УДК 517.977.1 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4
MSC 93B52, 93C05

Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор

М. М. Шумафов

Адыгейский государственный университет,
Российская Федерация, 38500, Майкоп, Первомайская, 208

Для цитирования: *Шумафов М. М.* Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 564–591.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.404

В статье дан обзор по проблеме стабилизации стационарных линейных систем управления и проблеме назначения полюсов или размещения собственных чисел. Приведены основные результаты работ по данной тематике. Рассматриваются стационарная и нестационарная стабилизации обратной связью. Приведены алгоритмы (низкочастотной и высокочастотной стабилизаций) решения проблемы Брокетта о стабилизации линейных систем нестационарной обратной связью. Даны эффективные необходимые и достаточные условия стабилизируемости двумерных и трехмерных управляемых линейных систем. Рассматривается проблема о назначении полюсов и смежные с ней вопросы.

Ключевые слова: линейная система управления, обратная связь, неустойчивая система, стабилизация, асимптотическая устойчивость, назначение полюсов.

Введение. Одной из важнейших задач теории управления является задача о стабилизации динамических систем. Интерес к проблемам стабилизации мотивируется как запросами практики управления, так и формулировками открытых проблем известными учеными. Методы стабилизации управляемых динамических систем создавались и развивались примерно последние 150 лет: от создания катаракта Вышнеградского до анализа и синтеза систем стабилизации спутников и плазмы в современных токамаках. Наиболее эффективные методы и алгоритмы стабилизации разработаны для линейных стационарных систем. Теории и практике стабилизации линейных систем и смежным с ней вопросам посвящено большое число статей и книг (см., например, обзоры [1–5]).

Однако за последние 30 лет произошел бурный рост публикаций, посвященных методам стабилизации линейных управляемых систем и смежным вопросам, которые уже не в полной мере отражены в упомянутых выше книгах и обзорах.

Одной из проблем, стимулировавшей немало публикаций, была сформулированная в 1999 году Р. Брокеттом проблема о стабилизации линейной стационарной системы с помощью линейной нестационарной обратной связи [6]. Решение этой проблемы в ряде важных для практики случаев дано в работах Г. А. Леонова [7–11] и Л. Моро (L. Moreau), Д. Аэлса (D. Aeyels) [12–14]. В этих работах с помощью стабилизирующих матриц и функций из определенных классов построены соответственно алгоритмы низкочастотной и высокочастотной стабилизаций линейных систем. Для двумерных и трехмерных управляемых систем показано, как введение в систему нестационарной обратной связи расширяет возможности стабилизации стационарной обратной связью. В работах [15–17] проблема Брокетта рассматривается в других классах стабилизирующих матриц.

В настоящей статье представлен краткий обзор работ по проблеме стабилизации линейных стационарных систем и более общей проблеме назначения полюсов (pole assignment) или размещения собственных значений (eigenvalue placement).

1. Стационарная стабилизация. В этом разделе рассматривается статическая стабилизация линейной системы стационарной обратной связью.

Рассмотрим непрерывную линейную систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}, \tag{1.1}$$

где A, B и C — вещественные постоянные матрицы размерностей $n \times n$, $n \times m$ и $l \times n$ соответственно, $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор входа или управления, $y = y(t) \in \mathbb{R}^l$ — вектор выхода (t — время).

Задача о стационарной стабилизации системы (1.1) ставится следующим образом: *Для системы (1.1) требуется найти обратную связь вида (static output feetback)*

$$u = Ky, \tag{1.2}$$

где K — вещественная постоянная $(m \times l)$-матрица, такую, чтобы замкнутая система (1.1), (1.2), т. е. система

$$\dot{x} = (A + BKC)x \tag{1.3}$$

была асимптотически устойчивой.

Другими словами, задача состоит в том, чтобы для данной тройки вещественных матриц $(A,\ B,\ C)$ найти вещественную матрицу K такую, чтобы матрица $A + BKC$ была гурвицевой: $\mathrm{Re}\lambda_j(A + BKC) < 0$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Говорят, что система (1.1) стабилизируема или тройка $(A,\ B,\ C)$ стабилизируема, если существует хотя бы одно ее стабилизирующее управление (1.2).

1.1. Стабилизация по состоянию. Пусть в системе (1.1) матрица C — единичная: $C = I$, т. е. выходом системы является вектор состояния. Тогда говорят о стабилизации по состоянию; в противном случае, когда $C \neq I$, — о стабилизации по выходу.

В [18, 19] установлено, что *достаточным* условием стабилизируемости по состоянию системы (1.1), $C = I$, является ее полная управляемость, т. е. выполнение условия управляемости Калмана

$$\mathrm{rank}(B\,AB \cdots A^{n-1}B) = n. \tag{1.4}$$

Необходимое и достаточное условие стабилизируемости по состоянию дается следующей теоремой.

Теорема 1 [20, с. 206]. *Система (1.1), где $C = I$, стабилизируема (или пара $(A,\ B)$ стабилизируема) тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\mathrm{rank}(\lambda I - A\ B) = n \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{C}^+, \tag{1.5}$$

где I — единичная матрица, $\sigma(A)$ — спектр матрицы A, $\mathbb{C}^+$ — замкнутая правая полуплоскость плоскости комплексного переменного: $\mathbb{C}^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\lambda \geq 0\}$.

Отметим, что условие (1.5) слабее, чем условие (1.4), поскольку последнее эквивалентно условию [21]

$$\mathrm{rank}(\lambda I - A \ B) = n \quad \forall \lambda \in \sigma(A).$$

Поскольку $\lambda_j(A + KC) = \lambda_j(A^T + C^T K^T)$ $(j = 1, \ldots, n)$, то из теоремы 1 следует, что в случае $B = I$ необходимым и достаточным условием стабилизируемости системы (1.1) является условие

$$\mathrm{rank}(\lambda I - A^T \ C^T) = n \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{C}^+. \tag{1.6}$$

Условие (1.6) является также критерием стабилизируемости пары (A^T, C^T), т. е. дуальной к (1.1) $(B = I)$ системы

$$\dot{x} = A^T x + C^T u \quad (y = x).$$

Из стабилизируемости пары (A^T, C^T), в силу принципа дуальности (двойственности), следует детектируемость (обнаруживаемость) системы (1.1) [22; 23, с. 100].

Если ни одна из этих двух матриц B и C не является единичной, то решение задачи о стабилизации по выходу становится значительно более трудным.

1.1.1. Квадратичная стабилизация. Достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи (1.2) $(y = x)$ можно получить, используя подход, основанный на построении квадратичной функции Ляпунова для системы (1.1) $(C = I)$. Это условие заключается в существовании решения некоторого линейного матричного неравенства. Изложим этот подход, следуя работе [5].

Из теории устойчивости Ляпунова хорошо известно, что замкнутая система (1.3) $(C = I)$ будет асимптотически устойчивой (т. е. матрица $A + BK$ гурвицева) тогда и только тогда, когда линейное матричное неравенство

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) < 0 \tag{1.7}$$

имеет положительно определенное решение $P > 0$. При этом квадратичная форма $V(x) = x^T P x$ $(P = P^T)$ является функцией Ляпунова $(V > 0, \dot{V} < 0)$ для системы $\dot{x} = (A + BK)x$.

Таким образом, задача сводится к решению неравенства (1.7) относительно матриц K и $P > 0$. Матричные переменные K и P входят в (1.7) нелинейным образом. Неравенство (1.7) можно свести к линейному неравенству, введя новые матричные переменные

$$X = P^{-1}, \ Y = KP^{-1}.$$

Для этого умножим неравенство (1.7) слева и справа на P^{-1}; в результате получим неравенство

$$XA^T + AX + Y^T B^T + BY < 0, \quad X > 0, \tag{1.8}$$

линейное по переменным X и Y. Из (1.8) можно исключить матрицу Y.

Действительно, рассмотрим квадратичную форму

$$f(x) = x^T (Y^T B^T + BY) x$$

и представим ее в виде

$$f(x) = x^T Y^T B^T x + x^T BYx = \\ = (Yx)^T B^T x + (B^T x)^T Yx = 2(Yx)^T B^T x = 2(B^T x, Yx).$$

Форма $f(x)$ обращается в 0 на подпространстве $B^T x = 0$. По лемме Финслера (см., например, [24]) существует число $\gamma > 0$ такое, что $f(x) + \gamma ||B^T x||^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, т. е.

$$Y^T B^T + BY \geq -\gamma BB^T. \tag{1.9}$$

Поэтому если имеет место (1.8), то будет выполняться неравенство

$$XA^T + AX - \gamma BB^T < 0 \quad (X > 0). \tag{1.10}$$

Обратно, пусть X — решение линейного матричного неравенства (1.10). Тогда, взяв $Y = -\frac{\gamma}{2} B^T$, получим равенство в (1.9) и, следовательно, будет выполнено неравенство (1.8) и, стало быть, неравенство (1.7). Таким образом, стабилизирующая матрица K в обратной связи (1.2) имеет вид $K = YX^{-1} = -\frac{\gamma}{2} B^T X^{-1}$. Получаем следующий результат.

Теорема 2 [5]. *Если X — решение матричного неравенства Ляпунова* ($\gamma = 2$)

$$XA^T + AX - 2BB^T < 0, \;\; X > 0, \tag{1.11}$$

то обратная связь (1.2) с матрицей

$$K = -B^T X^{-1}$$

стабилизирует систему (1.1), где $C = I$, а квадратичная форма

$$V(x) = x^T X^{-1} x$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы (1.3) ($C = I$).

Теорема 2 сводит задачу нахождения стабилизирующей матрицы K к решению линейного матричного неравенства (1.11).

1.1.2. Квадратичная стабилизация при наличии неопределенности. Пусть имеется зависящее от параметра $q \in Q \subset \mathbb{R}$ семейство систем [5]

$$\dot{x} = A(q)x + Bu, \;\; q \in Q. \tag{1.12}$$

Ставится следующая задача (в робастном варианте): найти общую обратную связь вида $u = Kx$ такую, чтобы у замкнутых систем

$$\dot{x} = (A(q) + BK), \quad q \in Q,$$

существовала общая квадратичная функция Ляпунова

$$V(x) = x^T Px, \quad P > 0 \quad (P = P^T).$$

Следующая теорема дает достаточное условие разрешимости этой задачи и является непосредственным обобщением теоремы 2 на случай *робастной стабилизации.*

Теорема 3 [5]. *Если X — решение системы матричных неравенств*

$$XA^T(q) + A(q)X - 2BB^T < 0, \quad q \in Q, \quad X > 0,$$

то обратная связь $u = Kx$ с матрицей

$$K = -B^T X^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (1.12), а квадратичная форма

$$V(x) = x^T X^{-1} x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы при всех $q \in Q$.

В случае, когда множество Q в (1.12) конечно: $Q = \{1, 2, \ldots, m\}$, теорема 3 дает достаточное условие *одновременной стабилизации*: *если система m линейных матричных неравенств*

$$XA_i^T + A_i X - 2BB^T < 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \quad X > 0,$$

имеет решение X, то обратная связь $u = Kx$ с $K = -B^T X^{-1}$ одновременно стабилизирует m систем

$$\dot{x} = A_i x + Bu \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Отметим, что теорема 3 дает лишь достаточное условие стабилизации. Поэтому робастная (и одновременная) стабилизация может быть возможна и в том случае, когда общей квадратичной функции Ляпунова не существует [5].

