УДК 517.925.53 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4
MSC 37C75, 37C29, 34C37

Многомерные диффеоморфизмы с устойчивыми периодическими точками*

Е. В. Васильева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Васильева Е. В.* Многомерные диффеоморфизмы с устойчивыми периодическими точками // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 608–618.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.406

В работе рассматривается диффеоморфизм многомерного пространства в себя с гиперболической неподвижной точкой в предположении, что пересечение устойчивого и неустойчивого многообразия содержит точки, отличные от гиперболической (такие точки называются гомоклиническими и подразделяются на трансверсальные и нетрансверсальные в зависимости от поведения устойчивого и неустойчивого многообразия в точке пересечения). Из статей Ш. Ньюхауса, Л. П. Шильникова, Б. Ф. Иванова и других авторов следует, что при определенном способе касания устойчивого многообразия с неустойчивым в гомоклинической точке окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки содержит бесконечное множество устойчивых периодических точек, но хотя бы один из характеристических показателей у этих точек стремится к нулю с увеличением периода. Предлагаемая работа является продолжением опубликованных ранее работ автора, в которых накладывались ограничения на собственные числа матрицы Якоби исходного диффеоморфизма в гиперболической точке. В этих работах предполагалось, что либо все собственные числа действительны и матрица Якоби диагональна, либо эта матрица имеет лишь одно действительное собственное число по модулю меньше единицы, а все остальные собственные числа — различные комплексные числа по модулю больше единицы. В этих условиях были получены условия наличия в произвольной окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки бесконечного множества устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. В данной работе предполагается, что матрица Якоби диффеоморфизма имеет в гиперболической точке произвольный набор собственных чисел. В этом случае получены условия существования в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки бесконечного множества устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля. Условия накладываются, прежде всего, на способ касания устойчивого многообразия с неустойчивым, однако при доказательстве теоремы существенно используются свойства собственных чисел матрицы Якоби в гиперболической точке.

Ключевые слова: многомерный диффеоморфизм, нетрансверсальная гомоклиническая точка, устойчивость, отделенные от нуля характеристические показатели.

Введение. Основная цель данной работы — выделить множество диффеоморфизмов многомерного пространства в себя, у которых в ограниченной части пространства лежит бесконечное множество устойчивых периодических точек с отде-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 19-01-00388).

ленными от нуля характеристическими показателями. Пример диффеоморфизма плоскости с таким свойством приведен в [1].

Изучаются диффеоморфизмы многомерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Множество точек, траектории которых не покидают ограниченную окрестность траектории нетрансверсальной гомоклинической точки исследуется достаточно давно (см. [2–4]). Из этих работ следует, что при определенных условиях, наложенных, прежде всего, на характер касания устойчивого многообразия с неустойчивым, окрестность гомоклинической точки может содержать бесконечное множество устойчивых периодических точек, но хотя бы один из характеристических показателей у этих точек стремится к нулю с увеличением периода.

Данная работа является продолжением работ автора [5, 6]. В статье [5] предполагалось, что у матрицы Якоби в неподвижной гиперболической точке все собственные числа действительны и различны, в [6] предполагалось, что эта матрица имеет единственное собственное действительное число по модулю меньше единицы, а остальные собственные числа — различные комплексные числа по модулю больше единицы. Из указанных работ следует, что множество точек, траектории которых не покидают ограниченную окрестность траектории гомоклинической точки может содержать счетное подмножество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля харатеристическими показателями. В предлагаемой работе показано, что диффеоморфизм с неподвижной гиперболической (седловой) точкой, в случае произвольного множества собственных чисел у матрицы Якоби в неподвижной гиперболической точке, может иметь в произвольной окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки бесконечное множество устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Основная теорема. Пусть f — диффеоморфизм $(n+m)$-мерного пространства в себя $(m \geq 1, n \geq 1)$ с неподвижной гиперболической точкой в нуле. В дальнейшем (x, y) — точки $(n+m)$-мерного пространства, где $x = \operatorname{col}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = \operatorname{col}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Предположим, что в некоторой ограниченной окрестности начала координат V диффеоморфизм f имеет вид

