Целые функции порядка $1/2$ в приближении функций на полуоси*

О. В. Сильванович¹, Н. А. Широков²

¹ Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

² Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Сильванович О. В., Широков Н. А. Целые функции порядка $1/2$ в приближении функций на полуоси // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 627–635.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.408>

В настоящей работе доказывается теорема о приближении функций из класса Гёльдера на счетном объединении отрезков, лежащих на положительном луче, с помощью целых функций порядка $1/2$, ограниченных на этом луче. Задачи о приближении целых функций на подмножествах полуоси с помощью целых функций порядка $1/2$ тесно связаны с задачами приближения функций на подмножествах всей оси с помощью целых функций экспоненциального типа, но имеют при этом свою специфику. В данной работе рассматриваются отрезки I_n , длина которых имеет порядок n , и расстояние между I_n и I_{n+1} тоже имеет порядок n . В предыдущих работах рассматривались случаи всей полуоси или объединения конечного числа отрезков и луча. Как и для задачи приближения функций из класса Гёльдера на объединении счетного множества отрезков на всей оси, оказывается, что скорость приближения в окрестности концов отрезков при увеличении типа функций выше, чем в окрестности середины отрезков.

Ключевые слова: классы Гёльдера, аппроксимация, целые функции порядка $1/2$, подмножество полуоси.

В отличие от целых функций экспоненциального типа, имеющих порядок 1, целые функции порядка $1/2$ в теории аппроксимации появились пока лишь в нескольких работах [1, 2]. Однако представляется интересным перенесение ряда результатов, известных для целых функций экспоненциального типа, на приближения с помощью целых функций порядка $1/2$. Данная работа мотивирована статьями авторов [3–5], в которых конструктивно описан класс функций $\Lambda_M^{r+\omega}(E)$ на дизъюнктном множестве отрезков E вещественной оси, где $\Lambda_M^{r+\omega}(E) = \{f : \forall x_1, x_2 \in E : |f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \leq c_f \omega(|x_2 - x_1|), |f(x)| \leq M, x \in E\}$. Скорость приближения целыми функциями экспоненциального типа на дизъюнктном объединении отрезков не является равномерной, вблизи концов отрезков она выше, чем в окрестности середин отрезков. Как оказывается, при описании классов функций с помощью приближения целыми функциями порядка $1/2$ имеется аналогичный эффект. Вопросы о приближении на всей оси и на полуоси тесно связаны, при этом изучение какого-то класса гладких функций на полуоси приводит к классу функций на оси, гладкость в котором зависит от веса. Перейдем к формулировкам результатов. Пусть

* Работа Широкова Н. А. поддержана грантом РФФИ (№ 17-01-00607-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ — подмножество полуоси $[1; \infty)$, $I_1 = [1, b_1]$, $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 2$, $1 = a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_n < a_{n+1}$, $J_n \stackrel{\text{def}}{=} (b_n, a_{n+1})$, $n \geq 1$. Предполагаем, что существуют постоянные $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ такие, что для всякого n выполнены соотношения

$$c_1 n \leq b_n - a_n \leq c_2 n, \quad (1)$$

$$c_3 n \leq a_{n+1} - b_n \leq c_4 n. \quad (2)$$

Пусть $0 < \alpha < 1$, положим $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$ и обозначим $H_1^{r+\alpha}(E) = \Lambda_1^{r+\omega_\alpha}(E)$. Через C_σ обозначим множество целых функций порядка $1/2$ и типа $\leq \sigma$ таких, что для $F \in C_\sigma$ выполнено

$$|F(x)| \leq c_F, \quad x \in [0, \infty). \quad (3)$$

Отметим, что условие (3) влечет неравенство

$$|F(z)| \leq c_F e^{\sigma |\operatorname{Im} \sqrt{z}|}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $f \in H_1^{r+\alpha}(E)$. Тогда существуют постоянные c_5 и c_6 , зависящие от f, E, r и α такие, что для любого $\sigma \geq 1$ найдется функция $F_\sigma \in C_\sigma$ такая, что справедливо неравенство

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leq \min \left(c_5 \frac{1}{\sigma^{r+\alpha}} \left(\sqrt{(x - a_n)(b_n - x)} + \frac{n}{\sigma} \right)^{r+\alpha}, c_6 \right), \quad x \in I_n, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Мы будем доказывать теорему 1, переводя задачу приближения функции, заданной на подмножестве полуоси с помощью целых функций порядка $1/2$, в задачу приближения функции, заданной на подмножестве оси с помощью целых функций порядка 1. Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

1. Леммы о производных.