1.2. Стабилизация по выходу. Существуют различные подходы для решения задачи стабилизации по выходу, т. е. нахождения стабилизирующей матрицы K в (1.3). Однако исчерпывающего решения этой задачи, насколько нам известно, пока не существует, хотя для ряда частных случаев она может быть полностью исследована. Отметим некоторые из них.

В случае, когда вход и выход в системе (1.1) являются *скалярными* функциями ($m = l = 1$), используются графические (частотные) подходы — корневой годограф, критерий Найквиста — Михайлова — для нахождения коэффициента усиления K (K в данном случае скаляр) в обратной связи (1.2). Также имеются некоторые алгебраические методы, дающие необходимые и достаточные условия [25, 26] существования стабилизирующей обратной связи (1.2). Эти методы, однако, требуют некоторых предварительных вычислений — нахождения корней, собственных значений, и поэтому они усложненные [3], как и графические методы.

1.2.1. Линейно-квадратическая стабилизация. В [27] даны необходимые и достаточные условия стабилизируемости системы (1.1) обратной связью (1.2) в терминах разрешимости специального матричного уравнения типа Лурье — Риккати. Приведем основной результат.

Теорема 4 (Кучера, Сауза [27]). *Пусть в системе (1.1) матрицы A, B и C удовлетворяют условиям:*

1) пара (A, B) стабилизируема,

2) пара (A, C) детектируема.

Тогда система (1.1) стабилизируема обратной связью (1.2) тогда и только тогда, когда существует вещественная $(m \times n)$-матрица G такая, что линейно-квадратичная система уравнений

$$KC + B^T H = G, \tag{1.13}$$

$$A^T H + HA - HBB^T H + C^T C + G^T G = 0 \tag{1.14}$$

относительно матрицы H имеет решение $H = H^T$, причем $H > 0$.

Заметим, что уравнение (1.14) есть матричное алгебраическое уравнение Риккати.

Пусть выполнены равенства (1.13) и (1.14). Тогда, очевидно, имеем матричное уравнение

$$A^T H + HA - HBB^T H + C^T C + (C^T K^T + HB)(KC + B^T H) = 0,$$

которое может быть переписано так:

$$(A + BKC)^T H + H(A + BKC) = -C^T(I + K^T K)C. \tag{1.15}$$

Левую часть равенства (1.15) можно рассматривать как линейный оператор F в линейном пространстве симметрических матриц $\{H\}$, $H^T = H$. Поскольку по теореме 4 матрица $A + BKC$ устойчива, то в силу леммы Ляпунова уравнение $F(H) = M$ однозначно разрешимо относительно H для любой матрицы $M = M^T : H = L(M)$, где $L = F^{-1}$. Тогда решение уравнения (1.15) может быть представлено в виде

$$H = -L(C^T C) - L(C^T K^T KC). \tag{1.16}$$

Подставляя (1.16) в (1.13), получим квадратное уравнение относительно $(m \times n)$-матрицы $h = KC$:

$$B^T L(h^T h) - h = -G - B^T L(C^T C). \tag{1.17}$$

В таком виде записывались разрешающие уравнения Лурье (см. [28, с. 58]) в работах по нелинейным регулируемым системам.

Таким образом, уравнения (1.13), (1.14) сводятся к уравнениям Лурье — Риккати. Для нелинейных систем условие разрешимости уравнений Лурье совпадает с частотным условием Якубовича — Калмана [28, с. 51], а в линейном случае (1.1) — с классическим критерием Найквиста — Михайлова.

Аналогичные (1.14), (1.17) необходимые и достаточные условия стабилизируемости системы (1.1) в терминах разрешимости модифицированных уравнений Лурье — Риккати даны в [29, 30].

1.2.2. Квадратичная стабилизация (по выходу). Аналогично стабилизации по состоянию, рассмотренному в п. 1.1.1, для стабилизации системы (1.1) (где C необязательно единичная матрица) может быть применен тот же подход, основанный на построении квадратичной функции Ляпунова. Как и в п. 1.1.1, матрица $A + BKC$ замкнутой системы (1.3) устойчива (гурвицева) тогда и только тогда, когда существует положительно определенная матрица $P > 0$ такая, что

$$(A + BKC)^T P + P(A + BKC) < 0 \tag{1.18}$$

при некотором K.

В работах [31, 32] получены необходимые и достаточные условия стабилизации по выходу в терминах условий разрешимости неравенства (1.18) относительно K.

Теорема 5 [31, 32]. *Для существования стабилизирующей матрицы K в обратной связи (1.2) необходимо и достаточно существование матрицы $P > 0$ такой, что*

$$B^{\perp}(AP + PA^T)(B^{\perp})^T < 0, \tag{1.19}$$

$$(C^T)^{\perp}(A^T P^{-1} + P^{-1}A)[(C^T)^{\perp}]^T < 0, \tag{1.20}$$

где $B^{\perp}$ и $(C^T)^{\perp}$ — матрицы полного ранга, ортогональные матрицам B и C^T соответственно (т. е. $B^{\perp}B = 0$ и $(C^T)^{\perp}C^T = 0$).

Необходимость условий (1.19) и (1.20) очевидна. Действительно, неравенство (1.19) следует из неравенства (1.18) умножением его слева на $B^{\perp}$ и справа на $(B^{\perp})^T$. Неравенство (1.20) следует из (1.18) умножением его слева и справа на P^{-1}, а затем умножением его слева на $(C^{\perp})^T$ и справа на $[(C^T)^{\perp}]^T$.

В [31, 32] показано что обратное тоже верно: если существует матрица $P > 0$, удовлетворяющая неравенствам (1.19) и (1.20), то неравенство (1.18) разрешимо относительно K и, следовательно, существует стабилизирующая матрица в обратной связи (1.2). В [31] также приводится параметризация всех стабилизирующих матриц в обратной связи (1.2), которые соответствуют возможному решению P неравенств (1.19) и (1.20).

Таким образом, здесь задача стабилизации сводится к решению пары линейных матричных неравенств.

1.2.3. Другие подходы к решению задачи стабилизации. Для решения задачи стабилизации (1.1), (1.2) были предложены и другие методы (см. обзоры [1, 3, 5]). Мы отметим лишь некоторые из них. В [33] использовались методы нелинейного программирования; стабилизация осуществлялась минимизацией максимума вещественных частей собственных чисел замкнутой системы (1.3).

В [34] предложены алгебраические методы разрешимости (decision methods) проблемы стабилизации по выходу. Используя некоторые критерии устойчивости, например, Рауса — Гурвица, задачу стабилизации линейной системы можно свести к системе полиномиальных неравенств относительно элементов k_{ij} матрицы K в обратной связи (1.2). Затем за конечное число шагов устанавливается существование вещественных значений переменных k_{ij}, удовлетворяющих всем полиномиальным неравенствам системы.

В [35] используются методы алгебраической геометрии для стабилизации (1.3), а в [36] задача стабилизации рассматривается для типичных классов линейных систем управления.

В [37] вопрос о существовании стабилизирующей обратной связи сводится к вопросу о существовании вещественного решения некоторого множества полиномиальных неравенств с несколькими переменными. Используя эту систему неравенств, формируется некоторая система равенств, обладающая двумя свойствами: 1) система равенств имеет конечное множество решений, 2) в типическом случае эта система равенств имеет конечное множество решений. Для установления свойства того, что существует конечное множество решений, применяются некоторые факты из алгебраической геометрии.

В [38] для стабилизации неустойчивой системы $\dot{x} = Ax$ используется подход, основанный на расширении ее до устойчивой системы более высокого порядка. При этом может быть использована как статическая, так и динамическая обратная связь. В общем виде в терминах матриц задача ставится так: *Даны неустойчивая* $(n \times n)$*-матрица* A *и некоторая* $(m \times m)$*-матрица* D*. При каких условиях существуют* $(n \times m)$*- и* $(m \times n)$*-матрицы* B *и* C *такие, чтобы матрица*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

была устойчивой?

Показано, что необходимым условием существования такой матрицы M является то, что размерность m матрицы D должна быть не меньше размерности максимального неустойчивого инвариантного подпространства матрицы M. В работе дан критерий стабилизируемости матрицы M.

В [39] решается задача стабилизации системы (1.1), где матрица A имеет отрицательный след, а матрицы B и C единичные. Для стабилизации системы применяется метод вращения пространства состояний, который имеет некоторые параллели с хорошо известным методом вибрационной стабилизации, предложенным С. М. Meерковым [40, 41] в 70-х годах прошлого столетия. В работе [39] доказано, что существует стабилизирующая матрица K вида $K = k\Sigma$, где Σ — кососимметрическая матрица и k — вещественное число, такие, что матрица $A + k\Sigma$ устойчива для всех достаточно больших по модулю значений k.

В [42] предложен простой алгоритм стабилизации неопределенных (неизвестных) положений равновесия динамических систем с помощью пропорциональной обратной связи. Алгоритм применяется для стабилизации уравнений маятника, Дуффинга, Ван дер Поля и системы Лоренца.

Вопросы одновременной стабилизации линейных систем рассмотрены в монографии [43] и обзоре [5] (см. также библиографию в [5]).

Многие из существующих подходов для решения проблемы стабилизации используют *динамическую обратную связь* (dynamic output feedback), рассматриваемую как альтернативу к статической обратной связи (static output feedback).

Динамическая обратная связь описывается в пространстве состояний следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y, \\ u = C_c x_c, \end{cases} \tag{1.21}$$

где x_c — вектор размерности n_c, y — вектор выхода системы (1.1), A_c, B_c, C_c — матрицы размерностей $n_c \times n_c$, $n_c \times l$, $m \times n_c$ соответственно. Здесь n_c — заданное положительное целое число; его называют порядком (или размерностью) динамического компенсатора.

Замкнутую систему (1.1), (1.21) с динамическим компенсатором (1.21) можно свести к системе со статической обратной связью за счет увеличения порядка системы [44, 45].

Действительно, введем дополнительные управление (вход) u_c и выход y_c, положив $u_c = \dot{x}_c, y_c = x_c$. Тогда система (1.1), (1.21) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} y_c \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_c \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

а обратная связь становится *статической* и имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_c \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_c \\ y \end{pmatrix}. \qquad (1.23)$$

Теперь систему (1.22) можно записать в компактной форме

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}, \\ \tilde{y} & = & \tilde{C}\tilde{x} \end{array} \qquad (1.24)$$

со статической обратной связью $\tilde{u} = \tilde{K}\tilde{y}$, где

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_c \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{pmatrix} u_c \\ u \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} y_c \\ y \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае $n_c = n$ необходимые и достаточные условия стабилизируемости системы (1.1) хорошо известны: пара (A, B) должна быть стабилизируема, а пара (A, C) — детектируемой [23]. Задача нахождения динамической обратной связи фиксированного порядка $n_c < n$ является значительно трудной и представляет собой одну из важных проблем при проектировании систем управления.

Отметим, что возможности статической обратной связи (1.2) ограничены по сравнению с динамической (1.21) для стабилизации системы (1.1). Однако в приложениях статическая обратная связь предпочтительнее динамической [14], поскольку для настройки статической обратной связи требуется меньшее число параметров, а также нет необходимости оценки состояния и введения дополнительных переменных.

2. Нестационарная стабилизация. Проблема Брокетта. В 1999 году Р. Брокетт в книге [6] поставил проблему стабилизируемости линейной стационарной системы путем построения *нестационарной* линейной обратной связи.