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda x \\ \mathrm{M} y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in V, \tag{1}$$

где Λ, M — квадратные матрицы порядка m и n соответственно. Предположим, что эти матрицы совпадают со своими действительными жордановыми формами. Считаем, что в жордановой клетке единицы лежат выше главной диагонали. Предполагаем, что все собственные числа матрицы Λ по модулю меньше единицы, а все собственные числа матрицы M по модулю больше единицы. Собственные числа матриц Λ, M могут быть как действительными, так и комплексными.

Существуют нетривиальные *устойчивое и неустойчивое многообразия* точки 0, они обозначаются $W^s(0)$, $W^u(0)$. Известно, что

$$W^s(0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{m+n} : \lim_{k \to +\infty} \|f^k(z)\| = 0 \right\},$$

$$W^u(0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{m+n} : \lim_{k \to +\infty} \|f^{-k}(z)\| = 0 \right\}.$$

где f^k, f^{-k} — степени диффеоморфизмов f, f^{-1}.

Точка w называется *гомоклинической* к гиперболической точке 0, если $w \neq 0$ и $w \in W^s(0) \cap W^u(0)$.

Из определения гомоклинической точки следуют равенства

$$\lim_{k\to+\infty} \|f^k(w)\| = \lim_{k\to+\infty} \|f^{-k}(w)\| = 0.$$

Гомоклиническая точка w называется *нетрасверсальной гомоклинической* точкой, если пересечение $W^s(0)$ с $W^u(0)$ не является трансверсальным, точнее,

$$\dim T_w W^s(0) + \dim T_w W^u(0) - \dim\left(T_w W^s(0) \cap T_w W^u(0)\right) \neq m + n,$$

где $T_w W^s(0)$, $T_w W^u(0)$ — *касательные пространства* к $W^s(0)$ и $W^u(0)$ в точке w.

Предполагается наличие у диффеоморфизма f нетрансверсальной гомоклинической к началу координат точки. Пусть $(0, y^0)$ и $(x^0, 0)$ — две точки из орбиты нетрансверсальной гомоклинической точки, здесь $x^0 = \operatorname{col}\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0\right)$, $y^0 = \operatorname{col}\left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0\right)$. Предположим, что эти точки лежат в V и существует $\zeta > 1$ такая, что справедливы соотношения

$$\begin{gathered} V_1 = \left\{(x,y):\ \|x\| < \zeta\|x^0\|,\ \|y\| < \zeta\|y^0\|\right\} \subset V, \\ f\begin{pmatrix} 0 \\ y^0 \end{pmatrix} \notin V_1, \quad f^{-1}\begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V_1. \end{gathered} \tag{2}$$

Из определения гомоклинической точки следует, что существует такое натуральное число ω, что

$$f^\omega\begin{pmatrix} 0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть U — выпуклая окрестность точки $(0, y^0)$ такая, что $U \subset V_1$, $f^\omega(U) \subset V_1$, $f(U) \cap V_1 = \emptyset$, $f^{\omega-1}(U) \cap V_1 = \emptyset$, и множества U, $f(U), \ldots, f^\omega(U)$ попарно не пересекаются.

Обозначим через L сужение $f^\omega\,|_U$. Пусть

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + \Phi_1\left(x, y - y^0\right) \\ \Phi_2\left(x, y - y^0\right) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где Φ_1, Φ_2 — непрерывно дифференцируемые в окрестности начала координат функции такие, что $\Phi_1(0,0) = \Phi_2(0,0) = 0$ и

$$\det\left(\frac{\partial \Phi_2(0,0)}{\partial y}\right) = 0.$$

Из последнего условия следует, что точка $(x^0, 0)$ является точкой касания устойчивого многообразия с неустойчивым. В работах [2–4] предполагалось, что вектор-функция Φ_2 имеет в точке нуль хотя бы одну отличную от нуля производную порядка 2 или выше по одной из координат вектора y. Из этих работ следует, что при таких условиях множество точек, траектории которых лежат в $V_1 \cup f(U) \cup \ldots \cup f^{\omega-1}(U)$, может содержать бесконечное подмножество устойчивых периодических точек, но хотя бы один из характеристических показателей этих точек стремится к нулю с увеличением периода.

