

## О методе Г. А. Леонова вычисления линеаризации трансверсальной динамики и анализа устойчивости по Жуковскому\*

*А. С. Ширяев*<sup>1</sup>, *Р. Р. Хусаинов*<sup>2</sup>, *Ш. Н. Мамедов*<sup>2</sup>,  
*С. В. Гусев*<sup>3</sup>, *Н. В. Кузнецов*<sup>3,4,5</sup>

<sup>1</sup> Норвежский технический университет, Норвегия, Тронхейм, NO-7491

<sup>2</sup> Университет Иннополис, Российская Федерация, 420500, Иннополис, Университетская ул., 1

<sup>3</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

<sup>4</sup> Институт проблем машиноведения РАН,

Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

<sup>5</sup> Университет Ювяскюля, Финляндия, Ювяскюля, Р.О. Вох 35, FI-40014

**Для цитирования:** *Ширяев А. С., Хусаинов Р. Р., Мамедов Ш. Н., Гусев С. В., Кузнецов Н. В.* О методе Г. А. Леонова вычисления линеаризации трансверсальной динамики и анализа устойчивости по Жуковскому // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 544–554.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.402>

Статья посвящена обсуждению одного из результатов Г. А. Леонова по исследованию устойчивости по Жуковскому решения нелинейного дифференциального уравнения при помощи оригинального метода вывода линеаризации трансверсальной динамики. Показано, что предложенный Леоновым метод может быть эффективно использован как в решении задачи синтеза обратной связи для управления движением механической системы, так и в анализе поведения замкнутой системы.

*Ключевые слова:* подвижное сечение Пуанкаре, устойчивость по Жуковскому, трансверсальная линеаризация.

**Введение.** Анализ устойчивости решения динамической системы является одной из основных задач качественной теории дифференциальных уравнений и нелинейной теории управления. По этой причине новые понятия и новые аргументы, возникающие в тематике, редки и представляют существенный интерес, часто формируя совершенно новые направления исследований. Примером здесь может служить статья Г. А. Леонова [1], где автором было введено понятие подвижной площадки Пуанкаре, определенной вдоль номинального решения, описан конструктивный метод построения линеаризации поведения координат на таких площадках и предложен метод анализа устойчивости номинального движения по Жуковскому. Так получилось, что два из основных утверждений работы [1] остались в тени, а их доказательства в оригинальной работе опущены. В настоящей работе предлагается дополнить указанные факты строгими рассуждениями, а также рассмотреть при-

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-38-20186\18) и Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант государственной поддержки Ведущих научных школ Российской Федерации на 2018–2019 годы № НШ-2858.2018.1).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

мер нелинейной системы управления, где применение результатов позволяет выйти за рамки исследования условий устойчивости по Жуковскому.

**Основной результат.** Рассмотрим решение  $x^0(t) = x(t, x_0)$  нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где предполагается, что  $f(\cdot)$  — гладкая вектор-функция и  $x^0(t)$  принадлежит некоторому компактному множеству  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  для всех положительных моментов времени,  $x^0(t) \in \Omega \forall t$ . Рассмотрим множество гомеоморфизмов

$$Hom := \{ \tau(\cdot) \mid \tau : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \tau(0) = 0 \}, \quad (2)$$

элементы которого определяют наборы допустимых репараметризаций времени, необходимых для определения понятия устойчивости решения по Жуковскому.

**Определение 1.** Решение  $x^0(t) = x(t, x_0)$  системы (1) называется *устойчивым по Жуковскому*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для любого  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющего неравенству  $|x_0 - y_0| \leq \delta$ , существует такой гомеоморфизм  $\tau(\cdot) \in Hom$ , что на решениях системы (1) с начальными данными  $y_0$  и  $x_0$  справедлива оценка

$$|x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (3)$$

Более того, если для некоторого  $\delta_0 > 0$  и любого  $y_0$  из шара  $\{y \in \mathbb{R}^n : |x_0 - y_0| \leq \delta_0\}$  существует такой гомеоморфизм  $\tau(\cdot) \in Hom$ , что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0)| = 0, \quad (4)$$

тогда решение  $x^0(t)$  называется *асимптотически устойчивым по Жуковскому*.

Для исследования поведения возмущенных решений системы (1) в окрестности номинального  $x^0(\cdot)$  удобно ввести семейство гиперплоскостей, ортогональных в каждый момент времени вектору скорости номинального движения.