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \;\; y = Cx, \qquad (2.1)$$

где A, B и C — вещественные постоянные матрицы размерностей $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$ соответственно, $x \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, $y \in \mathbb{R}^l$ — выход.

Проблема Брокетта: *дана система (2.1), требуется найти нестационарную обратную связь*

$$u = K(t)y \qquad (2.2)$$

такую, чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (A + BK(t)C)x \qquad (2.3)$$

была асимптотически устойчивой.

В предыдущем разделе рассматривалась задача стабилизации системы (2.1) с помощью постоянной матрицы $K(t) \equiv K = \text{const}$. В проблеме Брокетта требуется найти переменную стабилизирующую систему матрицу $K(t)$. Поэтому в проблеме

Брокетта требуется выяснить, *насколько введение в обратную связь зависимых от времени t матриц $K(t)$ расширяет возможности стационарной стабилизации?*

Решение проблемы Брокетта в классе кусочно-непрерывных (в частности, кусочно-постоянных) периодических матриц-функций с достаточно большим периодом (низкочастотная стабилизация) дано Г. А. Леоновым [7–11]. Для скалярного случая, когда вход и выход системы — скалярные функции ($m = l = 1$), решение проблемы Брокетта предложено Л. Моро и Д. Аэлсом [12–14] в классе непрерывных периодических функций с достаточно малым периодом (высокочастотная стабилизация).

2.1. Низкочастотная стабилизация. Ниже мы приведем основные результаты Г. А. Леонова, касающиеся низкочастотной стабилизации линейных систем.

2.1.1. Общий случай: векторный вход, векторный выход $(m \geq 1)$, $(l \geq 1)$. Предположим, что существуют постоянные матрицы K_1 и K_2 такие, что линейная система

$$\dot{x} = (A + BK_jC)x, \quad j = 1, 2, \tag{2.4}$$

обладает устойчивым линейным инвариантным многообразием L_j и линейным инвариантным многообразием M_j такими, что

$$M_j \cap L_j = \{0\}, \quad \dim L_j + \dim M_j = n \quad (j = 1, 2).$$

Допустим, что для каждого решения $x_j(t, x_0)$, $x_j(0, x_0) = x_0$ системы (2.4) существуют положительные числа λ_j, μ_j, α_j, β_j такие, что

$$||x_j(t, x_0)|| \leq \alpha_j ||x_0|| \exp(-\lambda_j t) \quad \forall x_0 \in L_j, \tag{2.5}$$

$$||x_j(t, x_0)|| \leq \beta_j ||x_0|| \exp(\mu_j t) \quad \forall x_0 \in M_j. \tag{2.6}$$

Предположим далее, что существуют матрица-функция $S(t)$ и число $\tau > 0$ такие, что преобразование g_0^τ за время от 0 до τ, порождаемое интегральными кривыми системы

$$\dot{x} = (A + BS(t)C)x, \tag{2.7}$$

переводит многообразие M_1 в многообразие, лежащее в $L_2 : g_0^\tau M_1 \subset L_2$. (Преобразование g_0^τ здесь определяется так: $g_0^\tau x_0 = \varphi(\tau; 0, x_0)$, где $\varphi(t; 0, x_0)$ — решение уравнения (2.7) с начальным условием $\varphi(0; 0, x_0) = x_0$.)

При сделанных выше предположениях справедлива следующая основная теорема Леонова.

Теорема 6 (Леонов [7–9]). *Если выполняется неравенство*

$$\lambda_1 \lambda_2 > \mu_1 \mu_2, \tag{2.8}$$

где λ_j, μ_j $(j = 1, 2)$ — числа из (2.5), (2.6), то существует кусочно-непрерывная периодическая матрица-функция $K(t)$ такая, что система (2.3) асимптотически устойчива.

В двумерном случае ($n = 2$) из теоремы 2 следует

Теорема 7 (Леонов [7, 8, 11]). *Пусть $n = 2$. Предположим, что существуют матрицы K_1 и K_2, удовлетворяющие условиям:*

1) $\det BK_1C \neq 0$, $\mathrm{Tr} BK_1C \neq 0$;

если $\det BK_1C = 0$, *то по крайней мере одно из неравенств*

$$\det A \neq 0 \text{ или } \det(a_1, r_2) + \det(r_1, a_2) \neq 0$$

верно, где a_1, a_2 *и* r_1, r_2 — *первый и второй столбцы матриц* A *и* BK_1C *соответственно;*

2) *матрица* $A+BK_2C$ *имеет комплексно-сопряженные собственные значения.*

Тогда существует кусочно-постоянная периодическая матрица-функция $K(t)$ *такая, что система (2.3) асимптотически устойчива.*

При этом периодическую матрицу $K(t)$ *можно выбрать так:*

$$K(t) = \begin{cases} \gamma K_1 \text{ для } t \in [0, t_1), \\ K_2 \text{ для } t \in [t_1, t_1 + \tau), \\ \gamma K_1 \text{ для } t \in [t_1 + \tau, t_1 + t_2 + \tau), \end{cases} \tag{2.9}$$

$K(t+T) = K(t)$, *где* γ — *достаточно большое число,* $T = t_1 + t_2 + \tau$, t_1, t_2 — *достаточно большие числа.*

2.1.2. Скалярный случай $(m = l = 1)$**.** В скалярном случае, используя основную теорему 6, устанавливается справедливость следующих теорем.

Теорема 8 (Леонов [7,11]). *Пусть в системе (2.1)* B — *вектор-столбец, а* C — *вектор-строка и* $\dim M_1 = 1$, $\dim L_2 = n - 1$, *где* M_1 *и* L_2 — *линейные многообразия, связанные с (2.4).*

Предположим, что выполнено условие (2.8) и существует число $S_0 \neq K_j$ $(j = 1, 2)$ *(где* K_1 *и* K_2 — *числа в (2.4),* $m = l = 1$*) такое, что матрица* $A + S_0BC$ *имеет два комплексных собственных значения* $\lambda_0 \pm i\omega_0$, *а остальные собственные значения* λ_k *удовлетворяют условию* $\mathrm{Re}\lambda_k < \lambda_0$ $(k = 1, \ldots, n-2)$.

Тогда существует кусочно-постоянная периодическая функция $K(t)$ *вида (2.9) такая, что система (2.3) асимптотически устойчива.*

Следующие теоремы касаются случаев: 1) $CB \neq 0$, 2) $CB = 0$, $\dim L_2 = n - 1$, 3) $CB = 0$, $\dim L_2 = n - 2$.

Теорема 9 (Леонов [7, 11]). *Пусть* B — *вектор-столбец, а* C — *вектор-строка. Предположим, что* $CB \neq 0$ *и матрица* A *имеет собственное значение* $\mu > 0$ *и* $n - 1$ *собственных значений* λ_j $(j = 1, \ldots, n-1)$ *с* $\mathrm{Re}\lambda_j < -\mu$.

Допустим, что

$$\frac{CB}{\lim\limits_{p \to \mu} (\mu - p) W(p)} < 1,$$

где $W(p) = C(Ip - A)^{-1}B$ — *передаточная функция системы (2.1).*

Тогда существует кусочно-постоянная периодическая функция $K(t)$ *вида (2.9)* $(\gamma = 1$ *и* $K_1, K_2 \in \mathbb{R})$ *такая, что система (2.3) асимптотически устойчива.*

Теорема 10 (Леонов [7]). *Пусть в (2.1)* B — *вектор-столбец, а* C — *вектор-строка. Предположим, что*

$$CB = 0, \quad \dim M_1 = 1, \quad \dim L_2 = n - 1$$

и выполняется неравенство (2.8).

Тогда существует кусочно-постоянная периодическая функция $K(t)$ *вида (2.9) такая, что система (2.3) асимптотически устойчива.*

Теорема 11 (Леонов [7]). *Пусть B — вектор-столбец, а C — вектор-строка. Предположим, что*

$$CB = 0, \quad \dim M_1 = 1, \quad \dim L_2 = n - 2$$

и выполнено неравенство (2.8).

Тогда если выполнены условия теоремы 8 для некоторого числа $S_0 \neq K_j$ ($j = 1, 2$), то существует кусочно-постоянная периодическая функция $K(t)$ вида (2.9) такая, что система (2.3) асимптотически устойчива.

2.1.3. Необходимые условия стабилизации. Приведенные выше теоремы дают *достаточные* условия существования стабилизирующей матрицы $K(t)$ в обратной связи (2.2). Для формулировки утверждения о *необходимых* условиях существования матрицы $K(t)$ в скалярном случае ($m = l = 1$) запишем систему (2.1) в канонической форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_1 x_1 - \dots - a_n x_n + u, \\ y = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n, \end{cases} \tag{2.10}$$

где числа a_j ($j = 1, \dots, n$) — коэффициенты характеристического полинома $\det(\lambda I - A)$ матрицы A, а c_j — некоторые числа.

Предположим, что $c_n \neq 0$. Тогда можно, без ограничения общности, считать, что $c_n = 1$.

Теорема 12 (Леонов [7, 11]). *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *при* $n > 2$ $c_1 \leq 0, \dots, c_{n-1} \leq 0$ *при* ($n = 2$ $c_1 \leq 0$),

2) $c_1(a_n - c_{n-1}) > a_1$, $c_1 + c_2(a_n - c_{n-1}) > a_2, \dots, c_{n-2} + c_{n-1}(a_n - c_{n-1}) > a_{n-1}$.

Тогда ни при каком выборе функции $K(t)$ обратная связь (2.2) не стабилизирует систему (2.10) и, стало быть, систему (2.1), т. е. система (2.3) не является асимптотически устойчивой ни при каком выборе $K(t)$.

Другое достаточное условие асимптотической неустойчивости системы (2.3) хорошо известно [46]:

$$Tr(A + BK(t)C) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

2.1.4. Низкочастотная стабилизация двумерных и трехмерных систем. Здесь теоремы 6–12 применяются к линейным системам второго и третьего порядка со скалярным входом и скалярным выходом. Для таких систем установлены необходимые и достаточные условия стабилизируемости [7, 11].

1. Рассмотрим линейную систему второго порядка, записанную в канонической форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + u, \\ y = c_1 x_1 + c_2 x_2, \end{cases} \tag{2.12}$$

где a_1, a_2, c_1, c_2 — вещественные числа.

Допустим, что $c_2 \neq 0$. Без ограничения общности, можно считать $c_2 = 1$.

Предположим, что система (2.12) полностью управляема и наблюдаема. Это предположение сводится к неравенству $c_1^2 - a_2c_1 + a_1 \neq 0$. Применяя теоремы 7 (или 8) и 10 к системе (2.12), можно получить следующее

Утверждение 1. *Предположим, что $c_1^2 - a_2c_1 + a_1 \neq 0$. Тогда система (2.12) стабилизируема обратной связью вида $u = k(t)y$ тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий*

$$c_1 > 0 \quad \textit{или} \quad c_1 \leq 0, \quad c_1^2 - a_2c_1 + a_1 > 0. \tag{2.13}$$

При этом функцию $k(t)$ можно выбрать кусочно-постоянной периодической с достаточно большим периодом.

Из условий Рауса — Гурвица следует, что *стационарная* стабилизация ($u = ky$, $k = \text{const}$) возможна в том и только том случае, если или $c_1 > 0$, или $c_1 \leq 0$, $a_2c_1 < a_1$. Из условий (2.13) *нестационарной* стабилизации видно, что эти условия определяют более широкую область стабилизации в плоскости параметров системы (2.12), чем область, определяемая условиями стационарной стабилизации.