Пусть точка z — периодическая точка диффеоморфизма f с наименьшим периодом κ, а ρ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m+n$, — собственные числа матрицы $Df^\kappa(z)$.

Характеристическими показателями точки z называются

$$\tau_\nu = \kappa^{-1} \ln |\rho_\nu| , \quad \nu = 1, 2, \ldots, m+n.$$

Периодическая точка устойчива, если все ее характеристические показатели отрицательны.

Среди собственных чисел матрицы Λ имеется наибольшее по модулю (возможно не единственное), пусть λ — модуль этого числа, ясно, что $0 < \lambda < 1$.

Предположим, что $\mathrm{M} = \mathrm{diag}[\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2]$, где M_1 — квадратная матрица порядка $2l$ $(0 \leq 2l \leq n)$, у которой все собственные числа комплексные, а M_2 — квадратная матрица порядка $(n-2l)$, у которой все собственные числа действительные.

Считаем, что между строками матрицы M и ее собственными числами установлено взаимно однозначное соответствие, а именно, на пересечении главной диагонали матрицы и строки с номером ν стоит действительная часть собственного числа μ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Пусть

$$\mu_1 = |\mu_1| \, e^{i2\pi\theta_1}, \quad \mu_2 = |\mu_2| \, e^{-i2\pi\theta_1}, \ldots, \mu_{2l-1} = |\mu_{2l-1}| \, e^{i2\pi\theta_l}, \mu_{2l} = |\mu_{2l}| \, e^{-i2\pi\theta_l},$$

$$\mu_{2l+1}, \ldots, \mu_n$$

— собственные числа матрицы M, где

$$|\mu_1| = |\mu_2| , \quad |\mu_3| = |\mu_4| , \ldots, |\mu_{2l-1}| = |\mu_{2l}| ,$$
$$0 < \theta_\nu < 1, \quad \theta_\nu \neq \tfrac{1}{2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, l.$$

Ясно, что в этой последовательности сначала идут собственные числа матрицы M_1, затем собственные числа матрицы M_2. Среди элементов этой последовательности могут быть равные, а число равных между собой элементов равно алгебраической кратности собственного числа.

Пусть

$$\Omega_\nu = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\mu_{2\nu-1}) & -\mathrm{Im}(\mu_{2\nu-1}) \\ -\mathrm{Im}(\mu_{2\nu}) & \mathrm{Re}(\mu_{2\nu}) \end{pmatrix}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, l.$$

Ясно, что

$$\mathrm{Re}(\mu_{2\nu-1}) = \mathrm{Re}(\mu_{2\nu}) = |\mu_{2\nu}| \cos(2\pi\theta_\nu) = |\mu_{2\nu-1}| \cos(2\pi\theta_\nu),$$

$$\mathrm{Im}(\mu_{2\nu-1}) = -\mathrm{Im}(\mu_{2\nu}) = |\mu_{2\nu}| \sin(2\pi\theta_\nu) = |\mu_{2\nu-1}| \sin(2\pi\theta_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, l.$$

Разность матриц $(\mathrm{M}_1 - \mathrm{diag}\,[\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_l])$ является верхнетреугольной матрицей, у которой все элементы равны нулю за исключением быть может элементов третьей диагонали (отсчет следует вести от главной диагонали).

Пусть $\mu = |\mu_1| \, |\mu_2| \ldots |\mu_n|$. Предположим, что

$$\lambda\mu < 1. \tag{4}$$

Пусть

$$\begin{gathered} \Phi_1 \left(x, y - y^0\right) = x^0 + Ax + B\left(y - y^0\right) + F\left(x, y - y^0\right), \\ \Phi_2 \left(x, y - y^0\right) = Cx + D\left(y - y^0\right) + G\left(x, y - y^0\right), \end{gathered} \tag{5}$$

где F, G — такие непрерывно дифференцируемые вектор-функции $(n+m)$ переменных, что их значения и значения всех частных производных первого порядка равны нулю в начале координат. Считаем, что все частные производные вектор-функций F, G ограничены единицей в окрестности U; A, B, C, D — постоянные матрицы.

