

## Линейный обобщенный фильтр Калмана — Бьюси\*

*Т. М. Товстик, П. Е. Товстик*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Товстик Т. М., Товстик П. Е.* Линейный обобщенный фильтр Калмана — Бьюси // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 636–645. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.409>

Рассматривается обобщенный линейный фильтр Калмана — Бьюси. Наблюдаемый процесс является суммой полезного сигнала и шума, которые считаются независимыми стационарными процессами авторегрессии, порядок которых больше единицы. Приводятся рекуррентные уравнения для фильтрации, то есть прогноза одного (полезного) процесса по наблюдениям за другим (наблюдаемым) процессом, стационарно-связанным с прогнозируемым. Также приводятся уравнения для ошибки фильтрации и для ее условных корреляций. Предложен также прямой алгоритм прогноза, основанный на анализе всех предшествующих наблюдений. Обсуждаются преимущества и недостатки обоих алгоритмов. Приводятся численные примеры.

*Ключевые слова:* фильтр Калмана — Бьюси, рекуррентный и прямой алгоритмы, процессы авторегрессии высокого порядка.

**1. Введение.** В математической модели динамической системы предполагается, что наблюдаемый полезный сигнал является суммой полезного сигнала и случайного шума. Проблема заключается в оценке полезного сигнала. Оценка одного случайного процесса по наблюдениям за другим случайным процессом, коррелированным с первым, называется фильтрацией. Первоначально были разработаны [1–4] методы фильтрации, использующие результаты наблюдений во все предшествующие моменты времени. В фильтре Калмана — Бьюси предполагается, что начальный момент фильтрации совпадает с начальным моментом наблюдений [5–7]. Многие обобщенные и приближенные фильтры Калмана — Бьюси разработаны для процессов с дискретным и непрерывным временем и для векторных процессов [8–12]. Главным образом рассматривались марковские процессы, выводились рекуррентные соотношения и изучались проблемы существования и устойчивости.

В настоящей статье сигнал и шум являются независимыми стационарными процессами авторегрессии, порядок которых больше единицы. Кратко приводятся рекуррентные алгоритмы фильтрации и ошибок фильтрации, опубликованные в [13]. Подробно описывается прямой алгоритм, представленный на конференции 9th IWS в Барселоне [14]. Обсуждаются достоинства и недостатки обоих алгоритмов. Основное различие алгоритмов заключается в том, что при некоторых исходных параметрах рекуррентный алгоритм не сходится, в то время как прямой алгоритм сходится во всех случаях. Приводятся численные примеры.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-01-00267а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

**2. Постановка задачи.** Пусть наблюдаемый процесс  $\zeta_t$  является суммой двух независимых процессов, представляющих сигнал  $\theta_t$  и шум  $\eta_t$ :

$$\zeta_t = \theta_t + \eta_t. \quad (1)$$

Процессы  $\theta_t$  и  $\eta_t$  предполагаются стационарными в широком смысле последовательностями авторегрессии порядков  $n$  и  $m$  с известными параметрами:

$$\sum_{k=0}^n a_k \theta_{t-k} = \sigma_1 \varepsilon_1(t), \quad a_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^m b_k \eta_{t-k} = \sigma_2 \varepsilon_2(t), \quad b_0 = 1. \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon_1(t)$  и  $\varepsilon_2(t)$  — некоррелированные последовательности, причем

$$\mathbf{E}(\varepsilon_i(t)) = 0, \quad \mathbf{E}(\varepsilon_i^2(t)) = 1, \quad \mathbf{E}(\varepsilon_i(t)\varepsilon_j(s)) = \delta_{ts}\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad (3)$$

где  $\delta_{kj}$  — символ Кронекера. Корни характеристических полиномов  $a(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}$  и  $b(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^{m-k}$  по модулю меньше единицы, что обеспечивает стационарность процессов [3].

