Ленингр. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 1972. Вып. 1 (№ 1). С. 124–132.

7. *Поляхов Н. Н.* О дифференциальных принципах механики, получаемых из уравнений движения неголономных систем // Вестн. Ленингр. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 1974. Вып. 3 (№ 13). С. 106–116.

8. *Ляпунов А. М.* Лекции по теоретической механике. Киев: Наукова думка, 1982.

9. *Суслов Г. К.* Основы аналитической механики. Т. I. Киев: Тип. Имп. ун-та Св. Владимира, 1900.

10. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Уравнения динамики как необходимые условия минимальности принуждения по Гауссу // Колебания и устойчивость механических систем. Прикл. механика. Вып. 5. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. С. 9–16.

11. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985; М.: Высшая школа, 2000; М.: Юрайт, 2012, 2015.

12. *Storch J., Gates S.* Motivating Kane's method for obtaining equations of motion for dynamic systems // J. of Guidance, Dynamics and Control. 1989. Vol. 12, № 4. P. 593–595.

13. *Udwadia F. E., Kalaba R. E.* A new perspective on constrained motion // Proceedings of the Royal Society. London. 1992. Vol. A439, № 1906. P. 407–410.

14. *Borri M., Bottasso C., Mantegazza P.* Equivalence of Kane's and Maggi's equations // Meccanica. 1990. Vol. 25, № 4. P. 272–274; *Они же.* Acceleration projection method in multibody dynamics // Europ. J. Mech. A/Solids. 1992. Vol. 11, № 3. P. 403–417.

15. *Blajer W.* A projetion method approach to constrained dynamic analysis // ASME. J. Appl. Mech. 1992. Vol. 59, № 3. P. 643–649.

16. *Essén H.* Projecting Newton's equations onto non-ordinate tangent vectors of the configuration space; a new look at Lagrange's equations in ferms of quasicoordinates // 18th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech., Haifa, Aug. 22–28, 1992. Haifa, 1992. P. 52; *Он же.* On the geometry of nonholonomic dynamics // ASME. J. Appl. Mech. 1994. № 61. P. 689–694.

17. *Величенко В. В.* Матричные уравнения движения неголономных систем // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 3. С. 499–504.

18. *Голубев Ю. Ф.* Основные принципы механики для систем с дифференциальными нелинейными связями // Второе Всероссийское совещание-семинар зав. каф. теорет. механики. Тез. докл. Москва, 11–16 октября 1999 г. С. 14–15.

19. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика (Перевод с англ.). М.: Наука, 1971.

20. *Румянцев В. В.* О совместимости двух основных принципов динамики и о принципе Четаева // Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. М.: Наука, 1975. С. 258–267; *Он же.* К вопросу о совместимости дифференциальных принципов механики // Аэромеханика и газовая динамика. М.: Наука, 1976. С. 172–178.

21. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 6. С. 1328–1330.

22. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002.

23. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Специальная форма уравнений динамики системы твердых тел // Доклады АН СССР. 1989. Т. 309, № 5. Вып. 4. С. 752–760.

24. *Нездеров А. А., Юшков М. П.* Продольное движение автомобиля с ускорением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2006. Вып. 2 (№ 9). С. 118–124.

25. *Зегжда С. А., Юшков М. П.* Геометрическая интерпретация уравнений Пуанкаре — Четаева — Румянцева // Прикл. мат. и мех. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 752–760.

26. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х.* Применение обобщенного принципа Гаусса к решению задачи о гашении колебаний механических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 20–25.

27. *Зегжда С. А., Товстик П. Е., Юшков М. П.* Обобщенный принцип Гамильтона — Остроградского и его применение для гашения колебаний // Доклады РАН. 2012. Т. 447, № 3. С. 280–283.

28. *Солтаханов Ш. Х.* Об одном видоизменении принципа Поляхова — Зегжды–Юшкова // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1990. Вып. 4 (№ 22). С. 58–61.

29. *Юшков М. П.* Уравнения движения машинного агрегата с вариатором как неголономной системы с нелинейной связью второго порядка // Мех. тверд. тела. 1997. № 4. С. 40–44.

30. *Солтаханов Ш. Х., Шугайло Т. С., Юшков М. П.* К вопросу о векторной записи вариационных дифференциальных принципов механики // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 63, № 1. С. 141–147.

31. *Zegzhda S., Yushkov M., Soltakhanov Sh., Naumova N., Shugaylo T.* A novel approach to suppression of oscillations // ZAMM (Zeitschrift für angew. Math. und Mech.). 2018. Vol. 98. Issue 5. P. 781–788.

32. *Shugaylo T. S., Yushkov M. P.* Motion control of a gantry crane with a container // The Eighth Polyakhov's Reading. AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959, art. no. 030021.