Лемма 1. Пусть комплекснозначная функция f задана на промежутке $[0; A]$, $A \geq 1$ и удовлетворяет условиям $|f(x)| \leq 1$, $|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \leq b|x_2 - x_1|^\alpha$, $r \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, $x_1, x_2 \in [0; A]$. Тогда существуют постоянные $b_1, \dots, b_r$, зависящие только от b, r и α такие, что справедливы оценки

$$|f^{(k)}(x)| \leq b_k, \quad k = 1, \dots, r. \quad (6)$$

Утверждения, аналогичные лемме 1, изучались в значительном числе работ [6–12], в которых были получены точные постоянные в неравенствах, подобных (6). Рассуждения в указанных работах достаточно сложны, поэтому мы сочли удобным для читателя привести простое доказательство оценок (6) с менее точными, чем в [6–12], значениями постоянных b_k . Авторы выражают благодарность О. Л. Виноградову за упомянутые ссылки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \leq A \leq n+1$, $F(x) = f(nx)$, $x \in [0; \frac{A}{n}]$. Тогда имеем соотношения

$$|F(x)| \leq 1, \quad F^{(k)}(x) = n^k f^{(k)}(nx), \quad 1 \leq k \leq r,$$

$$|F^{(r)}(x_2) - F^{(r)}(x_1)| \leq b n^{r+\alpha} |x_2 - x_1|^\alpha, \quad x \in [0; A/n].$$

Пусть вначале функция f (и, значит, F) вещественна, $a = \frac{A}{n}$, $1 \leq a < 2$. Разделим отрезок $[0; a]$ на n равных отрезков I_j , $1 \leq j \leq n$, длины $\frac{a}{n}$, и положим $e_k = 2^k - 1$, $k \geq 1$. Отметим, что $e_{k+1} = 2e_k + 1$. Разделим каждый отрезок I_j на e_r одинаковых отрезков $\sigma_{j\nu}$, $1 \leq \nu \leq e_r$, длины $\frac{a}{e_r n}$. Введем также обозначения для следующих объединений отрезков $\sigma_{j\nu}$. Положим $\tau_{jr} = \sigma_{j2^{r-1}}$ (нумерации всех упомянутых и нижеследующих отрезков осуществляются в обычном порядке: отрезок σ_{jk_1} лежит правее отрезка σ_{jk_2} при $k_1 > k_2$), $\Sigma_{jr-1}^1 = \bigcup_{\nu=1}^{e_{r-1}} \sigma_{j\nu}$, $\Sigma_{jr-1}^2 = \bigcup_{\nu=2^{r-1}}^{e_r} \sigma_{j\nu}$. Отрезки Σ_{jr-1}^1 и Σ_{jr-1}^2 состоят из объединения e_{r-1} отрезков $\sigma_{j\nu}$ каждый. Выберем в каждом из них средний отрезок $\sigma_{j\nu}$ и тот из них, который лежит в Σ_{jr-1}^1 , обозначим τ_{jr-1}^1 , а лежащий в Σ_{jr-1}^2 обозначим τ_{jr-1}^2 . Множества $\Sigma_{jr-1}^1 \setminus \tau_{jr-1}^1$ и $\Sigma_{jr-1}^2 \setminus \tau_{jr-1}^2$ состоят каждое из двух отрезков длины $e_{r-2} \cdot \frac{a}{e_r n}$ каждое. Обозначим эти новые отрезки Σ_{jr-2}^μ , $1 \leq \mu \leq 4$, нумеруя их по μ слева направо. Продолжаем конструкцию, пока не получатся отрезки Σ_{j1}^μ , $1 \leq \mu \leq 2$, нумеруя их по μ слева направо. Продолжаем конструкцию, пока не получатся отрезки Σ_{j1}^μ , $1 \leq \mu \leq 2^{r-1}$, длины $\frac{a}{e_r n}$, т.е. каждый отрезок Σ_{j1}^μ , $1 \leq \mu \leq 2^{r-1}$, является одним из отрезков $\sigma_{j\nu}$. Заметим, что по построению между любыми отрезками $\Sigma_{jk}^{2\mu-1}$ и $\Sigma_{jk}^{2\mu}$ находится отрезок τ_{jk+1}^μ длины $\frac{a}{e_r n}$. Рассмотрим теперь любой отрезок Σ_{j1}^μ . Пусть α_{j1}^μ и β_{j1}^μ — его концы. По теореме Лагранжа найдется точка $x_{j1}^\mu \in \Sigma_{j1}^\mu$ такая, что