Предположим, что матрица $D = \{d_{jk}\}$, $1 \le j \le n$, $1 \le k \le n$, такова, что

$$d_{jk} = 0, \quad j \ge k, \tag{6}$$

а именно, D является верхнетреугольной матрицей, все элементы главной диагонали которой равны нулю. Ясно, что $\det D = 0$, $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \ne 0$.

Характер касания устойчивого многообразия с неустойчивым многообразием в точке $(x^0, 0)$ определим с помощью свойств вектор-функции G, для описания этих свойств рассмотрим последовательности σ_k, ε_k, j_k; σ_k — стремящаяся к нулю последовательность n-мерных векторов, $\sigma_k = \mathrm{col}\left(\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \ldots, \sigma_n^{(k)}\right)$, ε_k — скалярная положительная, стремящаяся к нулю последовательность, j_k — возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что указанные последовательности удовлетворяют следующим условиям при любых k:

$$\sigma_1^{(k)} - \varepsilon_k - \sigma_1^{(k+1)} - \varepsilon_{k+1} > 0, \tag{7}$$

$$\left|\sigma_\nu^{(k)}\right| \le \lambda^{j_k}, \quad \nu = 2, 3, \ldots, n, \tag{8}$$

$$(\lambda\mu)^{j_k} (j_k)^{m-1+(n-1)^3} < \varepsilon_k. \tag{9}$$

Пусть

$$x_k = \left(E - \Lambda^{j_k} A\right)^{-1} \Lambda^{j_k} \left(x^0 + B\sigma_k\right),$$

$$\delta_k = 4\max\left[2\lambda^{j_k} (j_k)^{m-1} (\|B\| + 1)\, \varepsilon_k, \lambda^{j_k} (j_k)^{m-1} \|\sigma_k\|\right], \tag{10}$$

$$\xi_k = \mathrm{M}^{j_k} \left(G(x_k, \sigma_k) + Cx_k + D\sigma_k\right) - \left(y^0 + \sigma_k\right).$$

Ясно, что x_k — стремящаяся к нулю последовательность m-мерных векторов, δ_k — скалярная положительная, стремящаяся к нулю последовательность, ξ_k — последовательность n-мерных векторов, причем $\xi_k = \mathrm{col}\left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right)$.

Пусть

$$\gamma_k = \mathrm{col}\left(\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \ldots, \gamma_n^{(k)}\right),$$

где

$$\gamma_1^{(k)} = \varepsilon_k,$$

$$\gamma_\nu^{(k)} = 4^{-\nu+1} (\|D\| + 1)^{-\nu+1} \varepsilon_k \left(|\mu_1||\mu_2| \ldots |\mu_{\nu-1}|\right)^{-j_k} (j_k)^{-(n-1)(\nu-1)},$$

$$\nu = 2, 3, \ldots, n.$$

Обозначим

$$U_k = \left\{(x, y) : \|x - x_k\| < \delta_k, \left|y_\nu - \left(y_\nu^0 + \sigma_\nu^{(k)}\right)\right| < \gamma_\nu^{(k)}, \nu = 1, 2, \ldots, n\right\}. \tag{11}$$

Ясно, что $U_k \subset U$ при достаточно больших k.