Из соотношений (1)–(3) следует, что математические ожидания  $\mathbf{E}(\zeta_t) = \mathbf{E}(\theta_t) = \mathbf{E}(\eta_t) = 0$ . Дисперсии  $\sigma_\theta^2$ ,  $\sigma_\eta^2$  и корреляции  $R_\theta(k) = \mathbf{E}(\theta_{t+k}\theta_t)$ ,  $R_\eta(k) = \mathbf{E}(\eta_{t+k}\eta_t)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , процессов  $\theta_t$  и  $\eta_t$  могут быть найдены из уравнений Юла — Уокера [16]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k R_\theta(k) &= \sigma_1^2, & \sum_{k=0}^n a_k R_\theta(|i-k|) &= 0, & i &= 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{k=0}^m b_k R_\eta(k) &= \sigma_2^2, & \sum_{k=0}^m b_k R_\eta(|i-k|) &= 0, & i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4)$$

Корреляции  $R_\theta(k)$  при  $k > n$  и корреляции  $R_\eta(k)$  при  $k > m$  определяются, соответственно, по явным формулам

$$R_\theta(k) = -\sum_{i=1}^n a_i R_\theta(k-i), \quad R_\eta(k) = -\sum_{i=1}^m b_i R_\eta(k-i). \quad (5)$$

Обозначим через  $F_t^\zeta = \sigma\{\omega : \zeta_0, \dots, \zeta_t\}$  наименьшую  $\sigma$ -алгебру, порожденную величинами  $\{\zeta_0, \dots, \zeta_t\}$ .

Фильтр Калмана — Бьюси заключается в прогнозировании процесса  $\theta_t$  при  $t \geq 0$  по наблюдениям процесса  $\zeta_t$  при  $t \geq 0$ . В работе [7] был рассмотрен случай  $m = n = 1$ . Ниже рассматривается более общий случай  $n + m > 2$ .

Исключая шум  $\eta_t$  из соотношений (1) и (2), получаем

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= -\sum_{k=1}^n a_k \theta_{t+1-k} + \sigma_1 \varepsilon_1(t+1), \\ \zeta_{t+1} &= -\sum_{k=1}^m b_k \zeta_{t+1-k} - \sum_{k=1}^w (a_k - b_k) \theta_{t+1-k} + \sigma_1 \varepsilon_1(t+1) + \sigma_2 \varepsilon_2(t+1), \end{aligned} \quad (6)$$

где приняты обозначения

$$w = \max\{n, m\}, \quad a_k = 0, \quad k > n, \quad b_i = 0, \quad i > m. \quad (7)$$

Если в паре  $(\zeta, \theta)$  зависимых процессов только один процесс наблюдаем, то пара называется частично наблюдаемой.

**3. Рекуррентные соотношения для фильтра Калмана — Бьюси и его ошибки.** Обозначим оценку процесса  $\theta_t$  и его ошибку по отношению к  $\sigma$ -алгебре  $F_t^\zeta$ , соответственно, через

$$\mu_t = \mathbf{E}(\theta_t | F_t^\zeta), \quad \gamma_t = \mathbf{E}[(\theta_t - \mu_t)^2 | F_t^\zeta]. \quad (8)$$

Обозначим условные взаимные корреляции через

$$K_t(s) = \mathbf{E}[(\theta_t - \mu_t)(\theta_{t-s} - \mu_{t-s}) | F_t^\zeta]. \quad (9)$$

Установлено [7], что для фильтра Калмана — Бьюси условные корреляции  $K_t(s)$  и условные ошибки  $\gamma_t$  совпадают с безусловными.

Введем случайные величины

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{t+1} &= \theta_{t+1} - \mathbf{E}(\theta_{t+1} | F_t^\zeta), \\ \tilde{\zeta}_{t+1} &= \zeta_{t+1} - \mathbf{E}(\zeta_{t+1} | F_t^\zeta) \end{aligned} \quad (10)$$

и рассмотрим условные взаимные корреляции по отношению к  $\sigma$ -алгебре  $F_t^\zeta$

$$\begin{aligned} B_{11}(t) &= \mathbf{cov}(\tilde{\theta}_{t+1}, \tilde{\theta}_{t+1} | F_t^\zeta) = \mathbf{E}\{(\tilde{\theta}_{t+1})^2 | F_t^\zeta\}, \\ B_{12}(t) &= \mathbf{cov}(\tilde{\theta}_{t+1}, \tilde{\zeta}_{t+1} | F_t^\zeta) = \mathbf{E}\{\tilde{\theta}_{t+1} \tilde{\zeta}_{t+1} | F_t^\zeta\}, \\ B_{22}(t) &= \mathbf{cov}(\tilde{\zeta}_{t+1}, \tilde{\zeta}_{t+1} | F_t^\zeta) = \mathbf{E}\{(\tilde{\zeta}_{t+1})^2 | F_t^\zeta\}. \end{aligned} \quad (11)$$