$$F'(x_{j1}^\mu)(\beta_{j1}^\mu - \alpha_{j1}^\mu) = F(\beta_{j1}^\mu) - F(\alpha_{j1}^\mu),$$

и в силу условия $|F(x)| \leq 1$ получаем, что

$$|F'(x_{j1}^\mu)| \leq \frac{2}{\beta_{j1}^\mu - \alpha_{j1}^\mu} = \frac{2ne_r}{a}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq \mu \leq 2^{r-1}. \quad (7)$$

По построению точки $x_{j1}^{2\mu-1}$ и $x_{j1}^{2\mu}$, $\mu \leq 2^{r-2}$, лежат на отрезке Σ_{j2}^μ и их разделяет отрезок τ_{j2}^μ . Вновь по теореме Лагранжа существует точка x_{j2}^μ , лежащая на интервале $(x_{j1}^{2\mu-1}; x_{j1}^{2\mu})$, такая, что

$$F''(x_{j2}^\mu)(x_{j1}^{2\mu} - x_{j1}^{2\mu-1}) = F'(x_{j1}^{2\mu}) - F'(x_{j1}^{2\mu-1}),$$

откуда, применяя (7), находим, что

$$|F''(x_{j2}^\mu)| \leq \frac{2 \cdot \frac{2ne_r}{a}}{x_{j1}^{2\mu} - x_{j1}^{2\mu-1}} \leq 4 \left(\frac{ne_r}{a} \right)^2. \quad (8)$$

Продолжая данную процедуру, найдем точки x_{jr-1}^1 и x_{jr-1}^2 : $x_{jr-1}^1 \in \Sigma_{jr-1}^1$, $x_{jr-1}^2 \in \Sigma_{jr-1}^2$ такие, что

$$|F^{(r-1)}(x_{jr-1}^l)| \leq 2^{r-1} \cdot \left(\frac{ne_r}{a} \right)^{r-1}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Существует точка x_{jr} между x_{jr-1}^1 и x_{jr-1}^2 такая, что

$$F^{(r)}(x_{jr})(x_{jr-1}^2 - x_{jr-1}^1) = F^{(r-1)}(x_{jr-1}^2) - F^{(r-1)}(x_{jr-1}^1),$$

и тогда из (9) находим, что

$$|F^{(r)}(x_{jr})| \leq 2^r \cdot \left(\frac{ne_r}{a}\right)^r. \quad (10)$$

Теперь если $x \in I_j$ — любая точка, то из (10) следует

$$\begin{aligned} |F^{(r)}(x)| &\leq |F^{(r)}(x_{jr})| + |F^{(r)}(x) - F^{(r)}(x_{jr})| \leq \left(\frac{2ne_r}{a}\right)^r + bn^{r+\alpha}|x - x_{jr}|^\alpha \leq \\ &\leq \left(\left(\frac{2e_r}{a}\right)^r + b\left(\frac{a}{e^r}\right)^\alpha\right) \cdot n^r. \end{aligned} \quad (11)$$