Предположим, что функция G такова, что при достаточно больших k

$$\left|\xi_\nu^{(k)}\right| < 4^{-1}\gamma_\nu^{(k)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

и при некотором α больше единицы, независящем от k, и любых $(x, y) \in U_k$

$$\left\| \frac{\partial G(x, y - y^0)}{\partial y} \right\| < \mu^{-\alpha j_k}. \tag{13}$$

Условия (12), (13) определяют касание устойчивого многообразия с неустойчивым, при выполнении этих условий у функции Φ_2, определенной условиями (5), в начале координат либо не существуют производные второго порядка по всем координатам вектора y, либо все существующие производные этой функции порядка 2 и выше по координатам вектора y равны нулю. Таким образом, если диффеоморфизм удовлетворяет условиям (1)–(9), (12), (13), то способ касания устойчивого многообразия с неустойчивым в точке $(x^0, 0)$ отличается от способа касания, рассмотренного в [2–4].

Теорема. *Пусть f — диффеоморфизм $(m+n)$-мерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат, и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой $\left(0, y^0\right)$. Пусть f удовлетворяет условиям (1)–(9), (12), (13), предположим, что матрицы* M, *D и последовательность j_k таковы, что выполнено одно из следующих условий:*

1) все собственные числа матрицы M *действительны $(l = 0)$;*

2) у матрицы M *есть комплексные собственные числа $(l > 1)$, и $d_{12} = d_{34} = \ldots = d_{(2l-1)2l} = 0$;*

3) у матрицы M *есть комплексные собственные числа $(l > 1)$, $d_{(2\nu_r-1)2\nu_r} \neq 0$, где $r = 1, 2, \ldots, q$, $q \geq 1$, $1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_q \leq l$ и для любого r существует такая η_{ν_r}, $\eta_{\nu_r} > |\mu_{2\nu_r}|$, что при любом k существует такая $S_{\nu_r}(k) \in \mathbb{N}$, что*

$$|\theta_{\nu_r} j_k - S_{\nu_r}(k)| \leq (\eta_{\nu_r})^{-j_k}. \tag{14}$$

Тогда произвольная окрестность точки $\left(0, y^0\right)$ содержит счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Заметим, если среди собственных чисел матрицы M есть комплексные, то условие 2 теоремы может быть выполнено только при $m > 1$.

Пусть выполнено условие 3 теоремы, и числа θ_{ν_r}, $r = 1, 2, \ldots, q$, рациональны, тогда существует такая последовательность j_k, что неравенства (14) выполняются. Известно [7], что для произвольного иррационального числа θ_{ν_r} может не существовать такой последовательности j_k, чтобы выполнялись (14). В работе [6] даны условия, достаточные для того, чтобы для конечного набора иррациональных чисел существовала такая возрастающая последовательность натуральных чисел, чтобы выполнялись (14).

Вспомогательная лемма.

Лемма. *Пусть выполнены условия теоремы, тогда*

$$f^{j_k} L\left(\mathrm{cl} U_k\right) \subset U_k, \tag{15}$$

при достаточно больших k, где $\mathrm{cl}U_k$ — замыкание U_k.

Доказательство. Пусть $(x,y) \in U_k$, тогда $x = x_k + u$, $y = y^0 + \sigma_k + v$, где $\|u\| \le \delta_k$, $v = \mathrm{col}\,(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $|v_\nu| \le \gamma_\nu^{(k)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = f^{j_k} L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Учитывая (1), (5), (10), имеем

$$\bar{x} = x_k + \Lambda^{j_k}\left(Au + Bv + F\left(x_k + u, \sigma_k + v\right)\right),$$
$$\bar{y} = y^0 + \sigma_k + \xi_k + \mathrm{M}^{j_k}\left(Cu + Dv + G\left(x_k + u, \sigma_k + v\right) - G\left(x_k, \sigma_k\right)\right).$$

Пусть $\bar{y} = \mathrm{col}\,(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$, а $\left\{\mathrm{M}^{j_k}\right\}_\nu$ — строка с номером ν матрицы M^{j_k}, тогда

$$\bar{y}_\nu = y_\nu^0 + \sigma_\nu^{(k)} + \xi_\nu^{(k)} + \left\{\mathrm{M}^{j_k}\right\}_\nu \left(Cu + Dv + G\left(x_k + u, \sigma_k + v\right) - G\left(x_k, \sigma_k\right)\right).$$