В случае  $w = 1$  для гауссовских процессов  $\theta_t$  и  $\eta_t$ , базируясь на теореме о нормальной корреляции, в работе [7] построен оптимальный линейный фильтр  $\mu_t$  и найдена его ошибка  $\gamma_t$  в виде

$$\begin{aligned} \mu_{t+1} &= \mathbf{E}(\theta_{t+1} | \{\zeta_t^\zeta, \zeta_{t+1}\}) = \mathbf{E}(\theta_{t+1} | F_t^\zeta) + \frac{B_{12}(t)}{B_{22}(t)} [\zeta_{t+1} - \mathbf{E}(\zeta_{t+1} | F_t^\zeta)], \\ \gamma_{t+1} &= \mathbf{cov}(\theta_{t+1}, \theta_{t+1} | \{\zeta_t^\zeta, \zeta_{t+1}\}) = B_{11}(t) - \frac{B_{12}^2(t)}{B_{22}(t)}. \end{aligned} \quad (12)$$

В [7] доказывается, что если процессы  $\theta_t$  и  $\eta_t$  не гауссовские, но некоррелированы, а вторые моменты процессов (6) ограничены, то оптимальная (в среднеквадратическом смысле) линейная оценка  $\theta_t$  относительно  $\zeta_s$ ,  $0 \leq s \leq t$ , и ее ошибка удовлетворяют равенствам (12).

При  $w > 1$  прогноз  $\mu_t$  и его ошибка  $\gamma_t$  найдены в работе [13] и приводятся в нижеследующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть  $(\zeta, \theta)$  — частично наблюдаемая последовательность, удовлетворяющая соотношениям (6). Тогда величины  $\mu_{t+1}$ ,  $\gamma_{t+1}$  и  $K_{t+1}(s)$  при  $t \geq w-1$  с учетом (5) удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$\begin{aligned} \mu_{t+1} &= - \sum_{k=1}^n a_k \mu_{t+1-k} + \frac{B_{12}(t)}{B_{22}(t)} \left[ \zeta_{t+1} + \sum_{k=1}^m b_k \zeta_{t+1-k} + \sum_{k=1}^w (a_k - b_k) \mu_{t+1-k} \right], \\ \gamma_{t+1} &= B_{11}(t) - \frac{B_{12}^2(t)}{B_{22}(t)}, \\ K_{t+1}(s) &= - \sum_{k=1}^n a_k [(1 - \delta_{ks}) K_{t+1-\min(k,s)}(|k-s|) + \delta_{ks} \gamma_{t+1-s}] + \\ &+ \frac{B_{12}(t)}{B_{22}(t)} \sum_{k=1}^w (a_k - b_k) [(1 - \delta_{ks}) K_{t+1-\min(k,s)}(|k-s|) + \delta_{ks} \gamma_{t+1-s}], \end{aligned} \quad (13)$$

где при  $s = 1, 2, \dots, w - 1$  условные корреляции  $K_{t+1}(s)$  вычисляются по формулам (9), а корреляции  $B_{ij}(t)$  могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned}
 B_{11}(t) &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \gamma_{t+1-k} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=k+1}^n a_k a_r K_{t+1-k}(r-k) + \sigma_1^2, \\
 B_{12}(t) &= \sum_{k=1}^n a_k (a_k - b_k) \gamma_{t+1-k} + \\
 &+ \sum_{k=1}^{w-1} \sum_{r=k+1}^w (a_k (a_r - b_r) + a_r (a_k - b_k)) K_{t+1-k}(r-k) + \sigma_1^2, \\
 B_{22}(t) &= \sum_{k=1}^w (a_k - b_k)^2 \gamma_{t+1-k} + \\
 &+ 2 \sum_{k=1}^{w-1} \sum_{r=k+1}^w (a_k - b_k)(a_r - b_r) K_{t+1-k}(r-k) + \sigma_1^2 + \sigma_2^2.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Доказательство теоремы приведено в работе [13].

#### 4. Предельная ошибка фильтрации.

**Определение.** Предельная ошибка фильтрации существует, если существуют конечные пределы:

$$\gamma_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t, \quad K_\infty(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} K_t(s), \quad s = 1, 2, \dots, w - 1, \tag{15}$$

вытекающие из соотношений (13), и если они удовлетворяют условиям А:

- 1)  $0 < \gamma_\infty < \infty$ ,
- 2)  $|K_\infty(s)| \leq \gamma_\infty$ ,  $1 \leq s \leq w - 1$ ,
- 3) предельная ковариационная матрица

$$K_\infty = \begin{pmatrix} \gamma_\infty & K_\infty(1) & \dots & K_\infty(w-1) \\ K_\infty(1) & \gamma_\infty & \dots & K_\infty(w-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_\infty(w-1) & K_\infty(w-2) & \dots & \gamma_\infty \end{pmatrix}$$

положительно определенная.