**Определение 2.** Следуя [1], будем называть континуальное семейство гиперплоскостей, параметризованных временем  $t$  на номинальном движении,

$$S(x(t, x_0), \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n : (y - x(t, x_0))^* f(x(t, x_0)) = 0, |y - x(t, x_0)| \leq \varepsilon\} \quad (5)$$

*подвижной площадкой Пуанкаре* решения  $x(t, x_0)$ .

Понятно, что если номинальное решение  $x(t, x_0)$  устойчиво по Жуковскому, то любое из возмущенных решений  $x(t, y_0)$  системы (1) с начальными данными из шара  $|y_0 - x_0| \leq \delta$  будет пронзать семейство гиперплоскостей

$$x(\tau(t), y_0) \in S(x(t, x_0), \varepsilon), \quad (6)$$

определяя тем самым новое течение времени для прохода вдоль возмущенного решения  $\tau = \tau(t)$ . Очевидно, что репараметризация времени  $\tau(\cdot)$  в (6) зависит от начального данного  $y_0$  возмущенного решения  $x(t, y_0)$ . Сформулируем и докажем первый из результатов Г. А. Леонова о свойствах функции  $\tau(\cdot)$ .

**Утверждение 1.** Пусть возмущенное решение  $x(t, y_0)$  системы (1) определено для всех моментов времени  $t \geq 0$ , и для гомеоморфизма  $\tau(\cdot) \in \text{Hom}$  справедливо одновременно и включение

$$x(\tau(t), y_0) \in S(x(t, x_0), \varepsilon), \quad \forall t \geq 0, \quad (7)$$

и неравенство

$$f(x(\tau(t), y_0))^* f(x(t, x_0)) \neq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (8)$$

Тогда  $\tau(\cdot)$  имеет непрерывную производную, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F(\tau, t) \frac{d}{dt} \tau + \frac{\partial}{\partial t} F(\tau, t) = 0, \quad (9)$$

где скалярная функция  $F(\cdot, \cdot)$  двух аргументов  $\tau$  и  $t$  определена по правилу

$$F(\tau, t) := [x(\tau, y_0) - x(t, x_0)]^* f(x(t, x_0)). \quad (10)$$

Для доказательства утверждения заметим, что условие (7) эквивалентно тождеству

$$F(\tau(t), t) \equiv 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (11)$$

где скалярная функция  $F(\cdot, \cdot)$  задана в (10). Поэтому полная производная  $\frac{d}{dt} [F(\tau(t), t)]$  существует и равна нулю. Для обоснования правила дифференцирования сложной функции при вычислении  $\frac{d}{dt} [F(\tau(t), t)]$  заметим, что частная производная  $F(\cdot, \cdot)$  по первому аргументу имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F(\tau, t) = \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} x(\tau, y_0) \right]^* f(x(t, x_0)) = f(x(\tau, y_0))^* f(x(t, x_0)). \quad (12)$$

Тогда, в силу неравенства (8), на решении  $\tau = \tau(t)$  уравнения (11) выполнены условия теоремы о неявной функции. Поэтому производная  $\frac{d}{dt} \tau(t)$  существует и удовлетворяет уравнению (9). ■

Непосредственным следствием утверждения 1 является возможность записи гомеоморфизма  $\tau(\cdot)$  как решения дифференциального уравнения.

Действительно, для определения  $\frac{d}{dt} \tau$  из уравнения (9) осталось вычислить  $\frac{\partial}{\partial t} F(\tau, t)$ . А именно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(\tau, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \{ [x(\tau, y_0) - x(t, x_0)]^* f(x(t, x_0)) \} = \\ &= \left[ -\frac{d}{dt} x(t, x_0) \right]^* f(x(t, x_0)) + [x(\tau, y_0) - x(t, x_0)]^* \frac{d}{dt} f(x(t, x_0)) = \\ &= -f(x(t, x_0))^* f(x(t, x_0)) + [x(\tau, y_0) - x(t, x_0)]^* \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right] \Big|_{x=x^0(t)} f(x(t, x_0)). \end{aligned}$$

Поэтому, с учетом (12), получаем однозначное выражение для производной  $\tau(\cdot)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tau &= \mathcal{T}(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial t} F(\tau, t) \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} F(\tau, t) \right]^{-1} = \\ &= \frac{f(x(t, x_0))^* f(x(t, x_0)) - [x(\tau, y_0) - x(t, x_0)]^* \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right] \Big|_{x=x^0(t)} f(x(t, x_0))}{f(x(\tau, y_0))^* f(x(t, x_0))}. \quad (13) \end{aligned}$$

Последняя формула и была приведена в [1].