Положим $b'_r = \left(\frac{2e_r}{a}\right)^r + b\left(\frac{a}{e^r}\right)^\alpha$. Возьмем опять $x \in I_j$ и пусть $x_{j_{r-1}}^l$ — ближайшая из точек $x_{j_{r-1}}^1, x_{j_{r-1}}^2$ к x , тогда $|x - x_{j_{r-1}}^l| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{e_r}$. Вновь применяя теорему Лагранжа, найдем точку $y_{j_{r-1}}^l$ такую, что

$$F^{(r-1)}(x) - F^{(r-1)}(x_{j_{r-1}}^l) = F^{(r)}(y_{j_{r-1}}^l)(x - x_{j_{r-1}}^l),$$

в таком случае из (11) и (9) находим, что

$$\begin{aligned} |F^{(r-1)}(x)| &\leq |F^{(r-1)}(x_{j_{r-1}}^l)| + |F^{(r)}(y_{j_{r-1}}^l)| |x - x_{j_{r-1}}^l| \leq \\ &\leq \left(\frac{2e_r}{a}\right)^{r-1} \cdot n^{r-1} + \frac{1}{2} b'_{r-1} \cdot \frac{a}{e_r n} = \left(\left(\frac{2e_r}{a}\right)^{r-1} + \frac{1}{2} b'_{r-1} \cdot \frac{a}{e_r}\right) n^{r-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть $b'_{r-1} = \left(\frac{2e_r}{a}\right)^{r-1} + \frac{1}{2} b'_r \cdot \frac{a}{e_r}$. Продолжая процедуру далее, доказываем лемму для вещественных функций f . Для комплекснозначных f лемма будет выполняться с $l_k = \sqrt{2}b'_k$.

Предполагаем, что на множестве E задана функция f . Определим следующие промежутки S_n , $n \in \mathbb{Z}$:

$$S_n = [\alpha_n, \beta_n], \quad \alpha_n^2 = a_n, \quad \beta_n^2 = b_n, \quad n \geq 1, \quad (13)$$

$$S_n = [-\beta_{|n|+1}, -\alpha_{|n|+1}], \quad n \leq 0. \quad (14)$$

Положим $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S_n$ и зададим функцию φ на Ω равенством

$$\varphi(x) = f(x^2), \quad x \in \Omega. \quad (15)$$

Напомним, что условие $f \in \Lambda_1^{r+\omega_\alpha}(E) \stackrel{\text{def}}{=} H_1^{r+\alpha}(E)$ означает, что $|f(x)| \leq 1$, $x \in E$, и с некоторой постоянной c_f для любых $x_1, x_2 \in E$ справедливо неравенство

$$|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \leq c_f |x_2 - x_1|^\alpha. \quad (16)$$

Лемма 2. Для функции φ , определенной в (15), справедливы соотношения

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq c_{k1}(|n| + 1)^k, \quad x \in S_n, \quad 1 \leq k \leq r, \quad (17)$$

$$|\varphi^{(r)}(x_2) - \varphi^{(r)}(x_1)| \leq c_{r2}(|n| + 1)^{r+\alpha} |x_2 - x_1|^\alpha, \quad x \in S_n, \quad (18)$$

и постоянные c_{k1} , $1 \leq k \leq r$, и c_{r2} зависят лишь от k, r и c_f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу Фаа ди Бруно [13]:

$$\varphi^{(k)}(x) = (f(g(x)))^{(k)} = \sum A_{\nu_1, \dots, \nu_k}^k f^{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k)}(g(x)) \left(g^{(k)}(x)\right)^{\nu_1} \dots \left(g^{(k)}(x)\right)^{\nu_k}, \quad (19)$$

где $A_{\nu_1, \dots, \nu_k}^k$ — известные коэффициенты, числа $\nu_1, \dots, \nu_k$ неотрицательны и удовлетворяют условию $\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + k\nu_k = k$, $g(x) = x^2$. Применяя лемму 1 и учитывая соотношения $(x^2)' = 2x$, $(x^2)'' = 2$, $(x^2)^{(\nu)} = 0$, $\nu \geq 3$, из (19) и (1) получаем (17) и (18).