При вычислении предельных величин (15) следует в уравнениях (13) и (14) положить  $t = \infty$ . Тогда уравнения (13) при  $\gamma_t = \gamma_\infty$  и  $K_t[s] = K_\infty[s]$  принимают вид

$$\begin{aligned}
 \gamma_\infty &= \gamma_\infty \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=k+1}^n a_k a_r K_\infty(r-k) + \sigma_1^2 - B_{12}^2/B_{22}, \\
 K_\infty(s) &= - \sum_{k=1}^n a_k [(1 - \delta_{ks})K_\infty(|k-s|) + \delta_{ks}\gamma_\infty] + \\
 &+ \frac{B_{12}}{B_{22}} \sum_{k=1}^w (a_k - b_k) [(1 - \delta_{ks})K_\infty(|k-s|) + \delta_{ks}\gamma_\infty],
 \end{aligned} \tag{16}$$

где  $1 \leq s \leq w - 1$ , а

$$\begin{aligned}
 B_{12} &= \sum_{k=1}^n a_k(a_k - b_k)\gamma_\infty + \sum_{k=1}^{w-1} \sum_{r=k+1}^w (a_k(a_r - b_r) + a_r(a_k - b_k))K_\infty(r - k) + \sigma_1^2, \\
 B_{22} &= \sum_{k=1}^w (a_k - b_k)^2\gamma_\infty + 2 \sum_{k=1}^{w-1} \sum_{r=k+1}^w (a_k - b_k)(a_r - b_r)K_\infty(r - k) + \sigma_1^2 + \sigma_2^2.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Система (16) — это система  $w$  алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\gamma_\infty$ ,  $K_\infty(s)$ ,  $1 \leq s \leq w - 1$ . Назовем уравнения (16) *предельными уравнениями*.

Численные примеры, приведенные в [13], а также рассмотренные ниже (см. п. 7), позволяют сделать следующие выводы:

- 1) если предельные уравнения (16) имеют единственное решение, удовлетворяющее условиям А, тогда оно совпадает с решением уравнений (13) при  $t \rightarrow \infty$ ,
- 2) если предельные уравнения имеют более одного решения, удовлетворяющего условиям А, тогда одно из них совпадает с решением уравнений (13) при  $t \rightarrow \infty$ ,
- 3) если предельные уравнения не имеют решений, удовлетворяющих условиям А, тогда и уравнения (13) не имеют таких решений.

**5. Прямой алгоритм. Замечание о начальной части рекуррентного процесса.** В связи с тем, что для рассматриваемого ниже прямого алгоритма прогноз процесса  $\theta_t$  и его ошибка отличаются от соответствующих величин для рекуррентного алгоритма, эти величины для рекуррентного алгоритма будем обозначать в дальнейшем через  $\mu_t^r$ ,  $\gamma_t^r$ , а для прямого алгоритма — через  $\mu_t^d$ ,  $\gamma_t^d$ . В отличие от рекуррентного алгоритма в прямом алгоритме прогноз  $\mu_t^d$  ищем с использованием всех предшествующих наблюдений процесса  $\zeta_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, t$ . При линейной аппроксимации прогноз  $\mu_t^d$  ищем в виде

$$\mu_t^d = \sum_{k=0}^t \alpha_k^{(t)} \zeta_{t-k}
 \tag{18}$$

и выбираем коэффициенты  $\alpha_k^{(t)}$  так, чтобы ошибка фильтрации  $\gamma_t^d = \mathbf{E}(\theta_t - \mu_t^d)^2$  была минимальной. В силу независимости процессов  $\theta_t$  и  $\eta_t$  и соотношений  $\zeta_t = \theta_t + \eta_t$  и  $\mathbf{E}(\theta_t \zeta_s) = R_\theta(|t - s|)$  получаем

$$\gamma_t^d = \mathbf{E}(\theta_t - \mu_t^d)^2 = R_\theta(0) - 2 \sum_{k=0}^t \alpha_k^{(t)} R_\theta(k) + \sum_{k=0}^t \sum_{p=0}^t \alpha_k^{(t)} \alpha_p^{(t)} R_\zeta(|k - p|).
 \tag{19}$$

Здесь  $R_\zeta(t) = R_\theta(t) + R_\eta(t)$ , а корреляции  $R_\theta(t)$  и  $R_\eta(t)$  находятся из уравнений Юла — Уокера (4), (5).