33. *Солтаханов Ш. Х.* Определение управляющих сил при наличии связей высокого порядка. М.: Наука; Физматлит, 2014.

34. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука; Физматлит, 2009.

35. *Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления (Перевод на китайский язык). Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2007.

36. *Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., Zegzhda S. A.* Mechanics of non-holonomic systems. A new class of control systems. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
37. *Зегжда С. А., Юшков М. П., Солтаханов Ш. Х., Шатров Е. А.* Неголономная механика и теория управления. М.: Наука; Физматлит, 2018.
38. *Новосёлов В. С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1969.
39. *Новосёлов В. С.* Пример нелинейной неголономной связи, не относящейся к типу Н. Г. Четаева // Вестн. Ленингр. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 1957. № 19. С. 106–111.
40. *Новосёлов В. С.* Вариационные методы в механике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1966.
41. *Воробьёв А. П.* О применении принципа Гаусса в динамике систем со случайными силами // Вестн. Ленингр. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 1972. № 19. С. 83–87.
42. *Родюков Ф. Ф., Львович А. Ю.* Уравнения электрических машин. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997.
43. *Hamel G.* Theoretische Mechanik. Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik. Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer-Verlag, 1949.
44. *Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Применение обобщенного принципа Гаусса для составления уравнений движения систем с неголономными связями третьего порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 1990. Вып. 3 (№ 15). С. 77–83.
45. *Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения одной неголономной системы при наличии связи второго порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. 1991. Вып. 4 (№ 22). С. 26–29.
46. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
47. *Kitzka F.* An example for the application of a nonholonomic constraint of 2nd order in particle mechanics // ZAMM. 1986. Vol. 66, № 7. S. 312–314.
48. *Чуев М. А.* К вопросу аналитического метода синтеза механизма // Изв. вузов. Машиностроение. Изд-во МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1974. № 8. С. 165–167.
49. *Dodonov V. V., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P.* The motion of an Earth satellite after imposition of a non-holonomic of the third-order constraint // The Eighth Polyakhov's Reading. AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959, art. no. 030006.

Статья поступила в редакцию 19 марта 2019 г.;
после доработки 29 марта 2019 г.;
рекомендована в печать 13 июня 2019 г.

Контактная информация:

Юшков Михаил Петрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; yushkovmp@mail.ru

Statement and solution of a generalized Chebyshev problem. I

M. P. Yushkov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Yushkov M. P. Statement and solution of a generalized Chebyshev problem. I. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 4, pp. 680–701. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.413 (In Russian)

The paper gives a review of the research performed at the department of theoretical and applied mechanics for many years and devoted to solving the generalized Chebyshev problems. By a generalized Chebyshev problem is meant the problem in which the solution of a system of motion equations should simultaneously satisfy an additional system of high-order $n \geqslant 3$ differential equations. Therefore, a new class of control problems is introduced into consideration. A generalized Chebyshev problem is considered as an extension of the Chebyshev problem from the theory of synthesis of mechanisms in which it is required to construct a device the certain links of which should perform a required motion to some accuracy. The well-known Chebyshev mechanisms with stoppings of certain links at the given positions can be named as an example of such devices. For solving a generalized Chebyshev problem it is offered to apply two theories of motion of nonholonomic systems with high-order constraints developed at the department of theoretical and applied mechanics of Saint Petersburg State University. In this case an additional system of differential equations is considered as a set of high-order programming constraints, the reaction forces of which prove to be the required control forces solving a generalized Chebyshev problem. The first theory is based on constructing a compatible system of differential equations with respect to the unknown generalized coordinates and Lagrange multipliers, the second one uses a generalized Gauss principle. Application of the theories is demonstrated by solving the problem on motion of the Earth satellite (a spacecraft) with a fixed value of acceleration. In the next paper with the same title the second theory will be applied for solving one of the most important problems of the control theory, the problem considering a mechanical system being transferred from one phase state to another in a given time.

Keywords: nonholonomic mechanics, high-order constraints, Pontryagin maximum principle, generalized Gauss principle, control, suppression of oscillation, generalized boundary problem.

References

1. Chebyshev P. L., *P. L. Chebyshev's essay publishid with the editing of A. A. Markov and N. Ya. Sonin* (Imperial Academy of Sciences Publ., St. Petersburg, Vol. I, 1899; Vol. II, 1907). (In Russian)

2. *Scientific legacy of P. L. Chebyshev. Second edition. Theory of mechanisms* (Eds. N. G. Bruevich, and I. I. Artobolevskii, Academy of Sciences of USSR Publ., Moscow, Leningrad, 1945). (In Russian)

3. Kuteeva G., Yushkov M., Rimushkina E., "Pafnutii Lvovich Chebyshev as a mechanician", *2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading*, 7106746 (2015). Available at: http://www.scopus.com/alert/results/record.url?AID=1979589&ATP=search&eid=2-s2.0-84938238584 &origin=SingleRecordEmailAlert (accessed June 13, 2019).