2. Рассмотрим линейную систему третьего порядка, записанную в канонической форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 + u, \; y = x_1, \end{cases} \tag{2.14}$$

где a_1, a_2, a_3 — вещественные числа.

Из условий Рауса — Гурвица следует, что *стационарная* стабилизация системы (2.14) возможна тогда и только тогда, когда $a_2 > 0$, $a_3 > 0$.

Применяя теорему 11 и неравенство (2.11) можно доказать

Утверждение 2. *Необходимым и достаточным условием стабилизируемости системы (2.14) обратной связью $u = k(t)y(t)$ является неравенство $a_3 > 0$. При этом стабилизирующую функцию можно выбрать периодической вида (2.9).*

Утверждение 2, как и утверждение 1, хорошо иллюстрирует преимущества *нестационарной* стабилизации по сравнению со стационарной.

3. Рассмотрим систему (2.14), где выходом является вторая координата вектора состояния: $y = x_2$.

Применяя теорему 10 и неравенство (2.11) можно установить справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. *Пусть в системе (2.14) $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$. Тогда для стабилизируемости системы (2.14), где $y = x_2$, необходимо и достаточно, чтобы $a_3 > 0$. Стабилизирующую функцию можно выбрать в виде (2.9).*

Стационарная стабилизация системы (2.14) ($y = x_2$) возможна тогда и только тогда, когда $a_1 > 0$, $a_3 > 0$. Отсюда видно и здесь преимущество нестационарной стабилизации.

4. Рассмотрим систему (2.14), где выходом является третья координата вектора состояния: $y = x_3$.

Стационарная стабилизация возможна в том и только том случае, если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. В случае $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ стабилизация (как стационарная, так и нестационарная) с $y = x_3$ невозможна в силу теоремы 12. Используя основную теорему 6, можно доказать

Утверждение 4. *Пусть $a_1 < 0$, $a_2 \neq 0$. Тогда для стабилизируемости (2.14), где $y = x_3$, необходимо и достаточно $a_2 > 0$.*

Утверждение 4, как предыдущие утверждения, хорошо иллюстрирует преимущества *нестационарной* стабилизации по сравнению со стационарной.

2.15. Высокочастотная стабилизация. Другой, отличный от рассмотренного выше, подход к решению проблемы Брокетта был предложен Л. Моро и Д. Аэлсом [12–14]. Этот подход основан на методе усреднения и использует некоторые идеи и методы теории вибрационного управления [40, 41] и методики исследования хорошо известного явления стабилизации верхнего положения маятника с вибрирующей точкой подвеса [47, 48]. В работах [12–14] стабилизация системы осуществляется в классе непрерывных периодических функций с достаточно малым периодом (высокочастотная стабилизация). Стабилизирующие функции имеют вид

$$K(t) = \alpha + \beta\omega^k \cos(\omega t),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, ω — большой параметр. Основной результат работы [14] заключен в двух теоремах. В первой рассматривается случай $CB \neq 0$, а во второй — случай $CB = CAB = \cdots = CA^{2k-1}B = 0$.

Теорема 13 (Моро, Аэлс [14]). *Пусть B — вектор-столбец, а C — вектор-строка. Предположим, что $CB \neq 0$. Далее допустим, что существуют вещественные числа μ и $\lambda \geq 0$ такие, что матрица*

$$A + \mu BC + \lambda(CB)BCA$$

гурвицева. Тогда существует периодическая функция

$$K(t) = \alpha + \beta\omega\cos(\omega t) \tag{2.15}$$

с достаточно большим числом ω такая, что обратная связь $u = K(t)y$ равномерно экспоненциально стабилизирует систему (2.1). Здесь $\alpha = \mu + \lambda(CAB)$, а β определяется однозначно из равенства

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(\beta CB \sin t)dt\Big)^2 = 1 + \lambda(CB)^2.$$

В случае $CB = CAB = \cdots = CA^{2k-1}B = 0$ достаточным условием равномерной экспоненциальной стабилизируемости системы (2.1) является гурвициевость матрицы

$$A + \mu BC + \lambda(-1)^k(2k+1)(CA^{2k}B)BCA.$$

Тогда существует стабилизирующая функция вида

$$K(t) = \alpha + \beta\omega^{k+1}\cos(\omega t), \tag{2.16}$$

где ω — достаточно большое число, $\alpha = \mu + \lambda(-1)^k(CA^{2k+1}B)$, $\beta = \sqrt{2\lambda}$.

Высокочастотная стабилизация двумерной системы (2.12) и трехмерной системы (2.14) с помощью стабилизирующих функций соответственно (2.15) и (2.16) в обратной связи $u = K(t)y$ приводит к тем же самым условиям (2.13) и $a_3 > 0$, что и при низкочастотной стабилизации.

Таким образом, использование *нестационарной* обратной связи в линейных системах управления в общем расширяет возможности стационарной стабилизации.

Дискретная версия проблемы Брокетта изучается в работе Леонова [10].

Подробное изложение результатов Леонова и Моро и Аэлса по решению проблемы Брокетта в непрерывной и дискретной версиях можно найти в книгах [11, 49].

В [15] даны необходимые и достаточные условия существования классов стабилизирующих матриц произвольного вида, решающих проблему Брокетта. В работах [16, 17] проблема Брокетта рассматривается для систем с запаздыванием.

3. Проблема размещения собственных значений для линейных систем. Более общей проблемой, чем стабилизация, является проблема размещения собственных значений (eigenvalue placement) или назначение полюсов (pole assignment) для линейных управляемых систем. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \tag{3.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, а A, B и C — вещественные матрицы размерностей $n \times n$, $n \times m$ и $l \times n$ соответственно.

Введем в систему (3.1) обратную связь

$$u = Ky, \tag{3.2}$$

где K — вещественная постоянная $(m \times l)$-матрица.

Система (3.1), замкнутая обратной связью (3.2), принимает вид

$$\dot{x} = (A + BKC)x. \tag{3.3}$$

В приложениях часто желательно выбрать K так, чтобы матрица $A+BKC$ обладала специальными свойствами, например, была устойчивой, или ее спектр лежал в заданной области комплексной плоскости. Выше в разделе 1 был рассмотрен вопрос об устойчивости, здесь же мы рассмотрим проблему размещения собственных значений (или назначения полюсов) матрицы $A+BKC$ замкнутой системы (3.3) (собственные значения матрицы $A + BKC$ являются полюсами дробно-рациональных функций — элементов передаточной матрицы $C(\lambda I - A)^{-1}B$ системы (3.1)).

Задача размещения собственных значений для системы (3.1) ставится следующим образом.

Дана тройка $(A,\ B,\ C)$ вещественных матриц, где пара $(A,\ B)$ управляема, а пара $(A,\ C)$ наблюдаема:

$$\operatorname{rank}(B\,AB\,\ldots\,A^{n-1}B) = n,$$

$$\operatorname{rank}(C^T\,A^TC^T\,\ldots\,(A^T)^{n-1}C^T) = n;$$

кроме того, дан произвольный набор $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ комплексных чисел μ_j, замкнутый относительно операции комплексного сопряжения.

Требуется найти вещественную матрицу K такую, чтобы спектр матрицы $A + BKC$ совпадал с набором $\{\mu_j\}_{j=1}^n$:

$$\sigma(A + BKC) = \{\mu_j\}_{j=1}^n. \tag{3.4}$$

(Размерности матриц A, B, C и K согласованы.) Эту задачу еще называют проблемой управления спектром матрицы.

3.1. Случай двух матриц ($C = I$). В случае, когда в системе (3.1) $C = I$ ($y = x$), сформулированная выше задача была поставлена и решена В. И. Зубовым [18] и У. М. Уонэмом [19].

Теорема 14 (Зубов, Уонэм). *Для разрешимости задачи (3.4) ($C = I$) необходимо и достаточно, чтобы пара (A, B) была управляемой.*

Согласно [50] утверждение теоремы Зубова — Уонэма было впервые установлено для скалярного случая, когда B — вектор-столбец ($m = 1$), Бертрамом в 1959 году, используя метод корневого годографа. В 1961 году, независимо от Бертрама, Басс сформулировал и доказал (но не опубликовал) тот же самый результат. Скалярный случай рассматривали также Риссанен [51], Розенброк [52] и Калман [53]. Для векторного случая частные результаты были получены Поповым [54], Лангенхопом [55], Симоном и Миттером [56], Бруновским [57].

Для скалярного случая ($m = 1$) решение проблемы размещения собственных значений для пары (A, B) равносильно решению уравнения

$$\det(pI - A - BK) = f(p)$$

относительно вектор-строки $K = (k_1, \ldots, k_n)$, где $f(p) = p^n + c_1 p^{n-1} + \ldots + c_n$ — произвольный многочлен с вещественными коэффициентами $c_1, \ldots, c_n$. Это уравнение разрешимо однозначно относительно K и решение дается точными формулами Басса — Гура и Акерманна (см., например, [49]).

Для векторного случая доказательство теоремы Зубова — Уонэма достаточно громоздко. В ряде работ [58–60] (см. также [61–63]) были предложены альтернативные доказательства с целью упростить доказательство теоремы Зубова — Уонэма. В [11, 49] предложено простое доказательство этой теоремы, основанное на методе последовательной, поточечной замены элементов спектра матрицы A соответствующими числами из наперед заданного набора комплексных чисел. Идея этого метода восходит к работе Г. С. Аксёнова [64]. Эта идея использована также при доказательстве теоремы о стабилизации по состоянию, предложенном в [65, 66]. В работе [67] обсуждаются возможности вибрационного управления (основанного на изменении динамических свойств системы под действием параметрических возмущений) для решения проблемы размещения собственных значений. Там же, в частности, получены необходимые и достаточные условия разрешимости этой проблемы в некоторой области комплексной плоскости с помощью вибрационного управления.

3.2. Общий случай $C \neq I$. Решению задачи (3.4) и различных ее модификаций посвящено большое количество работ (см. библиографию в [49]).

Одной из первых работ, посвященных решению задачи (3.4), была статья Дэвисона [68]. В ней показана возможность размещения на комплексной плоскости произвольным образом $\max\{l, m\}$ собственных значений матрицы $A + BKC$ в случае, если матрица A циклическая, т. е. в ее жордановой форме различным клеткам соответствуют различные собственные значения.

Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{rank} B = m$, $\mathrm{rank} C = l$.

Точная формулировка результата Дэвисона заключена в следующей теореме.

Теорема 15 (Дэвисон [68]). *Пусть в системе (3.1) пара (A, B) управляема, а пара (A, C) наблюдаема. Пусть матрица A циклическая. Тогда существует вещественная матрица K такая, что* $\max\{l, m\}$ *собственных значений матрицы $A + BKC$ замкнутой системы (3.3) будут сколь угодно близки к* $\max\{l, m\}$

произвольно заданным наперед комплексным числам, замкнутым относительно операции комплексного сопряжения.

В [69, 70] утверждение теоремы Дэвисона доказано без предположения цикличности матрицы A. Утверждения, аналогичные теореме Дэвисона, были доказаны при несколько других условиях и подходах в работах [71–73].

В более поздних работах Дэвисона и Уанга [74] и Кимуры [75] было установлено, что при тех же, что и выше, условиях на матрицы A, B и C при почти всех A, B и C $\min(n, m+l-1)$ собственных значений матрицы $A+BKC$ можно сделать за счет выбора матрицы K сколь угодно близкими к $\min(n, m+l-1)$ наперед заданным произвольным комплексным числам, замкнутым относительно комплексного сопряжения.