Дифференцируя ошибку фильтрации  $\gamma_t^d$  по коэффициентам  $\alpha_k^{(t)}$ , получаем линейную систему уравнений для их вычисления:

$$\sum_{p=0}^t \alpha_p^{(t)} R_\zeta(|k - p|) = R_\theta(k), \quad k = 0, 1, \dots, t,
 \tag{20}$$

и находим минимальное значение величины  $\gamma_t^d$ :

$$\gamma_t^d = R_\theta(0) - \mathbf{E}(\mu_t^d)^2 = R_\theta(0) - \sum_{k=0}^t \alpha_k^{(t)} R_\theta(k). \quad (21)$$

**Замечание.** Очередной шаг рекуррентного процесса в момент  $t$  использует информацию о  $w$  предшествующих значениях прогноза  $\mu_{t-k}^r$ ,  $k = 1, 2, \dots, w$ . Поэтому для начала работы алгоритма необходимо задать величины  $\mu_t^r$ ,  $0 \leq t \leq w - 1$ . В работе [13] описан алгоритм построения этих величин. Описанный выше прямой алгоритм также дает способ их вычисления. Для этого полагаем  $t = 0, 1, \dots, w - 1$  и получаем значения  $\mu_t^r = \mu_t^d$  и  $\gamma_t^r = \gamma_t^d$ , которые могут быть использованы в рекуррентных уравнениях (13).

## 6. Прямой алгоритм и его сравнение с рекуррентным алгоритмом.

Формальная разница между рекуррентным и прямыми алгоритмами состоит в том, что рекуррентный алгоритм использует идентичные операторы для каждого  $t > w - 1$ , тогда как при использовании прямого алгоритма необходимо решать систему уравнений (20), порядок которой растет с ростом  $t$ .

Для прямого алгоритма справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Если модули всех корней  $z_j$  уравнений

$$\sum_{k=0}^n a_k z^{n-k} = 0, \quad \sum_{k=0}^m b_k z^{m-k} = 0 \quad (22)$$

меньше единицы,

$$Z = \max\{|z_j|\} < 1, \quad j = 1, 2, \dots, m + n, \quad (23)$$

тогда при  $t \rightarrow \infty$  выполнены предельные соотношения

- (i)  $\gamma_t^d \rightarrow \gamma_\infty^d < \infty$ ,
- (ii)  $\alpha_k^t \rightarrow \alpha_k^\infty < \infty$  равномерно по  $k$ ,
- (iii)  $\alpha_k^\infty \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Общее решение системы разностных уравнений (5) (например, для величин  $R_\theta(t)$ ) имеет вид

$$R_\theta(t) = \sum_{j=1}^n C_j z_j^t, \quad (24)$$

где  $C_j$  — произвольные постоянные, а  $z_j$  — корни первого уравнения (22). Учитывая, что  $R_\zeta(t) = R_\theta(t) + R_\eta(t)$  и  $Z < 1$ , получаем

$$\{|R_\theta(t)|, |R_\eta(t)|, |R_\zeta(t)|\} \leq L Z^t, \quad \{R_\theta(t), R_\eta(t), R_\zeta(t)\} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (25)$$

где постоянная  $L$  не зависит от  $t$ .

Теперь заключения (ii) и (iii) могут быть выведены из системы уравнений (20) с симметричной матрицей коэффициентов  $R_\zeta(|k - p|) \leq L_1 Z^{|k-p|}$ , постоянных на

диагоналях, параллельных главной диагонали, и убывающих при удалении от нее. Заключение (i) очевидно.

Теорема была проверена на численных экспериментах. Строгое доказательство пока не получено.

Переходим к обсуждению и сравнению рекуррентного и прямого алгоритмов. Для рекуррентного алгоритма прогноз и его ошибку будем обозначать через  $\mu_t^r$ ,  $\gamma_t^r$ , а для прямого алгоритма — через  $\mu_t^d$ ,  $\gamma_t^d$ .

Из теоремы 2 следует, что для прямого алгоритма ошибка  $\gamma_t^d$  при  $t \rightarrow \infty$  всегда сходится к конечному значению  $\gamma_\infty^d$  в то время, как для рекуррентного алгоритма сходимость может не иметь места.