4. Zegzhda S. A., Yushkov M. P., "Mixed problem of dynamics", *Doklady Akademii Nauk (Proceedings of the Russian Academy of Sciences)* **374** (5), 628–630 (2000). (In Russian)

5. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Motion equations of nonholonomic systems and variational principles of mechanics. New class of control problems* (Nauka Publ., Fizmatlit Publ., Moscow, 2005). (In Russian)

6. Polyakhov N. N., "Motion equations of mechanical systems with nonlinear nonholonomic constraints in a general case", *Vestnik of Leningrad University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 1 (№ 1), 124–132 (1972). (In Russian)

7. Polyakhov N. N., "Abiout differencial principles of mechanics derived from motion equations of nonholonomic systems", *Vestnik of Leningrad University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 3 (№ 13), 106–116 (1974). (In Russian)

8. Lyapunov A. M., *Lectures on theoretical mechanics* (Naukova Dumka Publ., Kiev, 1982). (In Russian)

9. Suslov G. K., *Fundamentals of ananlitic mechanics* **I** (Imperial University of Saint Vladimir Publ., Kiev, 1900). (In Russian)

10. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., "Dynamic equations as necessary conditions for the minimality of compulsion in Gauss", *Oscillations and stability of mechanical systems. Applied mechanics*, issue 5, 9–16 (Leningrad Univ. Publ., Leningrad, 1981). (In Russian)

11. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P. *Theoretical mechanics* (Leningrad Univ. Publ., Leningrad, 1985; Vysshaya shkola Publ., Moscow, 2000; Urait, Moscow, 2012, 2015). (In Russian)

12. Storch J., Gates S., "Motivating Kane's method for obtaining equations of motion for dynamic systems", *J. of Guidance, Dynamics and Control* **12**(4), 593–595 (1989).

13. Udwadia F. E., Kalaba R. E., "A new perspective on constrained motion", *Proceedings of the Royal Society* **A439** (1906), 407–410 (London, 1992).

14. Borri M., Bottasso C., Mantegazza P., "Equivalence of Kane's and Maggi's equations", *Meccanica* **25** (4), 272–274 (1990); They, "Acceleration projection method in multibody dynamics", *Europ. J. Mech. A/Solids* **11** (3), 403–417 (1992).

15. Blajer W., "A projetion method approach to constrained dynamic analysis", *ASME. J. Appl. Mech.* **59** (3), 643–649 (1992).

16. Essén H., “Projecting Newton’s equations onto non-ordinate tangent vectors of the configuration space; a new look at Lagrange’s equations in ferms of quasicoordinates”, *18th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech., Haifa, Aug. 22–28, 1992* **52** (1992); The same, “On the geometry of nonholonomic dynamics”, *ASME. J. Appl. Mech.*, issue 61, 689–694 (1994).

17. Velichenko V. V., “Matrix equations of motion of nonholonomic systems”, *Doklady Akademii Nauk SSSR (Proceedings of the USSR Academy of Sciences)* **321**(3), 499–504 (1991). (In Russian)

18. Golubev Yu. F., “Basic principles of mechanics for systems with differential nonlinear constraints”, *Second All-Russian Meeting-Seminar by Heads of Theoretical Mechanics Departments. Abstracts, Moscow, October 11–16, 1999*, 14–15 (1999). (In Russian)

19. Pars L. A., *A treatise on analytical dynamics* (Heinemann, London, 1965).

20. Rumyantsev V. V., “On the compatibility of the two basic principles of dynamics and on the Chetaev principle”, *Problems of analytical mechanics, theories of stability and control*, 258–267 (Nauka Publ., Moscow, 1975); The same, “On the compatibility of the differential principles of mechanics”, *Aeromechanics and gas dynamics*, 172–178 (Nauka Publ., Moscow, 1976). (In Russian)

21. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., “Generalization of the Gauss principle to the case of higher-order nonholonomic systems”, *Doklady Akademii Nauk SSSR (Proceedings of the USSR Academy of Sciences)* **269** (6), 1328–1330 (1983). (In Russian)

22. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Motion equations of nonholonomic systems and variational principles of mechanics* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2002). (In Russian)

23. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., “Special form of equations of the system dynamics of solids”, *Doklady Akademii Nauk SSSR (Proceedings of the USSR Academy of Sciences)* **309**(5), issue 4, 752–760 (1989). (In Russian)

24. Nezderov A. A., Yushkov M. P., “Longitudinal movement of the vehicle with acceleration”, *Vestnik of St. Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 2, 118–124 (2006). (In Russian)

25. Zegzhda S. A., Yushkov M. P., “Geometric interpretation of the Poincare — Chetaev — Rumyantsev equations”, *J. Appl. Math. Mech.* **65**, issue 4, 752–760 (2001). (In Russian)

26. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., “Application of the generalized Gaussian principle to the problem of damping vibrations of mechanical systems”, *Journal of Computer and Systems Sciences International* **49**(2), 186–191 (2010).