Следствие. Пусть $\varphi_1(x) = x^{-2r-2}\varphi(x)$, $x \in \Omega$. Тогда функция φ_1 удовлетворяет условиям

$$|\varphi_1(x)| \leq \frac{c}{(|n| + 1)^{2r+2}}, \quad x \in S_n, \quad (20)$$

$$|\varphi_1^{(k)}(x)| \leq \frac{c}{(|n| + 1)^{2r+2-k}}, \quad x \in S_n, \quad 1 \leq k \leq r, \quad (21)$$

$$|\varphi_1^{(r)}(x_2) - \varphi_1^{(r)}(x_1)| \leq \frac{c}{(|n| + 1)^{r+2-\alpha}} |x_2 - x_1|^\alpha, \quad x_1, x_2 \in S_n, \quad (22)$$

где постоянная c зависит только от Ω, r и c_f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия получается применением формулы Лейбница и соотношений (17) и (18).

2. Продолжение функции $\varphi(x)$. Будем применять продолжение, отличающееся от использованного в работах [4, 5]. Для $S_n, n \in \mathbb{Z}$, положим

$$\Omega_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, S_n) \leq \frac{1}{|n| + 1} \right\}, \quad (23)$$

$$U_{nk} = \left\{ z \in \mathbb{C} : 2^{-k} \cdot \frac{1}{|n| + 1} < \text{dist}(z, S_n) \leq 2^{-k+1} \cdot \frac{1}{|n| + 1} \right\}. \quad (24)$$

Из (23), (24) следует, что $\bigcup_{k \geq 1} U_{nk} = \Omega_n \setminus S_n$. Разобьем U_{nk} на $c \cdot 2^k(|n| + 1)$ непересекающихся односвязных областей V_{nkl} таких, что

$$c_1((|n| + 1)2^k)^{-1} \leq \text{diam} V_{nkl} \leq c_2((|n| + 1)2^k)^{-1}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2}((|n| + 1)2^k)^{-2} \leq m_2 V_{nkl} \leq 2((|n| + 1)2^k)^{-2}, \quad (26)$$

и пусть $x_{nkl} \in S_n$ — ближайшая точка S_n к множеству $\bar{V}_{nkl}$. Положим

$$\Phi_0(z) = \begin{cases} \varphi(x_{nkl}) + \sum_{j=1}^r \frac{\varphi^{(j)}(x_{nkl})}{j!} (z - x_{nkl})^j, & z \in V_{nkl}, \\ 0, & z \notin \Omega_n. \end{cases} \quad (27)$$

Пусть $\bar{B}_r(a) = \{z \in \bar{\mathbb{C}} : |z - a| \leq r\}$. Положим

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{m_2 B_{\frac{1}{2}\delta(z)}(z)} \int_{B_{\frac{1}{2}\delta(z)}(z)} \Phi_0(\zeta) dm_2(\zeta), \quad z \in \Omega_n, \quad (28)$$

где $\delta(z) = \text{dist}(z, I_n)$, m_2 — двумерная мера Лебега. Тогда, применяя рассуждения Е. М. Дынькина [13, 14], из построения (27) и (28) и свойств (17), (18) получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *Функция $\Phi_1 \in C(\mathbb{C})$ обладает следующими свойствами: $\Phi_1(z) = 0$ при $z \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\Omega}_n$, $\tilde{\Omega}_n = \left\{ z : \text{dist}(z, S_n) \leq \frac{2}{|n|+1} \right\}$; $\Phi_1(x) = \varphi(x)$, $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S_n$, функция $\Phi_1 \in C^1(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S_n)$. Также справедлива оценка*

$$|\Phi'_1(z)| \leq cn^{r+\alpha} \text{dist}^{r+\alpha-1}(z, S_n), \quad z \in \tilde{\Omega}_n. \quad (29)$$

Следствие. *Пусть $\Xi(z) = z^{-2r-2}\Phi_1(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда $\Xi(z) \in C(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\Omega}_n)$, $\Xi(x) = \varphi(x)x^{-2r-2}$, $\Xi(z) \in C^1\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\Omega}_n \setminus S_n\right)$ и справедлива оценка*

$$|\Xi'_z(z)| \leq cn^{-r+\alpha-2} \text{dist}^{r+\alpha-1}(z, S_n), \quad z \in \tilde{\Omega}_n. \quad (30)$$