Рассмотрим обратный фильтр Калмана — Бьюси, в котором процесс  $\theta_t$  является шумом, а процесс  $\eta_t$  — полезным сигналом. Вместо (8) имеем

$$\tilde{\mu}_t = \mathbf{E}(\eta_t | F_t^\zeta), \quad \tilde{\gamma}_t = \mathbf{E}[(\eta_t - \tilde{\mu}_t)^2 | F_t^\zeta].$$

Тогда ошибки прогнозов для обоих фильтров одинаковы:  $\gamma_t = \tilde{\gamma}_t$  для всех  $t$ , причем этот факт имеет место и для рекуррентного, и для прямого алгоритмов.

Во всех случаях ошибка прогноза прямого алгоритма не превосходит ошибки прогноза рекуррентного алгоритма ( $\gamma_t^d \leq \gamma_t^r$ ) и, как правило, она меньше ( $\gamma_t^d < \gamma_t^r$ ). Действительно, при вычислении минимума ошибки (19) по  $\alpha_k^{(t)}$  в рамках прямого алгоритма все величины  $\alpha_k^{(t)}$  являются искомыми и находятся из системы (20). В рамках рекуррентного алгоритма построение текущей оценки  $\mu_{t+1}^r$  базируется на наблюдениях  $\zeta_{t+1-k}$ ,  $0 \leq k \leq m$ , и на уже найденных оценках  $\mu_{t-k}^r$ ,  $0 \leq k \leq w-1$ , которые являются неточными.

При использовании прямого алгоритма для больших  $t$  можно избежать решения системы (20) при всех  $t$ . Возьмем малое  $\varepsilon$  (скажем,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ) и в силу теоремы 2 найдем такое  $\tau$ , что  $|\alpha_p^{(t)}| < \varepsilon$  при всех  $t > \tau$ . Тогда при  $t > \tau$  для прогноза и его ошибки можно использовать приближенные соотношения

$$\mu_t^d = \sum_{k=0}^{\tau} a_k^{(\tau)} \zeta_{t-k}, \quad \gamma_t^d = R_\theta(0) - \sum_{k=0}^{\tau} \alpha_k^{(\tau)} R_\theta(t-k). \quad (26)$$

## 7. Численные примеры и обсуждение.

**Пример 1.** Рассмотрим два процесса авторегрессии (2): полезный сигнал  $\theta_t$  и шум  $\eta_t$  с параметрами

$$\begin{aligned} \theta_t : n = 3, \{a_1, a_2, a_3\} &= \{-2.4, 2.08, -0.64\}, \quad \sigma_1 = 1, \\ \eta_t : m = 3, \{b_1, b_2, b_3\} &= \{-1.1, -0.3, 0.432\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Оказалось, что при использовании рекуррентного алгоритма поведение ошибки прогноза  $\gamma_t^r$  при  $t \rightarrow \infty$  существенно зависит от величины  $\sigma_\eta$  (т. е. от уровня шума).

Для  $\sigma_\eta \leq 0.4$  предельные уравнения (16) имеют два корня, удовлетворяющих условию А,  $\gamma_\infty^{r,1}$  и  $\gamma_\infty^{r,2}$ , и алгоритм сходится к одному из них. Например, при  $\sigma_\eta = 0.4$  будет  $\gamma_\infty^{r,1} = 0.149$  и  $\gamma_\infty^{r,2} = 0.306$ , и ошибка прогноза  $\gamma_t^r$  при  $t \rightarrow \infty$  сходится к  $\gamma_\infty^{r,1}$ . В то же время, для прямого алгоритма ошибка  $\gamma_t^d$  имеет предельное значение  $\gamma_\infty^d = 0.123$ , меньшее, чем  $\gamma_\infty^{r,1}$ .

Для  $\sigma_\eta \geq 0.5$  уравнения (16) не имеют решений, удовлетворяющих условиям А, и при  $t \rightarrow \infty$  ошибка поочередно принимает значения  $\gamma_\infty^{r,1}$  и  $\gamma_\infty^{r,2}$ .