Ключевым шагом в исследовании устойчивости по Жуковскому решения  $x^0(t)$  системы (1) является анализ поведения невязки

$$z(t) = x(\tau(t), y_0) - x(t, x_0), \quad (14)$$

где гомеоморфизм  $\tau(t)$  определен индивидуально для каждого вектора  $y_0$  включением (7). Следуя стандартному ходу рассуждений [2, 3], для анализа устойчивости по первому приближению требуется записать нелинейной системы (1) в форме

$$\frac{d}{dt}z = Z(t, z) = A(t)z + g(t, z), \quad (15)$$

где вектор-функция  $g(\cdot)$  в окрестности  $z = 0$  имеет порядок малости выше линейного

$$|g(t, z)| = o(|z|).$$

Здесь правая часть  $Z(\cdot)$  системы (15), выраженная в исходных координатах, может быть получена прямым дифференцированием переменной (14):

$$\begin{aligned} Z(t, z) &= \frac{d}{dt} [x(\tau(t), y_0) - x(t, x_0)] = \frac{d}{dt}x(\tau(t), y_0) \frac{d}{dt}\tau(t) - \frac{d}{dt}x(t, x_0) = \\ &= f(x(\tau(t), y_0))\mathcal{T}(t, \tau(t)) - f(x(t, x_0)). \end{aligned} \quad (16)$$

В последней строке мы воспользовались ранее полученным выражением (13) для производной  $\tau(\cdot)$ . Как видно из (16), правая часть нелинейной системы (15) явно зависит от гомеоморфизма  $\tau(\cdot)$ , который, в свою очередь, является функцией невязки в начальный момент. Поэтому нетривиальным является замечание, сделанное в [1], что линейная часть динамики (15) не зависит от  $\tau(\cdot)$ . Более того, автором было приведено правило определения матричной функции  $A(\cdot)$ , не требующее замены координат.

**Утверждение 2.** *Рассмотрим возмущенное решение  $x(t) = x(t, y_0)$  системы (1), которое определено для всех моментов времени  $t \geq 0$ , и для которого найдется гомеоморфизм  $\tau(\cdot) \in \text{Нот}$ , одновременно удовлетворяющий и включению (7), и неравенству (8). Рассмотрим отклонение  $z(\cdot)$  возмущенного от номинального решения  $x^0(t) = x(t, x_0)$ , вычисленное на подвижной площадке Пуанкаре  $S(\cdot)$  номинального движения  $x^0(\cdot)$  (см. (5) и (14)). Тогда в первом приближении поведение невязки  $z(t)$  совпадает с решением  $v(t)$  линейной системы*

$$\frac{d}{dt}v(t) = A(t)v(t), \quad v(0) = y_0 - x_0, \quad (17)$$

где матричная функция  $A(\cdot)$  может быть вычислена по формуле

$$A(t) = \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x} - \frac{f(x)f(x)^*}{f(x)^*f(x)} \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial f(x)^*}{\partial x} \right] \right\} \Bigg|_{x=x^0(t)} \quad (18)$$

и не зависит от гомеоморфизма  $\tau(\cdot)$ , использованного при определении невязки  $z(\cdot)$ .

Для доказательства утверждения 2 удобно воспользоваться следующим фактом.

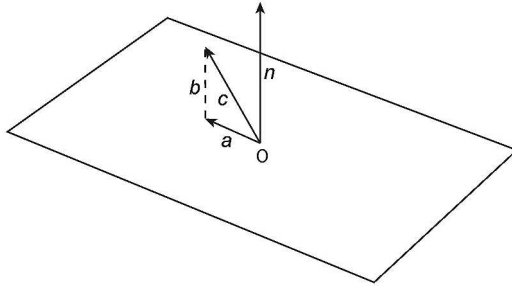


Рис. 1. Иллюстрация к замечанию 1.