3. Приближение на множествах Ω и E . В построении целой функции экспоненциального типа $\leq \sigma$, приближающей на множестве Ω функцию $\varphi_1(x) = \varphi(x)x^{-2r-2}$, будем пользоваться конструкцией, примененной в работах [3–5], с изменениями, позволяющими получить требуемые оценки приближения с учетом свойств (20)–(22) функции $\varphi_1(x)$. Построим кривую $\Gamma(t)$ для множества Ω аналогично тому, как это было сделано в [5] для множества E , свяжем с ней области $D_+(t)$ и $D_-(t)$ вновь по образцу работы [5], определим функции $z_{\xi,s}^+(z, t)$ и $z_{\xi,s}^-(z, t)$, как это было сделано в [5] в определениях (5) и (16), и подобно (8) в [5] запишем

$$R_k(z, w, \xi, s, t) = \begin{cases} \frac{1}{z_{\xi,s}^+(z, t) - w} \left(1 + \sum_{\nu=1}^k \left(\frac{z_{\xi,s}^+(z, t) - z}{z_{\xi,s}^+(z, t) - w} \right)^\nu \right), & z \in D_+(t), \\ \frac{1}{z_{\xi,s}^-(z, t) - w} \left(1 + \sum_{\nu=1}^k \left(\frac{z_{\xi,s}^-(z, t) - z}{z_{\xi,s}^-(z, t) - w} \right)^\nu \right), & z \in D_-(t). \end{cases} \quad (31)$$

Выберем c_m из соотношения

$$c_m \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \tau}{\tau} \right) d\tau = 1. \quad (32)$$

Число $q > 0$ выбрано при построении кривой $\Gamma(t)$, как это было сделано для q в [5]. Числа k и m также определим, как в [5]: $k+1 = 4(r+1)$, $m = 8(k+1) + 2 = 32(k+1) + 2$. Пусть $\sigma_1 = \frac{\sigma}{m}$, $A = \frac{2\pi}{q}$, число b_r выбрано, как b_r в [5], из условия $b_r \int_0^q (\sin At)^{2r+2} dt = 1$.

Теперь, по аналогии с [5], напишем приближающую $\varphi_1(x)$ целую функцию $U_{1\sigma}(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma + (2r+2)A$:

$$U_{1\sigma}(w) = b_r \cdot \int_0^q \sin^{2r+2} A(w-t) U_{0\sigma}(w, t) dt, \quad (33)$$

где

$$U_{0\sigma}(w, t) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int_{\tilde{\Omega}_n} \Xi'_z(z) \cdot \left(\frac{c_m}{\sigma_1^{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin s\sigma_1}{s} \right)^m ds \cdot R \left(z, w, \frac{1}{\sigma_1}, s, t \right) \right) dm_2(z). \quad (34)$$

Укажем изменения в формуле (34), которая влечет оценки приближения в рассматриваемом случае, в сравнении с формулой (9) в [5]: в (34) стоит другая функция $\Xi'_z(z)$; интегрирование ведется по областям $\tilde{\Omega}_n$, определенным в лемме 3, которые отличаются от областей $\text{int} E_{\rho_0}(I_n)$ в формуле (9) из [5]. Применяя в данной ситуации рассуждения и оценки из [3–5], с учетом построения приближающей функции в (33) и (34) и леммы 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Существуют постоянные c_7 и c_8 , не зависящие от σ и n такие, что при $\sigma \geq 1$ справедливы следующие неравенства:*

$$|U_{1\sigma}(x) - \varphi_1(x)| \leq \min \left(c_7 n^{-r-2+\alpha} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\sqrt{(x - \alpha_n)(\beta_n - x)} + \frac{1}{\sigma} \right) \right)^{r+\alpha}, c_8 n^{-2r-2} \right), \quad x \in S_n. \quad (35)$$

Положим $V_\sigma(z) = z^{2r+2} U_{1\sigma}(z)$. Из определения функций $\varphi(x)$ в (15) и $\varphi_1(x)$ получаем

Следствие. *Существуют постоянные c'_7 и c'_8 , не зависящие от σ и n такие, что при $\sigma \geq 1$ справедливы следующие неравенства:*

$$|V_\sigma(x) - \varphi(x)| \leq \min \left(c'_7 n^{r+\alpha} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\sqrt{(x - \alpha_n)(\beta_n - x)} + \frac{1}{\sigma} \right) \right)^{r+\alpha}, c'_8 \right), \quad x \in S_n. \quad (36)$$