Из этого утверждения следует *достаточное условие* разрешимости задачи (3.4) в типическом случае (т. е. для почти всех A, B и C):

$$m + l \geq n + 1. \tag{3.5}$$

Здесь слова «для почти всех» означают, что если некоторое свойство P является функцией от матрицы X, то множество матриц $\{X_\alpha\}$, для которых свойство P не выполнено, представляет собой или пустое множество, или подмножество нуль-множества (гиперповерхности) некоторого нетривиального многочлена $f(x_1, \dots, x_n)$ от элементов матрицы X.

Альтернативные доказательства достаточности неравенства (3.5) для разрешимости задачи (3.4) в типическом случае даны в работах [76, 77]. Более того, в [76] показано, что если $ml = n$ и число

$$d(m, l) = \frac{1!2!\dots(l-1)!(ml)!}{m!(m+1)!\dots(m+l-1)}$$

нечетное, то задача (3.4) разрешима в типическом случае.

Достаточное условие в случае, когда число $d(m, l)$ четное, получено Уангом [78]: если $ml > n$ и число $d(m, l)$ четное, то задача (3.4) разрешима в типическом случае.

Различные элементарные доказательства утверждения Уанга даны в [79–81].

Другие *достаточные* условия разрешимости задачи (3.4) и «близких» ей задач в типическом случае получены в работах многих авторов (см. обзоры [1–4] и библиографию в книге [82]).

В [83, 84] было установлено общее *необходимое* условие разрешимости задачи (3.4) в типическом случае:

$$ml \geq n. \tag{3.6}$$

В [84] показано, что неравенство (3.6), вообще говоря, не является достаточным условием разрешимости задачи (3.4). А именно, *если $m = l = 2$ и $n = 4$, то задача (3.4) не разрешима в типическом случае.*

Во многих работах (см. библиографию в книге [82]) рассматривалась более общая задача (см., например, [85]), когда произвольно задаются не только собственные значения $\mu_1, \dots, \mu_r$ матрицы замкнутой системы, но и соответствующие им собственные векторы $\xi_1, \dots, \xi_r$, или когда задаются отвечающие этим собственным значениям элементарные делители (eigenstructure assignment).

В такой обобщенной постановке задачи размещения собственных значений посвящены работы Розенброка [86], Калмана [87], Мура [88], Срайнаткумара [89] и других авторов. В [89], в частности, доказано следующее утверждение.

Если пара (A, B) управляема, пара (A, C) наблюдаема и $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} C = l$, *то существует матрица K такая, что* $\max(m, l)$ *собственных значений матрицы $A + BKC$ равны* $\max(m, l)$ *наперед заданным числам с соответствующими* $\max(m, l)$ *собственными векторами с* $\min(m, l)$ *наперед заданными произвольно их компонентами.*

В [90] рассматриваются численные методы для нахождения робастных решений проблемы размещения как собственных значений, так и собственных значений и соответствующих им собственных векторов с помощью полной обратной связи (по состоянию).

Основные результаты по обобщенной проблеме размещения собственных чисел можно найти в обзорах [3, 85] (см. также библиографию в [82]).

В работах [91–95] получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (3.4) управления спектром матрицы в случае, когда матрицы A, B и C имеют специальный вид.

В [96] приведен алгоритм решения *обобщенной задачи* размещения собственных значений в следующей постановке. *Даны вещественные матрицы A, B и C и n замкнутых подмножеств $S_1, \ldots, S_n$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Требуется найти вещественную матрицу K такую, чтобы собственные значения λ_j матрицы $A + BKC$ лежали в множествах S_j соответственно: $\lambda_j(A+BKC) \in S_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.*

В случае, когда $S_j = \{\mu_j\}$, $\mu_j \in \mathbb{C}$, эта задача превращается в обычную задачу размещения собственных значений (3.4), а в случае $S_j = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z < 0\}$ — в задачу стабилизации. Алгоритм, предложенный в [96], является итеративным и основан на идее «чередующихся проекций»; каждая итерация включает декомпозицию Шура некоторой матрицы и решение стандартной задачи наименьших квадратов.

В [97] предложен эффективный метод решения задачи размещения собственных значений матрицы при управлении «большими» динамическими системами, размерность пространства состояний которых составляет сотни, тысячи и десятки тысяч. Такие системы возникают в различных практических приложениях [97].

В [98] предложен некоторый унифицированный алгоритм размещения собственных значений и векторов, позволяющий получить параметрическую форму для матриц полной обратной связи $u = Kx$ в линейной системе. А именно решается следующая задача.

Даны вещественные матрицы A, B и произвольный набор $\{\mu_j\}$ комплексных чисел, замкнутый относительно комплексного сопряжения, с соответствующими их кратностями μ_j; кроме того, даны порядки p_{kj} жордановых клеток $J_k(\mu_j)$, соответствующих каждому числу μ_j.

Требуется найти вещественную матрицу K и неособую матрицу X, столбцами (или строками) которой являются наперед заданные собственные векторы единичной длины такие, чтобы

$$(A + BK)X = X\mathbb{\Lambda},$$

где $\mathbb{\Lambda}$ — квазидиагональная матрица Жордана с клетками $J_k(\mu_j)$.

Для любой заданной тройки (L, M, P) множеств $L = \{\mu_j\}$, $M = \{m_j\}$ и $P = \{p_{kj}\}$ дается параметрическая формула для всех матриц K обратной связи, решающих данную задачу. Далее, эта задача также решается в *робастной* постановке: найти матрицу K такую, которая обеспечивает нечувствительность собственных значений матрицы $A + BK$ по отношению к возмущениям матриц A и B.

В [99] рассматривается задача управления конечными собственными значениями матрицы дескрипторной системы

$$E\{x(t)\} = Ax(t) + Bu(t),$$

где $\{x(t)\} := \dot{x}(t)$ — для непрерывного и $\{x(t)\} := x(t+1)$ — для дискретного случаев системы, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, A и B — вещественные матрицы, а E — вырожденная вещественная $(n \times n)$-матрица ранга r.

Пусть пучок $\lambda E - A$ матриц E и A ($\lambda \in \mathbb{C}$) имеет r конечных и $n-r$ бесконечных собственных значений. Последнее означает, что регулярный пучок $\lambda E - A$ имеет r «конечных» элементарных делителей [100, с. 333]. Формально этот факт записывается так:

$$eig(E, A) = \{\lambda_j \in \mathbb{C} | \det(\lambda_j E - A) = 0, j = 1, \ldots, r\}.$$

Множество $\{\lambda_j\}$ называется множеством полюсов пары матриц E и A.

Задача состоит в том, чтобы найти матрицу K такую, чтобы замкнутая система

$$E\{x(t)\} = (A + BK)x(t)$$

была асимптотически устойчивой, т. е. чтобы матрица $A + BK$ была гурвицевой в непрерывном случае, и шуровской ($|\lambda(A + BK)| < 1$) в дискретном случае, и при этом множество r полюсов пары матриц $(E, A+BK)$ совпало бы с наперед заданным множеством $\{\mu_j\}$ чисел $\mu_j \in \mathbb{C}$, т. е.

$$eig\{E, A + BK\} = \{\mu_j\} \quad (j = 1, \ldots, r).$$

Для решения этой задачи в [99] предложен эффективный рекуррентный метод, основанный на декомпозиции исходной системы с помощью полуортогональных делителей нуля.

В [101] обратная связь $u = Ky$ строится таким образом, чтобы при начальном выборе матрицы K_0 последовательность матриц $\{K_i\}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$), генерируемая по некоторому известному правилу, сходилась к матрице K, дающей точное решение задачи размещения собственных чисел (3.4). Предложенный алгоритм особенно эффективен в случае, когда достаточное условие $m + l > n$ разрешимости задачи (3.4) не выполняется. Эффективность алгоритма иллюстрируется двумя примерами с $n = 5$, $m = 2$, $l = 3$ и $n = 7$, $m = 2$, $l = 4$.

В работе [102] предложены сопряженные градиентные методы решения задачи (3.4). Эта задача рассматривается как матричная оптимизационная задача. Для этого вводится отображение

$$F : \mathbb{R}^{m \times l} \to \mathbb{C}^n, \quad F(K) = (\lambda_1(S(K)) - \mu_1, \ldots, \lambda_n(S(K)) - \mu_n)^T,$$

где $K \in \mathbb{R}^{m \times l}$, $S(K) = A + BKC$, $\lambda_i(S(K))$ — собственные значения матрицы $S(K)$, μ_i — заданные числа на комплексной плоскости, симметричные относительно вещественной оси. Теперь задачу (3.4) можно переформулировать как решение векторного уравнения $F(K) = 0$. Дальше рассматривается ослабленная задача — минимизация квадрата нормы векторной функции $F(K)$:

$$\|F(K)\|^2 \to \min, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times l}. \tag{3.8}$$

Таким образом, вместо задачи (3.4) здесь рассматривается приближенная задача нахождения матрицы K, которая минимизировала бы расстояние между вектором $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ собственных значений матрицы $S(K)$ замкнутой системы и заданным вектором $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ желаемых собственных чисел. Для решения задачи (3.8) применяются несколько методов, являющиеся модификациями известного классического численного метода сопряженных градиентов.

В [103] задача размещения (3.4) формулируется как задача установления сюръективности отображения

$$W : \mathbb{R}^{m \times l} \to R_n[p], \quad K \to \det(pI - A - BKC),$$

где $R_n[p]$ — множество всех полиномов n-й степени с вещественными коэффициентами и со старшим коэффициентом 1.

Используя свойства отображения W, в этой работе получены необходимые условия разрешимости задачи (3.4) и задачи стабилизируемости тройки матриц (A, B, C), т. е. системы (1.3). Рассматривается также задача размещения собственных значений и соответствующих им собственных векторов в случае различных собственных значений.

Имеется большое количество работ, в которых задачи стабилизации и размещения собственных значений (назначения спектра) рассматриваются для систем с запаздыванием ([104, 105], см. также библиографию в них). В этих задачах требуется найти такую линейную обратную связь с запаздыванием (или запаздываниями), чтобы корни характеристического квазиполинома замкнутой системы лежали в левой полуплоскости комплексной плоскости (в случае стабилизации) или характеристический квазиполином совпадал бы с наперед заданным квазиполиномом (в случае назначения полюсов). Имеется также огромное количество статей и обзоров (см., например, обзор [106]), посвященных стабилизации автономных динамических систем специальной обратной связью с запаздыванием, предложенной впервые К. Пирагасом (Pyragas) в работе [107] для стабилизации неустойчивых состояний равновесия и неустойчивых периодических орбит, встроенных в странные аттракторы хаотических систем.

Отметим, что проблема размещения собственных значений и связанные с ней смежные вопросы, в частности, вопросы стабилизации, остаются в центре внимания многочисленных исследователей и количество публикаций в этом направлении не ослабевает.

Заключение. В статье дан обзор работ по проблеме стабилизации и проблеме размещения собственных значений (назначения полюсов) для линейных стационарных систем. Рассмотрены стационарная и нестационарная стабилизации линейных систем посредством линейной статической обратной связи по состоянию и по выходу. Рассмотрена проблема Брокетта о стабилизации линейной стационарной системы с помощью линейной статической нестационарной обратной связи. Приведены алгоритмы низкочастотной и высокочастотной стабилизаций. На примере двумерных и трехмерных систем показана эффективность введения в систему нестационарной обратной связи. Рассмотрена проблема назначения полюсов для линейных систем. Приведены основные результаты по решению этой проблемы.