27. Zegzhda S. A., Tovstik P. E., Yushkov M. P., “The Hamilton-Ostrogradski generalized principle and its application for damping of oscillations”, *Doklady Physics* **57**(11), 447–450 (2012).

28. Soltakhanov Sh. Kh., “About one modification of the Polyakhov — Zegzhda — Yushkov principle”, *Vestnik of Leningrad University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 4 (22), 58–61 (1990). (In Russian)

29. Yushkov M. P., “Motion equations of a machine unit with a variator as a nonholonomic system with a nonlinear second-order constraint”, *Solid mechanics* (4), 40–44 (1997). (In Russian)

30. Soltakhanov Sh. Kh., Shugaylo T. S., Yushkov M. P., “On Vector Form of Differential Variational Principles of Mechanics”, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **51**, issue 1, 101–105 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118010107

31. Zegzhda S., Yushkov M., Soltakhanov Sh., Naumova N., Shugaylo T., “A novel approach to suppression of oscillations ”, *ZAMM (Zeitschrift für angew. Math. und Mech.)* **98**, issue 5, 781–788 (2018).

32. Shugaylo T. S., Yushkov M. P., “Motion control of a gantry crane with a container”, *The Eighth Polyakhov’s Reading. AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings* **1959**, 030021 (2018).

33. Soltakhanov Sh. Kh., *Determination of control forces with high order constraints* (Nauka Publ., Fizmatlit Publ., Moscow, 2014). (In Russian)

34. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Nonholonomic mechanics. Theory and applications* (Nauka Publ., Fizmatlit Publ., Moscow, 2009). (In Russian)

35. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Motion equations of nonholonomic systems and variational principles of mechanics. New class of control problems* (Chinese translation, Beijing Institute of Technology Press, Beijing, 2007).

36. Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., Zegzhda S. A., *Mechanics of non-holonomic systems. A new class of control systems* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009).

37. Zegzhda S. A., Yushkov M. P., Soltakhanov Sh. Kh., Shatrov E. A., *Nonholonomic mechanics and control theory* (Nauka Publ., Fizmatlit Publ., Moscow, 2018). (In Russian)

38. Novoselov V. S., *Analytical mechanics of variable mass systems* (Leningrad Univ. Press, Leningrad, 1969). (In Russian)

39. Novoselov V. S., “Example of a nonholonomic constraint not related to the Chetaev type”, *Vestnik of Leningrad University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 19, 106–111 (1957). (In Russian)

40. Novoselov V. S., *Variational methods in mechanics* (Leningrad Univ. Press, Leningrad, 1966). (In Russian)

41. Vorobiev A. P., “On the application of the Gaussian principle in the dynamics of systems with random forces”, *Vestnik of Leningrad University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 19, 83–87 (1972). (In Russian)

42. Rodyukov F. F., L’vovich A. Yu., *Equations of electric machine* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 1997). (In Russian)

43. Hamel G., *Theoretische Mechanik. Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik.* (Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1949).

44. Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., “Application of the generalized Gaussian principle for the compilation of motion equations of systems with third-order nonholonomic constraints”, *Vestnik of Leningrad University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 3, 77–83 (1990). (In Russian)

45. Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., “Motion equations of a single nonholonomic system with a second-order constraint”, *Vestnik of Leningrad University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 4, 26–29 (1991). (In Russian)

46. Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T., *Modern geometry* (Nauka Publ., Moscow, 1979). (In Russian)

47. Kitzka F., “An example for the application of a nonholonomic constraint of 2nd order in particle mechanics”, *ZAMM* **66**(7), 312–314 (1986).

48. Chuev M. A., “To the question of the analytical method of synthesis mechanism”, *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building* (8), 165–167 (1974). (In Russian)

49. Dodonov V. V., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., “The motion of an Earth satellite after imposition of a non-holonomic of the third-order constraint”, *The Eighth Polyakhov’s Reading. AIP Conference Proceedings* **1959**, 030006 (2018).

Received: March 19, 2019
Revised: March 29, 2019
Accepted: June 13, 2019

Author’s information:

Mikhail P. Yushkov — yushkovmp@mail.ru