С помощью функции V_σ определим функцию F_σ , дающую оценку (5). Из определения (15) следует, что $\varphi(x) = \varphi(-x)$. Далее, множество Ω симметрично относительно 0, поэтому $V_\sigma(-x) - \varphi(-x) = V_\sigma(-x) - \varphi(x)$. Для функции $V_\sigma(-z)$ выполнена оценка (35), следовательно, для функции $V_{1\sigma}(z) = \frac{1}{2}(V_\sigma(z) + V_\sigma(-z))$ выполнено неравенство (35) и функция $V_{1\sigma}(z)$ четная. Наконец, положим $F_\sigma(z) = V_{1\sigma}(\sqrt{z})$. Тогда определение (15) функции $\varphi(x)$, связь (13) и (14) отрезков I_n и S_n и неравенство (35) дают требуемую оценку (5) для отклонения $F_\sigma(x) - f(x)$. Что и требовалось доказать.

Литература

1. Давыдова Т. С., Широков Н. А. Приближение функций из класса Гёльдера на полуоси // Записки научн. семинаров ПОМИ. 1999. Т. 262. С. 127–137.
2. Сильванович О. В., Широков Н. А. Приближение целыми функциями на подмножествах полуоси // Записки научн. семинаров ПОМИ. 2006. Т. 337. С. 233–237.
3. Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 1. Formulation of the results // Vestn. St. Petersburg Univ.: Math. 2016. Vol. 49. Issue 4. P. 373–376.
4. Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 2. Proof of the Main Theorem // Vestn. St. Petersburg Univ.: Math. 2017. Vol. 50. Issue 1. P. 35–43.

5. *Silvanovich O. V., Shirokov N. A.* Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 3. Future Generalization // *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* 2018. Vol. 51. Issue 2. P. 164–168.
6. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и неравенства для перестановок // *Доклады АН СССР.* 1986. Т. 290, № 5. С. 1033–1036.
7. *Бабенко В. Ф.* Точные неравенства для норм промежуточных производных полуцелого порядка и некоторые их приложения // *Доп. НАН України.* 1995. № 2. С. 23–26.
8. *Бабенко В. Ф.* О неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // *Укр. мат. журнал.* 1995. Т. 47, № 1. С. 105–107.
9. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Об аддитивных неравенствах для норм промежуточных производных // *Доклады РАН.* 1997. Т. 356, № 2. С. 154–156.
10. *Буренков В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // *Труды Мат. института им. В. А. Стеклова АН СССР.* 1980. Vol. 156. С. 22–29.
11. *Кофанов В. А.* О неравенствах типа Ландау — Колмогорова — Хермандера на отрезке и вещественной прямой // *Укр. мат. журнал.* 2000. Т. 52, № 12. С. 1676–1688.
12. *Chen W.* Landau — Kolmogorov inequality on a finite interval // *Bull. Austral. Math. Soc.* 1993. Vol. 48. P. 485–494.
13. *Шадрин А. Ю.* О точных постоянных в неравенствах между L_∞ -нормами производных на конечном отрезке // *Доклады РАН.* 1992. Т. 326, № 1. С. 150–153.
14. *Dyn'kin E. M.* Pseudoanalytic extensions of smooth functions. The uniform scale // *Amer. Math. Soc. Transl.* 1980. Vol. 115. P. 33–38.
15. *Dyn'kin E. M.* The pseudoanalytic extensions // *J. Anal. Math.* 1993. Vol. 60. P. 45–70.

Статья поступила в редакцию 15 марта 2019 г.;
после доработки 22 апреля 2019 г.;
рекомендована в печать 13 июня 2019 г.