Проблемы стабилизации и размещения собственных значений (и смежные с ними вопросы) линейных систем являются мощным стимулом развития новых математических методов. Интерес к этим проблемам мотивируется как запросами практики управления, так и формулировками открытых проблем, возникающих в различных приложениях. В настоящем обзоре сделана попытка отразить все возрастающий поток публикаций по данной тематике. Это направление остается живой и динамичной областью исследований, где постоянно возникают новые постановки задач и соответствующие проблемы. Многие из этих проблем остаются открытыми.

Литература

1. *Bernstein D. S.* Some Open Problems in Matrix Theory Arising in Linear Systems and Control // Linear Algebra and its Applications. 1992. Vol. 162–164. P. 409–432.

2. *Blondel V., Gevers M., Lindquist A.* Survey on the state of the systems and control // European J. Contol. 1995. Vol. 1. P. 5–23.

3. *Syrmos V. L., Abdallah C. T., Dorato P., Grigoriadis K.* Static Output Feedback. A Survey // Automatica. 1997. Vol. 33, No. 2. P. 125–137.

4. Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory / ed. by V. D. Blondel, E. D. Sontag, M. Vidyasagar, J. C. Willems. London: Springer, 1999.

5. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 7–46.

6. *Brockett R.* A stabilization problem. In book: Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. London: Springer, 1999.

7. *Леонов Г. А.* Проблема Брокетта в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 4. С. 134–155.

8. *Леонов Г. А.* Стабилизационная проблема Брокетта // Автоматика и телемеханика. 2001. № 5. С. 190–193.

9. *Leonov G. A.* The Brockett Problem in the Theory of Nonstationary Stabilization of Linear Differential Equations // Amer. Math. Soc. Transl. 2002. Vol. 205, No. 2. P. 163–173.

10. *Леонов Г. А.* Проблема Брокетта для линейных дискретных систем управления // Автоматика и телемеханика. 2002. № 5. С. 92–96.

11. *Леонов Г. А., Шумафов М. М.* Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002.

12. *Moreau L., Aeyels D.* Stabilization by means of periodic output feedback // Proc. of Conference of Decision and Control (CDC). Phoenix, 1999. P. 108–109.

13. *Moreau L., Aeyels D.* A note on stabilization by periodic output feedback for third-order systems // Proc. of the 14th International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS). Perpignan, 2000. 19–23 June. 2 pp.

14. *Moreau L., Aeyels D.* Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree // Systems & Control Letters. 2004. Vol. 51, No. 5. P. 395–406.

15. *Бойков И. В.* К стабилизационной проблеме Брокетта // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 76–82.

16. *Бойков И. В.* Проблема Брокетта для систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2011. № 4(20). С. 3–13.

17. *Insperger T., Stepan G.* Brockett problem for systems with feedback delay // Proc. of the 17th World Congress of the Intern. Fed. of Aut. Contr. (IFAC). Seoul, 2008. July 6–11. P. 11491–11496.

18. *Зубов В. И.* Теория оптимального управления. Л.: Судостроение, 1966.

19. *Wonham W. M.* On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems // IEEE Trans. Aut. Contr. 1967. Vol. AC-12, No. 6. P. 660–665.

20. *Hautus M. L. J.* Controllability and observability conditions of linear autonomous systems // Nedert. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A. 1969. Vol. 72. P. 443–448.

21. *Kailath T.* Linear Systems // In: Prentice-Hall Information and System Sciences Series. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1980.

22. *Kalman R. E.* Contribution to the theory of optimal theory // Bol. Soc. Mat. Mexicana. 1960. Vol. 5. P. 102–119.

23. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.

24. *Кузьмин П. А.* Малые колебания и устойчивость движения. М.: Наука, 1973.

25. *Helmke U., Anderson B.* Hermitian pencils and output feedback stabilization of scalar systems // Int. J. Control. 1992. Vol. 56. P. 857–876.

26. *Perez F., Abdallah C., Dorato P., Docambo D.* Algebraic testsfor output stabilizability // Proc. 32nd IEEE Conf. on Decision and Control., San Antonio, TX. 1993. P. 2385–2386.

27. *Kucera V., Souza C.* A necessary and sufficient condition for output feedback stabilizability // Automatica. 1995. Vol. 31. P. 1357–1359.

28. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

29. *Trofino-Neto A., Kucera V.* Stabilization via static output feedback // IEEE Trans. Aut. Control. 1993. Vol. AC-38. P. 764–765.

30. *Cao Y. Y., Sun Y. X., Mao W. J.* A new necessary and sufficient condition for static output feedback stabilizability and comments on “Stabilization via static Output feedback” // IEEE Trans. Aut. Control. 1998. Vol. AC-43 (8). P. 1110–1112.

31. *Iwasaki T., Skelton R.* Parametrization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions // J. Optim. Theory Applic. 1995. Vol. 77. P. 291–307.

32. *El-Chaoui L., Gahinet P.* Rank minimization under LMI constraints: a framework for output feedback problems // Proc. Eur. Control Conf. Groningen, 1993. P. 1176–1179.

33. *Davison E.* An automatic way of finding optional control systems for large multi-variable plants // Proc. IFAC Tokyo Symp. Control. 1965. P. 357–373.

34. *Anderson B., Bose N., Jury E.* Output feedback stabilization and related problems — solution via decision methods // IEEE Trans. Aut. Control. 1975. Vol. AC-20. P. 53–65.

35. *Anderson B. D. O., Clements J. C.* Algebraic characterization of fixed modes in decentralized control // Automatica. 1981. Vol. 17. P. 703–712.

36. *Byrnes C. I., Anderson B. D. O.* Output feedback and generic stabilizability // SIAM J. Contr. Optim. 1984. No. 11. P. 362–380.

37. *Anderson B. D. O., Scott R. W.* Output feedback stabilization — solution by algebraic geometry methods // Proc. IEEE. 1977. Vol. 65. P. 849–861.

38. *Wu J. W., Lian K. Y., Lancaster P.* A stabilization criterion for matrices // Linear Algebra and its Applications. 2007. Vol. 422. P. 22–28.

39. *Crauel H., Damm T., Ilchmann A.* Stabilization of linear systems by rotation // J. Diff. Equations. 2007. Vol. 234. P. 412–438.

40. *Мееркое С. М.* Вибрационное регулирование // Автоматика и телемеханика. 1973. № 2. С. 34–43.

41. *Meerkov S. M.* Vibrational control theory // J. Franklin Inst. 1977. Vol. 3, No. 2. P. 117–128.

42. *Tamaseviciute E., Tamasevicius A.* Stabilizing uncertain steady states of some dynamical systems by means of proportional feedback // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. 2013. Vol. 18, No. 1. P. 86–98.

43. *Blondel V.* Simultaneous Stabilization of Linear Systems. London, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.

44. *Nett C., Bernstein D., Haddad W.* Minimal complexity control law synthesis. Pt. 1: Problem formulation and reduction to optimal static output feedback // Proc. American Contr. Conf. Pittsburg, 1989. P. 2056–2064.

45. *Martensson B.* The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization // Syst. Control Lett. 1985. Vol. 6. P. 87–91.

46. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Наука, 1971.

47. *Stephenson A.* A new type of dynamical stability // Mem. Proc. Manchr. Cit. Phil. Soc. 1908. Vol. 52. P. 1907–1908.

48. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. экспер. и теор. 1951. Т. 21, № 5. С. 588–598.

49. *Леонов Г. А., Шумафов М. М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

50. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

51. *Rissanen J.* Control system synthesis by analogue computer based on the “generalized linear feedback control” concept // Proc. Symp. Analog. Computation Applied to the Study Chemical Processes. Intern. seminar. Brussels, 1960. P. 1–13.

52. *Rosenbrock H. H.* Distinctive processes in process control // Chem. End. Prog. 1962. Vol. 58. P. 43–50.

53. *Kalman R. E.* Ljapunov Functions for the problem of Lur’e in Automatic Control // Proc. of the Nat. Acad. Sci. of USA. 1963. Vol. 49, No. 2. P. 201–205.

54. *Popov V. M.* Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions // Rev. Roum. Sci. Tech. Ser. Electrotech. Energ. 1964. No. 9. P. 629–690.

55. *Langenhop C. E.* On the stabilization of linear systems // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 15, No. 5. P. 735–742.

56. *Simon J. D., Mitter S. K.* A theory of modal control // Inform. Contr. 1968. Vol. 13. P. 316–353.

57. *Brunovsky P.* A classification of linear controllable systems // Kybernetika. 1970. Vol. 6, No. 3. P. 173–187.

58. *Chen C. T.* A note on pole assignment // IEEE Trans. Aut. Contr. 1968. Vol. AC-12. P. 597–598.

59. *Davison E. J.* On Pole Assignment in Multivariable Linear Systems // IEEE Trans. Aut. Contr. 1968. Vol. AC-13. P. 747–748.

60. *Heymann M.* Comments “On pole assignment in multi-input controllable linear systems” // IEEE Trans. Aut. Contr. 1968. Vol. AC-13. P. 748–749.

61. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.

62. *Wonham W. M.* Linear Multivariable Control: a Geometric Approach. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1979.

63. *Смирнов Е. Я.* Стабилизация программных движений. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997.

64. *Аксенов Г. С.* К задаче стабилизации линейного объекта управления // Вестник Ленинградского гос. ун-та. 1977. № 7. С. 5–8.

65. *Леонов Г. А., Шумафов М. М.* Элементарное доказательство теоремы о стабилизируемости линейных управляемых систем // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2003. Вып. 3 (№ 17). С. 56–68.

66. *Леонов Г. А., Шумафов М. М.* Алгоритм пошаговой стабилизации линейного объекта управления // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естественные науки. 2005. № 2. С. 14–19.

67. *Kabamba R. T., Meerkov S. M., Roh E. K.* Pole Placement Capabilities of Vibrational Control// IEEE Trans. Aut. Contr. 1998. Vol. AC-43, No. 9. P. 1256–1261.

68. *Davison E. J.* On Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback // IEEE Trans. Aut. Contr. 1970. Vol. AC-15. P. 348–351.

69. *Davison E. J., Chatterjee R.* A Note on Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback // IEEE Trans. Aut. Contr. 1971. Vol. AC-16. P. 98–99.

70. *Davison E. J.* An Algorithm for the Assignment of Closed-Loop Poles Using Output Feedback in Large Multivariable Systems // IEEE Trans. Aut. Contr. 1973. Vol. AC-18. P. 74–75.

71. *Sridhar B., Lindorff D. P.* Pole placement with constant gain output feedback // Int. J. Contr. 1973. Vol. 18. P. 993–1003.

72. *Jameson A.* Design of a single-input system for specified roots using output feedback // IEEE Trans. Aut. Contr. 1970. Vol. AC-15. P. 345–348.

73. *Nandi A. K., Herzog J. H.* Comments on Design of a Single-Input System for Specified Roots Using Output Feedback // IEEE Trans. Aut. Contr. 1971. Vol. AC-16. P. 384–385.

74. *Davison E. J., Wang S. H.* On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback // IEEE Trans. Aut. Contr. 1975. Vol. AC-20. P. 516–518.

75. *Kimura H.* On pole assignment by output feedback // Int. J. Contol. 1978. Vol. 28. P. 11–22.