Из свойств матриц Λ, M следует, что

$$\left\|\Lambda^{j_k}\right\| \le \lambda^{j_k}\left(j_k\right)^{m-1},$$
$$\left\|\left\{\mathrm{M}^{j_k}\right\}_\nu\right\| \le |\mu_\nu|^{j_k}\left(j_k\right)^{n-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Пользуясь теоремой о среднем значении и условиями (10), (12), (13), получим

$$\left\|F\left(x_k + u, \sigma_k + v\right)\right\| \le \|x_k\| + \delta_k + \|\sigma_k\| + 2\varepsilon_k,$$
$$\left\|G\left(x_k + u, \sigma_k + v\right) - G\left(x_k, \sigma_k\right)\right\| \le \delta_k + 2\varepsilon_k \mu^{-\alpha j_k}.$$

Предположим, что выполнены условия 3 теоремы, тогда для любого k справедливы неравенства

$$\left|\left(\mu_{2\nu_r}\right)^{j_k} \sin\left(2\pi\theta_{\nu_r} j_k\right)\right| \le 2\pi\left[\left(\eta_{\nu_r}\right)^{-1}\left|\mu_{2\nu_r}\right|\right]^{j_k}, \quad r = 1, 2, \ldots, q. \tag{16}$$

Из условий (7)–(10), (12), (16) имеем

$$\|x_k\| < 2\left\|x^0\right\| \lambda^{j_k}\left(j_k\right)^{m-1},$$
$$\left|\left\{\mathrm{M}^{j_k}\right\}_\nu Dv\right| \le |\mu_\nu|^{j_k}\left(j_k\right)^{n-1}\left(\|D\| + 1\right)\gamma_{\nu+1}^{(k)} = 4^{-1}\gamma_\nu^{(k)}, \quad \nu = 1, \ldots, n-1,$$

при $\nu = n$ последние неравенства очевидны.

Окончательно, с учетом (7)–(10), (12), (16) получим

$$\|\bar{x} - x_k\| < \delta_k,$$
$$\left|\bar{y}_\nu - \left(y_\nu^0 + \sigma_\nu^{(k)}\right)\right| < \gamma_\nu^{(k)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Из (15) следует, что в U_k лежит периодическая точка диффеоморфизма $z_k = \left(x_k^*, y^0 + \sigma_k^*\right)$, период каждой из этих точек равен $\omega + j_k$. Пусть $\Psi_k = Df^{j_k}L(z_k)$. Оценим собственные числа этой матрицы.

Пусть

$$A(k)=\frac{\partial\Phi_1\left(x_k^*,\sigma_k^*\right)}{\partial x}=A+\frac{\partial F\left(x_k^*,\sigma_k^*\right)}{\partial x},$$
$$B(k)=\frac{\partial\Phi_1\left(x_k^*,\sigma_k^*\right)}{\partial y}=B+\frac{\partial F\left(x_k^*,\sigma_k^*\right)}{\partial y},$$
$$C(k)=\frac{\partial\Phi_2\left(x_k^*,\sigma_k^*\right)}{\partial x}=C+\frac{\partial G\left(x_k^*,\sigma_k^*\right)}{\partial x},$$
$$G(k)=\frac{\partial G\left(x_k^*,\sigma_k^*\right)}{\partial y},$$

из условий (5), (13) следует

$$\lim_{k\to+\infty}A(k)=A,\quad \lim_{k\to+\infty}B(k)=B,\quad \lim_{k\to+\infty}C(k)=C,\quad \|G(k)\|<\mu^{-\alpha j_k}.$$

В этих обозначениях получим

$$\Psi_k=\begin{pmatrix}\Lambda^{j_k}A(k) & \Lambda^{j_k}B(k)\\ \mathrm{M}^{j_k}C(k) & \mathrm{M}^{j_k}\left(D+G(k)\right)\end{pmatrix}.$$

Выберем конечную последовательность номеров $1\leq h_1<h_2<\ldots<h_s\leq(m+n)$, где $1\leq s\leq(m+n)$. В матрице Ψ_k выберем строки и столбцы, номера которых совпадают с выбранными номерами. Элементы матрицы, которые стоят на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют минор матрицы порядка s, такие миноры называются *главными минорами*. Ясно, что главные миноры первого порядка равны элементам главной диагонали матрицы, единственный минор порядка $(m+n)$ совпадает с определителем матрицы. Число миноров порядка s равно числу сочетаний из $(m+n)$ по s — $C^s_{(m+n)}$. В дальнейшем $\Theta_{(s)}$ — главный минор порядка s.