Контактная информация:

Сильванович Ольга Васильевна — канд. физ.-мат. наук; olamamik@gmail.com

Широков Николай Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; nikolai.shirokov@gmail.com

Entire functions of order $1/2$ in the approximation of functions on the semiaxis

*O. V. Silvanovich*¹, *N. A. Shirokov*²

¹ St. Petersburg National Research University of Information Tehnologies, Mechanics and Optics, Kronverkskii pr., 49, St. Petersburg, 197101, Russian Federation

² St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Entire functions of order $1/2$ in the approximation of functions on the semiaxis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 4, pp. 627–635.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.408> (In Russian)

Let I_n be disjoint segments of half-axis $[1; \infty)$, $I_1 = [1; b_1]$. We assume that I_n and their supplementary intervals are commensurable. The union of mentioned segments we denote thought E . Let $0 < \alpha < 1$. The class of complex-valued functions defined on E with r -th derivative belonging to a Holder class α and bounded by 1 is denoted by $H_1^{r+\alpha}(E)$. We consider the set C_σ of entire functions of the order $\frac{1}{2}$ and of the type $\leq \sigma$ which are bounded on $[0; \infty)$. The main result of this paper is the following: *Let $f \in H_1^{r+\alpha}(E)$. Then there exist constants c_0 and c_1 , depending of f, E, r and α such that for any $\sigma \geq 1$ one can find a function $F_\sigma \in C_\sigma$ such that the following inequality holds*

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leq \min \left(c_0 \frac{1}{\sigma^{r+\alpha}} \left(\sqrt{(x - a_n)(b_n - x)} + \frac{n}{\sigma} \right)^{r+\alpha}, c_1 \right), \quad x \in I_n, \quad n \geq 1.$$

Keywords: smooth functions, entire functions, approximation.

References

1. Davidova T. S., Shirokov N. A., "Approximation of functions from class Gelder on the semiaxis", *Zapiski nauch. sem. POMI* **262**, 127–137 (1999). (In Russian)
2. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., "Approximation by entire functions on subsets of the semiaxis", *Zapiski nauch. sem. POMI* **337**, 233–237 (2006). (In Russian)
3. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., "Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 1. Formulation of the results", *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **49**, issue 4, 373–376 (2016).
4. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., "Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 2. Proof of the Main Theorem", *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **50**, issue 1, 35–43 (2017).
5. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., "Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 3. Future Generalization", *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **51**, issue 2, 164–168 (2018).
6. Babenko V. F., "Extreme problems of approximation theory and inequalities for permutations", *Reports of the USSR Academy of Sciences* **290** (5), 1033–1036 (1986). (In Russian)
7. Babenko V. F., "Exact inequalities for norms of intermediate derivatives of half-integer order and some of their applications", *Reports of the Ukrainian Academy of Sciences* **2**, 23–26 (1995). (In Russian)
8. Babenko V. F., "On inequalities for the norms of intermediate derivatives on a finite interval", *Ukr. Math. J.* **47**(1), 105–107 (1995). (In Russian)
9. Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A., "On additive inequalities for norms of intermediate derivatives", *RAS reports* **356**(2), 154–156 (1997). (In Russian)
10. Burenkov V. I., "On exact constants in inequalities for the norms of intermediate derivatives on a finite interval", *Trudy Math. Instituta im. V. A. Steklova AN SSSR* **156**, 22–29 (1980). (In Russian)
11. Kofanov V. A., "On inequalities of Landau — Kolmogorov — Hrmander type on a segment and real line", *Ukr. Math. J.* **52**(12), 1676–1688 (2000). (In Russian)
12. Chen W., "Landau — Kolmogorov inequality on a finite interval", *Bull. Austral. Math. Soc.* **48**, 485–494 (1993).
13. Shadrin A. U., "On exact constants in inequalities between L_∞ -norms of derivatives on a finite interval", *RAS reports* **326**(1), 150–153 (1992). (In Russian)
14. Dyn'kin E. M., "Pseudoanalytic extensions of smooth functions. The uniform scale", *Amer. Math. Soc. Transl.* **115**, 33–38 (1980).
15. Dyn'kin E. M., "The pseudoanalytic extensions", *J. Anal. Math.* **60**, 45–70 (1993).

Received: March 15, 2019

Revised: April 22, 2019

Accepted: June 13, 2019

Authors' information:

Olga V. Silvanovich — olamamik@gmail.com

Nikolai A. Shirokov — nikolai.shirokov@gmail.com