76. *Brockett R., Byrnes C.* Multivariable Nyquist criteria, root loci, and pole placement: a geometric viewpoint // IEEE Trans. Aut. Control. 1981. Vol. AC-26. P. 271–284.

77. *Shumacher J.* Compensator synthesis using (C, A, B) — pairs // IEEE Trans. Aut. Contr. 1980. Vol. AC-25. P. 1133–1138.

78. *Wang X.* Pole placement by static output feedback // Math. Systems, Estimations and Control. 1992. Vol. 2, No. 2. P. 205–218.

79. *Leventides J., Karcanias N.* Arbitrary pole placement via low order dynamic output feedback controllers: a solution in closed form / Technical ReportCEC/EL-NK/135. London: City University, 1995.

80. *Rosental J., Schumacher J. M., Willems J. C.* Generic eigenvalue assignment by memoryless real output feedback // Systems and Control Letters. 1995. Vol. 26. P. 253–260.

81. *Willems J. C.* Generic eigenvalue assignability by real memoryless output feedback made simple // Communications, Computation, Control and Signal Processing. N. Y.: Springer, 1997. P. 343–354.

82. *Leonov G. A., Shumafov M. M.* Stabilization of Linear Systems. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2012.

83. *Hermann R., Martin C.* Applications of algebraic geometry to systems theory: Part 1 // IEEE Trans. Aut. Contr. 1977. Vol. AC–22. P. 19–25.

84. *Willems J. C., Hesselink W. H.* Generic properties of the pole placement problem // Proc. of the 7th IFAC Congress. 1978. P. 1725–1729.

85. *Andry A. N., Shapiro E. Y., Chung J. C.* Eigenstructure Assignment for Linear Systems // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 1983. Vol. Aes-19, No. 5. P. 711–728.

86. *Rosenbrock H. H.* State Space and Multivariable Theory. New York: Wiley, 1970.

87. *Kalman R. E.* Kronecker invariants and feedback. In: Ordinary Differential Equations / ed. L. Weiss. New York: Academic Press, 1972. P. 452–471.

88. *Moore B. C.* On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment // IEEE Trans. Aut. Contr. 1976. Vol. AC-21. P. 689–692.

89. *Srinathkumar S.* Eigenvalues/Eigenvector Assignment Using Outback Feedback. National Aeronautics and Space Administration. US, 1978.

90. *Kautsky J., Nichols N. K., Van Dooren P.* Robust pole assignment in linear state feedback // Int. J. Control. 1985. Vol. 41, No. 5. P. 1129–1155.

91. *Зайцев В. А.* Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с неполной обратной связью // Дифф. уравнения. 2003. Т. 39, № 1. С. 133–135.

92. *Зайцев В. А.* Об управлении спектром и стабилизации билинейных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. 2008. № 2. С. 49–51.

93. *Зайцев В. А.* Управление спектром в линейных системах с неполной обратной связью // Дифф. уравнения. 2009. Т. 45, № 9. С. 1320–1328.

94. *Зайцев В. А.* Управление спектром в билинейных системах // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46, № 7. С. 1061–1064.

95. *Зайцев В. А.* Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46, № 12. С. 1789–1793.

96. *Yang K., Orsi R.* Generalized pole placement via based on projections // Automatica. 2006. Vol. 42. P. 2143–2150.

97. *Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.* Размещение полюсов при управлении большой энергетической системой // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 129–153.

98. *Schmid R., Ntogramatzidis L., Ngyen T., Pandey A.* A unified method for optimal arbitrary placement // Automatica. 2014. Vol. 50. P. 2150–2154.

99. *Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.* Управление конечными собственными значениями дескрипторной системы // Доклады Академии наук. 2015. Т. 460, № 4. С. 381–384.

100. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.

101. *Belozyorov V. Ye.* New solution method of linear static output feedback design problem for linear control systems // Linear Algebra and its Applications. 2016. Vol. 54. P. 204–227.

102. *Mostafa, El-Sayed M. E. M., Tawhid A., Elwan E. R.* Nonlinear Conjugate Grradient Methods For the Output Feedback Pole Assignment Problem // Pacific Journal Optimization. 2016. Vol. 12, No. 1. P. 55–85.

103. *Yannakoudacis A. G.* The static output feedback from the invariant point of view // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2016. Vol. 33. P. 639–669.

104. *Зайцев В. А., Ким И. Г.* Задача назначения конечного спектра в линейных системах запаздывания по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. 2016. Т. 26, № 4. С. 463–473.

105. *Зайцев В. А., Ким И. Г.* О назначении произвольного спектра в линейных стационарных системах с соизмеримыми запаздываниями по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 3. С. 315–325.

106. *Leonov G. A., Shumafov M. M., Kuznetsov N. V.* A short survey of delayed feedback stabilization // 1st IFAC Conference on Modeling, Identification and Control of Nonlinear Systems. St. Petersburg, June 24–26, 2015. P. 716–719.

107. *Pyragas K.* Continuos control of chaos by selfcontrolling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421–428.

Статья поступила в редакцию 9 мая 2019 г.;
после доработки 13 июня 2019 г.;
рекомендована в печать 13 июня 2019 г.

Контактная информация:
Шумафов Магомет Мишаустович — д-р физ.-мат. наук; magomet_shumaf@mail.ru, magomet_sh@mail.ru

Stabilization of linear control systems. Pole assignment problem. A survey

M. M. Shumafov

Adyghe State University, ul. Pervomayskaya, 208, Maykop, 385000, Russian Federation

For citation: Shumafov M. M. Stabilization of linear control systems. Pole assignment problem. A survey. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 4, pp. 564–591. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.404 (In Russian)

The paper reviews the problems of stabilization and pole assignment in the control of linear time-invariant systems by static state and output feedback. The main results on this topics are presented along with a literature review. Stationary and nonstationary stabilization by static feedback are considered. Algorithms of low- and high-frequency stabilization of linear systems for solving of the Brockett's stabilization problem are delivered. Effective necessary and sufficient conditions for stabilization of two- and three-dimensional controllable linear systems in terms of the system parameters are given. The pole assignment problem and related questions for linear systems are considered.

Keywords: linear system, asymptotic stability, stabilization, pole assignment, static output feedback, Brockett's problem.

References

1. Bernstein D. S., "Some Open Problems in Matrix Theory Arising in Linear Systems and Control", *Linear Algebra and its Applications* **162–164**, 409–432 (1992).

2. Blondel V., Gevers M., Lindquist A., "Survey on the state of the systems and control", *European J. Contol* **1**, 5–23 (1995).

3. Syrmos V. L., Abdallah C. T., Dorato P., Grigoriadis K., "Static Output Feedback. A Survey", *Automatica* **33**(2), 125–137 (1997).

4. *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory* (ed. by V. D. Blondel, E. D. Sontag, M. Vidyasagar, J. C. Willems, Springer, London, 1999).

5. Polyak B. T., Shcherbakov P. S., "Hard problems in linear control theory: possible approaches to solution", *Autom. Remote Control* **66**(5), 681–718 (2005).

6. Brockett R., *A stabilization problem.* In book: *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory* (Springer, London, 1999).

7. Leonov G. A., "Brockett's Problem in the Theory of Stability of Linear Differential Equations", *St. Petersburg Mathematical Journal* **13**(4), 613–628 (2001).

8. Leonov G. A., "The Brockett stabilization problem", *Autom. Remote Control* **62**(5), 847–849 (2001).

9. Leonov G. A., "The Brockett Problem in the Theory of Nonstationary Stabilization of Linear Differential Equations", *Amer. Math. Soc. Transl.* **205** (2), 163–173 (2002).

10. Leonov G. A., "The Brockett Problem for Linear Discrete Control Systems", *Autom. Remote Control* **63**(5), 777–781 (2002).

11. Leonov G. A., Shumafov M. M., *Problems of stabilization of linear controllable systems* (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2002). (In Russian)

12. Moreau L., Aeyels D., "Stabilization by means of periodic output feedback", *Proc. of Conference of Decision and Control (CDC). Phoenix, 1999, December 7–10*, 108–109 (1999).

13. Moreau L., Aeyels D., "A note on stabilization by periodic output feedback for third-order systems", *Proc. of the 14th International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS). Perpignan, 2000, 19–23 June*, 2 pp. (2000).

14. Moreau L., Aeyels D., "Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree", *Systems & Control Letters* **51**(5), 395–406 (2004).

15. Boikov I. V., "The Brockett stabilization problem", *Autom. Remote Control* **66**(5), 746–751 (2005).

16. Boikov I. V., "The Brockett stabilization problem for the system of nonlinear differential equations with delay", *Izvestiya vuzov, Povolzhskii region, Fisiko-matemat. Nauki* **4**(20), 3–13 (2011). (In Russian)

17. Insperger T., Stepan G., " Brockett problem for systems with feedback delay", *Proc. of the 17th World Congress of the Intern. Fed. of Aut. Contr. (IFAC), Seoul, 2008, July 6–11*, 11491–11496 (2008).

18. Zubov V. I., *Theory of optimal control* (Sudostroenie Publ., Leningrad, 1966). (In Russian)

19. Wonham W. M., "On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-12**(6), 660–665 (1967).

20. Hautus M. L. J., "Controllability and observability conditions of linear autonomous systems", *Nedert. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A* **72**, 443–448 (1969).

21. Kailath T., *Linear Systems* (Englewood Cliffs, Prentice-Hall, N. J., 1980).

22. Kalman R. E., "Contribution to the theory of optimal theory", *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **5**, 102–119 (1960).

23. Kwakernaak H., Sivan R., *Linear optimal control* (Wiley Interscience, New York, 1972).

24. Kuzmin P. A., *Small oscillations and stability of motion* (Nauka Publ., Moscow, 1973). (In Russian)

25. Helmke U., Anderson B., "Hermitian pencils and output feedback stabilization of scalar systems", *Int. J. Control* **56**, 857–876 (1992).

26. Perez F., Abdallah C., Dorato P., Docambo D., "Algebraic testsfor output stabilizability", *Proc. 32nd IEEE Conf. on Decision and Control, San Antonio, TX*, 2385–2386 (1993).

27. Kucera V., Souza C., "A necessary and sufficient condition for output feedback stabilizability", *Automatica* **31**, 1357–1359 (1995).

28. Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh., *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities* (World Scientific, Singapore, 2004).

29. Trofino-Neto A., Kucera V., "Stabilization via static output feedback", *IEEE Trans. Aut. Control* **AC-38**, 764–765 (1993).

30. Cao Y. Y., Sun Y.-X., Mao W.-J., "A new necessary and sufficient condition for static output feedback stabilizability and comments on "Stabilization via static Output feedback", *IEEE Trans. Aut. Control* **AC-43** (8), 1110–1112 (1998).

31. Iwasaki T., Skelton R., "Parametrization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions", *J. Optim. Theory Appl.* **77**, 291–307 (1995).

32. El-Chaoui L., Gahinet P., "Rank minimization under LMI constraints: a framework for output feedback problems", *Proc. Eur. Control Conf. Groningen, 1993*, 1176–1179 (1993).

33. Davison E., "An automatic way of finding optional control systems for large multi-variable plants", *Proc. IFAC Tokyo Symp. Control*, 357–373 (1965).

34. Anderson B., Bose N., Jury E., "Output feedback stabilization and related problems — solution via decision methods", *IEEE Trans. Aut. Control* **AC-20**, 53–65 (1975).