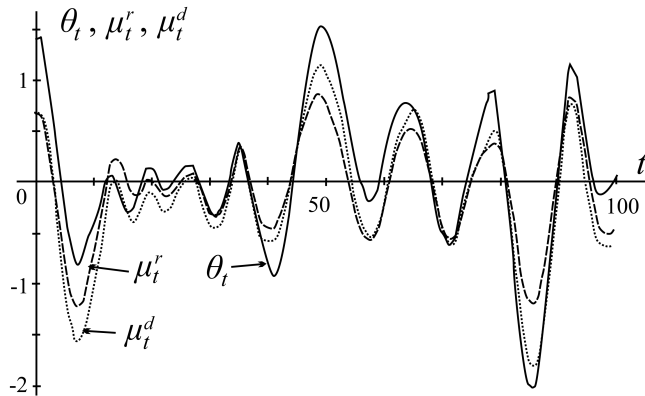
Рассмотрим подробнее результаты численного моделирования в случае  $\sigma_\eta = 0.5$ . Сигнал  $\theta_t$  и шум  $\eta_t$  были построены по формулам (2), (27). По формуле  $\zeta_t = \theta_t + \eta_t$  был найден наблюдаемый процесс, по значениям которого построены оценки  $\mu_t^r$  и  $\mu_t^d$  по рекуррентному и прямому алгоритмам. При этом при  $t > 40$  оценка  $\mu_t^d$  была построена по формуле (26).

В таблице приведены первые значения ошибок прогноза  $\gamma_t^r$  и  $\gamma_t^d$ . При  $t < 3$  эти ошибки равны по построению (см. замечание в п. 5). С ростом  $t$  ошибки  $\gamma_t^d$  монотонно убывают и стремятся к предельному значению  $\gamma_\infty^d = 0.171$ . Ошибки  $\gamma_t^r$  характеризуются более сложным поведением. С ростом  $t$  они преимущественно растут и при  $t \rightarrow \infty$  последовательно принимают два значения  $\gamma_t^{r,1} = 0.369$  и  $\gamma_t^{r,2} = 0.374$ .

Ошибки прогноза  $\gamma_t^r$  и  $\gamma_t^d$

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\infty$
$\gamma_t^r$	0.2	0.199	0.186	0.184	0.187	0.191	0.195	0.198	0.369 – 0.374
$\gamma_t^d$	0.2	0.199	0.186	0.180	0.177	0.176	0.174	0.173	0.171

На рисунке при  $0 \leq t \leq 100$  показаны полезный сигнал  $\theta_t$  (сплошная линия) и его оценки по рекуррентному алгоритму  $\mu_t^r$  (штриховая линия) и по прямому алгоритму  $\mu_t^d$  (пунктирная линия). Несмотря на то, что ошибки фильтрации  $\gamma_t^r$  и  $\gamma_t^d$  существенно различаются (см. таблицу), визуально трудно отдать предпочтение рекуррентному или прямому алгоритму построения оценки с точки зрения близости к оцениваемому процессу  $\theta_t$ .



Функции  $\theta_t$ ,  $\mu_t^r$  и  $\mu_t^d$  при  $\sigma_\eta = 0.5$ .

**Пример 2.** Рассмотрим процессы (2) с параметрами

$$\begin{aligned}
 \theta_t : n = 3, \quad \{a_1, a_2, a_3\} = \{-2.2, 1.85, -0.534\}, \quad \sigma_1 = 0.136, \quad \sigma_\theta = 1, \\
 \eta_t : m = 3, \quad \{b_1, b_2, b_3\} = \{1.7, 0.64, -0.082\}, \quad \sigma_2 = 0.093, \quad \sigma_\eta = 1.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Для этих процессов предельные уравнения (16) не имеют решений, удовлетворяющих условиям А. Ошибка  $\gamma_t^r \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$  и оценки  $\mu_t^r$  расходятся. В то же время прямой алгоритм сходится и  $\gamma_\infty^d = 0.0036$ .



## Литература

1. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных процессов // Изв. АН СССР. Математика. 1941. № 5. С. 3–14.
2. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time-series. Cambridge, 1949.
3. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М.: Наука, 1990.
4. Товстик Т. М. Стационарные случайные процессы с рациональными спектральными плотностями. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2000.
5. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction theory // Journal of Basic Engineering. 1961. Vol. 83, no. 1. P. 95–108.
6. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана — Бьюси. М., 1982.
7. Ширяев А. Н. Вероятность — 2. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
8. Cheremensky A., Fomin V. N. Operator Approach to Linear Control Systems. Springer, 1996.
9. Simon D. Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches. Wiley-Interscience, 2006.
10. Vozic S. M. Digital and Kalman filtering. Butterworth-Heinemann, 1994.
11. Граничин О. Н. Введение в методы стохастической оптимизации и оценивания. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2003.
12. Chui Ch. K., Chen G. Kalman Filtering with Real-Time Applications. In: Springer Series in Information Sciences. Vol. 17. 4th ed. New York: Springer, 2009.
13. Товстик Т. М. Линейный фильтр Калмана-Бьюси с авторегрессионными сигналом и шумом // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5(63). Вып. 3. С. 452–463.
14. Tovstik T. M., Tovstik P. E., Shirinkina D. A. Linear generalized Kalman-Bucy filter // Ninth Int. Workshop on Simulation. Barcelona, 2018.
15. Ширяев А. Н. Вероятность — 1. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
16. Yule G. U. On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers // Phil. Trans. 1927. Vol. A, 226. P. 267–298.