Запишем характеристический многочлен матрицы Ψ_k как

$$\chi(\rho)=\sum_{s=0}^{m+n}(-1)^{m+n-s}P_s(k)\rho^{m+n-s}=(-1)^{m+n}\prod_{s=1}^{m+n}\left(\rho-\rho_s(k)\right),$$

где $\rho_1(k),\rho_2(k),\ldots,\rho_{(m+n)}(k)$ — корни характеристического многочлена, а $P_0(k)=1$, $P_1(k)$, $P_2(k),\ldots,P_{(m+n)}(k)$ — его коэффициенты. Известно, что коэффициент характеристического многочлена равен сумме всех возможных главных миноров порядка s, с другой стороны, этот коэффициент равен сумме произведений из s корней многочлена, а именно,

$$P_s(k)=\sum_{(s)}\Theta_{(s)}=\sum_{(s)}\rho_{t_1}(k)\rho_{t_2}(k)\,\ldots\,\rho_{t_s}(k),$$

где $1\leq t_1<t_2<\ldots<t_s\leq(m+n)$ — натуральные числа. Число слагаемых в каждой из последних сумм равно числу сочетаний — $C^s_{(m+n)}$.

Очевидно, что

$$P_1(k)=\mathrm{Tr}\Psi_k=\sum_{s=1}^{m+n}\rho_s(k),$$
$$P_{(m+n)}(k)=\det\Psi_k=\prod_{s=1}^{m+n}\rho_s(k).$$

Пусть выполнены условия 3 теоремы, тогда из (13), (16) следует, что существует такая $\eta > 1$, что все главные миноры матрицы $\mathrm{M}^{j_k}\,(D + G(k))$ не превосходят по модулю η^{-j_k}. Если матрица М удовлетворяет условиям 1 или 2 теоремы, то последнее утверждение очевидно.

Из условий (4), (12), (13), (16) следует, что существует такая положительная величина β, что

$$|P_\nu(k)| \le \mu^{-\beta j_k}, \quad \nu = 1, 2, \ \dots, \ m + n.$$

Пусть

$$\beta < -\frac{\ln\lambda}{\ln\mu} - 1, \tag{17}$$

тогда, положив

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{n+m},$$

легко получить, применяя те же рассуждения, что и в [6], что

$$|\rho_\nu(k)| \le \mu^{-\bar{\beta} j_k}, \quad \nu = 1, 2, \ \dots, \ n + m. \tag{18}$$

Последние неравенства справедливы при достаточно больших номерах k.

Если β такова, что неравенство (17) не верно, то выбрав такую величину $\bar{\beta}$, что

$$0 < \bar{\beta} < (n+m)^{-1}\left(-\frac{\ln\lambda}{\ln\mu} - 1\right),$$

можно получить с помощью рассуждений, приведенных в [6], что неравенства (18) справедливы и в этом случае.

Из неравенств (18) следует, что характеристические показатели периодических точек z_k оцениваются следующим образом:

$$\tau_\nu \le (\omega + j_k)^{-1}\left(-\bar{\beta} j_k \ln\mu\right) \le -0.5\bar{\beta}\ln\mu, \quad \nu = 1, 2, \ \dots, \ m + n,$$

последние неравенства справедливы для всех номеров k, начиная с некоторого номера.

Теорема доказана.

Литература

1. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977.

2. *Иванов Б. Ф.* Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 8. С. 1411–1419.

3. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Доклады Академии наук. 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.

4. *Newhouse Sh.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1973. Vol. 12. P. 9–18.