35. Anderson B. D. O., Clements J. C., "Algebraic characterization of fixed modes in decentralized control", *Automatica* **17**, 703–712 (1981).

36. Byrnes C. I., Anderson B. D. O., "Output feedback and generic stabilizability", *SIAM J. Contr. Optim.* **11**, 362–380 (1984).

37. Anderson B. D. O., Scott R. W., "Output feedback stabilization — solution by algebraic geometry methods", *Proc. of the IEEE* **65**, 849–861 (1977).

38. Wu J.-W., Lian K.-Y., Lancaster P., "A stabilization criterion for matrices", *Linear Algebra and its Applications* **422**, 22–28 (2007).

39. Crauel H., Damm T., Ilchmann A., "Stabilization of linear systems by rotation", *J. Diff. Equations* **234**, 412–438 (2007).

40. Meerkov S. M., "Vibrational control", *Autom. Remote Control* **34**(2), 201–209 (1973).

41. Meerkov S. M., "Vibrational control theory", *J. Franklin Inst.* **3**(2), 117–128 (1977).

42. Tamaseviciute E., Tamasevicius A., "Stabilizing uncertain steady states of some dynamical systems by means of proportional feedback", *Nonlinear Analysis: Modeling and Control* **18**(1), 86–98 (2013).

43. Blondel V., *Simultaneous Stabilization of Linear Systems* (Springer-Verlag, London, Berlin, Heidelberg, 1994).

44. Nett C., Bernstein D., Haddad W., "Minimal complexity control law synthesis. Pt. 1: Problem formulation and reduction to optimal static output feedback", *Proc. American Contr. Conf., Pittsburg, 1989*, 2056–2064 (1989).

45. Martensson B., "The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization", *Syst. Control Lett.* **6**, 87–91 (1985).

46. Arnol'd V. I., *Ordinary differential equations* (3rd ed., Springer-Verlag, 1991).

47. Stephenson A., "A new type of dynamical stability", *Mem. Proc. Manchr. Cit. Phil. Soc.* **52**, 1907–1908 (1908).

48. Kapitsa P. L., "Dynamical stability of pendulum under oscillating suspension point", *Journ. experm. and theor. physics* **21**(5), 588–598 (1951). (In Russian)

49. Leonov G. A., Shumafov M. M., *Methods of stabilization of linear controllable systems* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2005).

50. Kalman R. E., Falb P. L., Arbib M. A., *Topics in Mathematical System Theory* (MC Graw Hill Book Company, New York, 1969).

51. Rissanen J., "Control system synthesis by analogue computer based on the "generalized linear feedback control" concept", *Proc. Symp. Analog. Computation Applied to the Study Chemical Processes. Intern. Seminar, Brussels, 1960*, 1–13 (1960).

52. Rosenbrock H. H., "Distinctive processes in process control", *Chem. End. Prog.* **58**, 43–50 (1962).

53. Kalman R. E., "Ljapunov Functions for the problem of Lur'e in Automatic Control", *Proc. of the Nat. Acad. Sci. of USA* **49**(2), 201–205 (1963).

54. Popov V. M., "Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions", *Rev. Roum. Sci. Tech. Ser. Electrotech. Energ.* **9**, 629–690 (1964).

55. Langenhop C. E., "On the stabilization of linear systems", *Proc. Amer. Math. Soc.* **15**(5), 735–742 (1964).

56. Simon J. D., Mitter S. K., "A theory of modal control", *Inform. Contr.* **13**, 316–353 (1968).

57. Brunovsky P., "A classification of linear controllable systems", *Kybernetika* **6**(3), 173–187 (1970).

58. Chen C. T., "A note on pole assignment", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-12**, 597–598 (1968).

59. Davison E. J., "On Pole Assignment in Multivariable Linear Systems", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-13**, 747–748 (1968).

60. Heymann M., "Comments "On pole assignment in multi-input controllable linear systems", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-13**, 748–749 (1968).

61. Andreev Yu. N., *Control of finite-dimensional linear objects* (Nauka Publ., Moscow, 1976). (In Russian)

62. Wonham W. M., *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach* (Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1979).

63. Smirnov E. Ya., *The stabilization of program motions* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 1977). (In Russian)

64. Aksenov G. S., "On the problem of stabilization of the linear object of control", *Bulletin of Leningrad State University*, issue 7, 5–8 (1977). (In Russian)

65. Leonov G. A., Shumafov M. M., "Elementary proof of the theorem on stabilizability of linear controllable systems", *The Bulletin of the Saint-Petersburg University, Ser. Mathematics, Mechanics and Astronomy*, issue 3 (17), 56–68 (2003). (In Russian)

66. Leonov G. A., Shumafov M. M., "Algorithm of step-by-step stabilization of linear object of control", *Izvest. Vuzov. North Caucasian Region. Natural Sciences* (2), 14–19 (2005). (In Russian)

67. Kabamba R. T., Meerkov S. M., Roh E. K., "Pole Placement Capabilities of Vibrational Control", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-43**(9), 1256–1261 (1998).

68. Davison E. J., "On Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-15**, 348–351 (1970).

69. Davison E. J., Chatterjee R., "A Note on Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-16**, 98–99 (1971).

70. Davison E. J., "An Algorithm for the Assignment of Closed-Loop Poles Using Output Feedback in Large Multivariable Systems", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-18**, 74–75 (1973).

71. Sridhar B., Lindorff D. P., "Pole placement with constant gain output feedback", *Int. J. Contr.* **18**, 993–1003 (1973).

72. Jameson A., "Design of a single-input system for specified roots using output feedback", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-15**, 345–348 (1970).

73. Nandi A. K., Herzog J. H., "Comments on Design of a Single-Input System for Specified Roots Using Output Feedback", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-16**, 384–385 (1971).

74. Davison E. J., Wang S. H., "On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-20**, 516–518 (1975).

75. Kimura H., "On pole assignment by output feedback", *Int. J. Control* **28**, 11–22 (1978).

76. Brockett R., Byrnes C., "Multivariable Nyquist criteria, root loci, and pole placement: a geometric viewpoint", *IEEE Trans. Aut. Control* **AC-26**, 271–284 (1981).

77. Shumacher J., "Compensator synthesis using (C, A, B) — pairs", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-25**, 1133–1138 (1980).

78. Wang X., "Pole placement by static output feedback", *Math. Systems, Estimations and Control* **2**(2), 205–218 (1992).

79. Leventides J., Karcanias N., "Arbitrary pole placement via low order dynamic output feedback controllers: a solution in closed form", *Journ. Technical Report* CEC/EL-NK/135 (City University, London, 1995).

80. Rosenthal J., Schumacher J. M., Willems J. C., "Generic eigenvalue assignment by memoryless real output feedback", *Systems & Control Letters* **26**, 253–260 (1995).

81. Willems J. C., "Generic eigenvalue assignability by real memoryless output feedback made simple", *Communications, Computation, Control and Signal Processing*, 343–354 (Springer, N. Y., 1997).

82. Leonov G. A., Shumafov M. M., *Stabilization of Linear Systems* (Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2012).

83. Hermann R., Martin C., "Applications of algebraic geometry to systems theory: Part 1", *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-22**, 19–25 (1977).

84. Willems J. C., Hesselink W. H., "Generic properties of the pole placement problem", *Proc. of the 7th IFAC Congress*, 1725–1729 (1978).

85. Andry A. N., Shapiro E. Y., Chung J. C., “Eigenstructure Assignment for Linear Systems”, *IEEE Trans. Aerospace & Electronic Systems* **Aes-19**(5), 711–728 (1983).

86. Rosenbrock H. H., *State Space and Multivariable Theory* (Wiley, New York, 1970).

87. Kalman R. E., *Kronecker invariants and feedback.* In: *Ordinary Differential Equations*, 452–471 (ed. L. Weiss, Academic Press, New York, 1972).

88. Moore B. C., “On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment”, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **AC-21**, 689–692 (1976).

89. Srinathkumar S., *Eigenvalues/Eigenvector Assignment Using Outback Feedback, National Aeronautics and Space Administration* (US, 1978).

90. Kautsky J., Nichols N. K., Van Dooren P., “Robust pole assignment in linear state feedback”, *Journ. Control* **41**(5), 1129–1155 (1985).

91. Zaitsev V. A., “Modal control of the linear differential equation with incomplete feedback”, *Differentialnye uravneniya* **39**(1), 133–135 (2003). (In Russian)

92. Zaitsev V. A., “On controlling the spectrum and stabilization of bilinear”, *Vestnik Udmurtskogo universiteta, Matematika, Mekhanika, Computer. Nauki* **2**, 49–51 (2008). (In Russian)

93. Zaytsev V. A., “Spectrum control in linear systems with incomplete feedback”, *Differentialnye uravneniya* **45**(9), 1320–1328 (2009). (In Russian)

94. Zaitsev V. A., “The spectrum control in bilinear systems”, *Differentialnye uravneniya* **46**(7), 1061–1064 (2010). (In Russian)

95. Zaitsev V. A., “Necessary and sufficient conditions of the spectrum control problem”, *Differentialnye uravneniya* **46**(12), 1789–1793 (2010). (In Russian)

96. Yang K., Orsi R., “Generalized pole placement via based on projections”, *Automatica* **42**, 2143–2150 (2006).

97. Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N., “Pole placement for controlling a large scale power system”, *Autom. Remote Control* **72**(10), 2123–2146 (2011).

98. Schmid R., Ntogramatzidis L., Ngyen T., Pandey A., “A unified method for optimal arbitrary placement”, *Automatica* **50**, 2150–2154 (2014).

99. Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N., “Controlling the finite eigenvalues of the descriptor system”, *Doklady Akademy Nauk* **460**(4), 381–384 (2015). (In Russian)

100. Gantmakher F. R., *Matrix Theory* (Nauka Publ., Moscow, 1967). (In Russian)

101. Belozyorov V. Ye., “New solution method of linear static output feedback design problem for linear control systems”, *Linear Algebra and its Applications* **54**, 204–227 (2016).

102. Mostafa El-Sayed M. E., Tawhid M. A., Elwan E. R., “Nonlinear Conjugate Grradient Methods For the Output Feedback Pole Assignment Problem”, *Pacific Journal Optimization* **12**(1), 55–85 (2016).

103. Yannakoudacis A. G., “The static output feedback from the invariant point of view”, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* **33**, 639–669 (2016).

104. Zaitsev V. A., Kim I. G., “Pole assignment a finite spectrum in linear systems with delay in state by static feedback”, *Vestnik Udmurtskogo universiteta, Matematika, Mekhanika, Computer. Nauki* **26**(4), 463–473 (2016). (In Russian)

105. Zaitsev V. A., Kim I. G., “Pole assignment an arbitrary spectrum in linear stationary systems with commensurable delays in state by static feedback”, *Vestnik Udmurtskogo universiteta, Matematika, Mekhanika, Computer. Nauki* **27**(3), 315–325 (2017). (In Russian)

106. Leonov G. A., Shumafov M. M., Kuznetsov N. V., “A short survey of delayed feedback stabilization”, *1st IFAC Conference on Modeling, Identification and Control of Nonlinear Systems, St. Petersburg, June 24–26, 2015*, 716–719 (2015).

107. Pyragas K., “Continuos control of chaos by selfcontrolling feedback”, *Phys. Lett. A* **170**, 421–428 (1992).

Received: May 9, 2019
Revised: June 13, 2019
Accepted: June 13, 2019

Author’s information:

Magomet M. Shumafov — magomet_shumaf@mail.ru