Статья поступила в редакцию 8 мая 2019 г.;  
после доработки 4 июня 2019 г.;  
рекомендована в печать 13 июня 2019 г.

### Контактная информация:

Товстик Татьяна Михайловна — доц.; peter.tovstik@mail.ru  
Товстик Петр Евгеньевич — проф.; peter.tovstik@mail.ru

## Linear generalized Kalman — Bucy filter

T. M. Tovstik, P. E. Tovstik

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Tovstik T. M., Tovstik P. E. Linear generalized Kalman — Bucy filter. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 4, pp. 636–645. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.409> (In Russian)

The linear generalized Kalman — Bucy filter problem is studied. An observed process is a sum of a useful signal and a noise. A signal and a noise are independent stationary auto-regressive processes with orders exceeding 1. The filter estimates a signal by using an observed process. Two algorithms of filter are considered, recurrent and direct. In frames of the recurrent algorithm to find the next in turn estimation of a signal the current observation and some last previous filter estimations are used. The direct algorithm uses all previous observations directly. For the both algorithms the errors of estimation are found. The advantages and locks of both algorithms are discussed. Calculations at the

recurrent algorithm does depend on time of observation. The direct algorithm is reduced to a linear algebraic system, order of that increases with a time. On the other side, the direct algorithm converges with growth of time in all cases, and the recurrent algorithm sometime may not converge. Numerical examples are given.

*Keywords:* Kalman — Bucy filter, recurrent and direct algorithms, high order auto-regressive processes.

## References

1. Kolmogorov A. N., “Interpolation and extrapolation of stationary random processes”, *Izv. AN USSR. Mathematics* (5), 3–14 (1941). (In Russian)
2. Wiener N., *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time-series* (Cambridge, 1949).
3. Rozanov Ju. A., *Stationary random processes* (Nauka Publ., Moscow, 1990). (In Russian)
4. Tovstik T. M., *Stationary random processes with rational spectral densities* (St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Press, 2000). (In Russian)
5. Kalman R. E., Bucy R. S., “New results in linear filtering and prediction theory”, *Trans. ASME, J. Basic Eng.* **83** (1), 95–108 (1961).
6. Brammer K., Siffing G., *Kalman — Bucy — Filter. Deterministische Beobachtung und Stochastische Filterung* (Munche, 1975).
7. Shiryaev A. N., *Probability* **2** (Springer-Verlag, New York, 2018).
8. Cheremensky A., Fomin V. N., *Operator Approach to Linear Control Systems* (Springer, 1996).
9. Simon D., *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches* (Wiley-Interscience, 2006).
10. Bozic S. M., *Digital and Kalman filtering* (Butterworth-Heinemann, 1994).
11. Granichin O. N., *Optimal filter of random processes* (St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Publ., 2013). (In Russian)
12. Chui Ch. K., Chen G., *Kalman Filtering with Real-Time Applications*, in: *Springer Series in Information Sciences* **17** (4th ed., Springer, New York, 2009).
13. Tovstik T. M., “Linear Kalman-Bucy Filter with Autoregressive Signal and noise”, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **51** (3), 276–285 (2018).
14. Tovstik T. M., Tovstik P. E., Shirinkina D. A., “Linear generalized Kalman-Bucy filter”, *Ninth Int. Workshop on Simulation, Barcelona* (2018).
15. Shiryaev A. N., *Probability* **1** (3rd ed., New York, Springer-Verlag, 2016).
16. Yule G. U., “On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer’s sunspot numbers”, *Phil. Trans. A*, **226**, 267–298 (1927).

Received: May 8, 2019

Revised: June 4, 2019

Accepted: June 13, 2019

### Authors’ information:

*Tovstik Tatiana M.* — peter.tovstik@mail.ru

*Tovstik Petr E.* — peter.tovstik@mail.ru