5. *Васильева Е. В.* Диффеоморфизмы многомерного пространства с бесконечным множеством устойчивых периодических точек // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 3. С. 3–13.

6. *Васильева Е. В.* Устойчивость периодических точек диффеоморфизмов многомерного пространства // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Вып. 3. С. 356–366.

7. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974.

Статья поступила в редакцию 28 апреля 2019 г.;
после доработки 3 июня 2019 г.;
рекомендована в печать 13 июня 2019 г.

Контактная информация:

Васильева Екатерина Викторовна — д-р физ.-мат. наук, доц.; ekvas1962@mail.ru

Multidimensional diffemorphisms with stable periodic points

E. V. Vasil'eva

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vasil'eva E. V. Multidimensional diffemorphisms with stable periodic points. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 4, pp. 608–618. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.406 (In Russian)

Diffeomorphisms of a multidimensional space into itself with a hyperbolic fixed point are considered, it is assumed that at the intersection of the stable and unstable manifolds there are points that are different from the hyperbolic, such points are called homoclinic. The homoclinic points are divided into transversal and non-transversal, depending on the behavior of stable and unstable manifolds. From the articles of S. Newhouse, L. P. Shil'nikov, B. F. Ivanov and other authors, it follows that with a certain method of tangency of the stable manifold with unstable one at the homoclinic point, a neighborhood of a non-transversal homoclinic point contains an infinite number of stable periodic points, but at least one of the characteristic exponents at these points tends to zero with increasing period. The proposed work is a continuation of the work of the author. In previously published papers, restrictions were imposed on the eigenvalues of the Jacobi matrix of the original diffeomorphism at a hyperbolic point. More precisely, in these papers it was assumed that either all eigenvalues are real and the matrix is diagonal, or the Jacobi matrix has only one real eigenvalue modulo less than one, and all other eigenvalues are different complex integers modulo greater than unity. Under these conditions, conditions are obtained for the presence in an arbitrary neighborhood of a non-transversal homoclinic point of an infinite set of stable periodic points with characteristic exponents separated from zero. In this paper, it is assumed that the Jacobi matrix of a diffeomorphism has an arbitrary set of eigenvalues at a hyperbolic point. In this case, the conditions of existence in the neighborhood of the non-transversal homoclinic point of an infinite set of stable periodic points, whose characteristic exponents are separated from zero, are obtained. The conditions are imposed, first of all, on the method of tangency of the stable manifold with unstable one; however, in the proof of the theorem, the properties of the eigenvalues of the Jacobi matrix at a hyperbolic point are essentially used.

Keywords: multidimensional diffeomorphism, non-transversal homoclinic point, stability, characteristic exponents separated from zero.

References

1. Pliss V. A., *Integral Sets of Periodic Systems of Differential Equations* (Nauka Publ., Moscow, 1977). (In Russian)

2. Ivanov B. F., "Stability of the Trajectories That Do Not Leave the Neighborhood of a Homoclinic Curve", *Differ. Uravn.* **15**(8), 1411–1419 (1979). (In Russian)

3. Gonchenko S. V., Turaev D. V., Shil'nikov L. P., "Dynamical Phenomena in Mutidimensional Systems with a Structurally Unstable Homoclinic Poincare' Curve", *Doklady Mathematics* **17**(3), 410–415 (1993).

4. Newhouse Sh., "Diffeomorphisms with Infinitely Many Sinks", *Topology* **12**, 9–18 (1973).

5. Vasil'eva E. V., "Diffeomorphisms of Multidimensional Space with Infinite Set of Stable Periodic Points", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **45**(3), 115–124 (2012).

6. Vasil'eva E. V., "Stability of Periodic Points of Diffeomorphisms of a Multidimensional Space", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **51**(33), 204–212 (2018).

7. Oxtoby J., *Measure and Category* (Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin, 1971).

Received: April 28, 2019
Revised: June 3, 2019
Accepted: June 13, 2019

Author's information:

Ekaterina V. Vasil'eva — ekvas1962@mail.ru