**Замечание 1.** Рассмотрим два вектора  $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$  и  $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ , исходящих из одной точки  $O$ , и плоскость, ортогональную  $\vec{n}$ . Если разложить вектор  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , где  $\vec{b}$  параллелен  $\vec{n}$  и  $\vec{a}$  ортогонален  $\vec{n}$  (см. рис. 1), то вектор  $\vec{a}$  определяется как

$$\vec{a} = \left( I_n - \frac{\vec{n}\vec{n}^*}{\vec{n}^*\vec{n}} \right) \vec{c}. \quad (19)$$

Действительно, если обозначить через  $\lambda$  скалярное произведение векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{c}$ , т. е.  $\lambda := \vec{n}^*\vec{c}$ , и, не умаляя общности, предположить, что  $|\vec{n}| = 1$ , то  $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{n}$  и

$$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b} = \vec{c} - \vec{n} \cdot \lambda = \vec{c} - \vec{n} \cdot \vec{n}^*\vec{c} = \left( I_n - \frac{\vec{n}\vec{n}^*}{\vec{n}^*\vec{n}} \right) \vec{c}.$$

Вернемся к доказательству утверждения 2. Линеаризация динамики системы (1) в окрестности решения  $x^0(t) = x(t, x_0)$  позволяет приближенно записать возмущенное решение  $x(t) = x(t, y_0)$  как

$$x(t) \approx x^0(t) + w(t),$$

где вектор-функция  $w(\cdot)$  есть решение линейной системы

$$\frac{dw}{dt} = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right] \Big|_{x=x^0(t)} w, \quad w(0) = y_0. \quad (20)$$

Рассмотрим теперь рис. 2 и воспользуемся замечанием 1 для вычисления приближения невязки  $z(\cdot)$ . А именно, если обозначить через  $\vec{c}$  вектор  $x(t) - x^0(t)$ , а через  $\vec{n}$  — вектор скорости  $f(x^0(t))$ , исходящий из точки  $O = x^0(t)$ , то знание  $w(t)$  (см. (20)), позволяет вычислить приближение приращения  $v(t) \approx z(t)$  по формуле

$$v(t) = \left( I_n - \frac{f(x)f(x)^*}{f(x)^*f(x)} \right) \Big|_{x=x^0(t)} w(t). \quad (21)$$

Для определения линейного дифференциального уравнения, которому удовлетворяет  $v(\cdot)$ , найдем полную производную по времени последнего выражения (21):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \left( I_n - \frac{f(x)f(x)^*}{f(x)^*f(x)} \right) \Big|_{x=x^0(t)} w(t) \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \left( I_n - \frac{f(x^0(t))f(x^0(t))^*}{f(x^0(t))^*f(x^0(t))} \right) \right] w(t) + \left( I_n - \frac{f(x^0(t))f(x^0(t))^*}{f(x^0(t))^*f(x^0(t))} \right) \frac{d}{dt}w(t). \end{aligned} \quad (22)$$

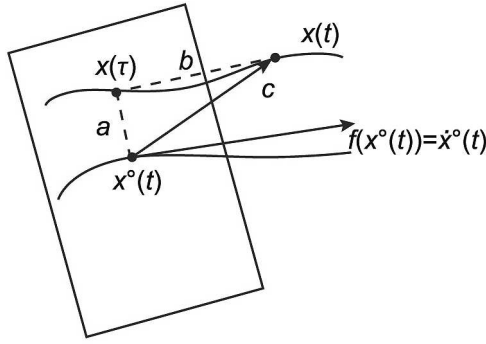


Рис. 2. Иллюстрация к доказательству утверждения 2.

Вычислим каждое из слагаемых по отдельности. Так, второе из них, в силу уравнения (20), имеет вид

$$\left( I_n - \frac{f(x^0(t))f(x^0(t))^*}{f(x^0(t))^*f(x^0(t))} \right) \frac{d}{dt} w(t) = \left( I_n - \frac{f(x^0(t))f(x^0(t))^*}{f(x^0(t))^*f(x^0(t))} \right) \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right] \Big|_{x=x^0(t)} w(t).$$

В тоже время, прямые вычисления показывают, что первое слагаемое равно

$$[R(x) + R(x)^*] \Big|_{x=x^0(t)} w(t),$$

где матричная функция  $R(\cdot)$  имеет вид

$$R(x) = \left( \frac{f(x)f(x)^*}{f(x)^*f(x)} - I_n \right) \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right] \frac{f(x)f(x)^*}{f(x)^*f(x)}.$$

Суммируя полученные выражения, приходим к выражению производной (22) в виде

$$\frac{d}{dt} v(t) = \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x} - \frac{f(x)f(x)^*}{f(x)^*f(x)} \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial f(x)^*}{\partial x} \right] \right\} \left( I_n - \frac{f(x)f(x)^*}{f(x)^*f(x)} \right) \Big|_{x=x^0(t)} w(t).$$

Используя обозначения (18) и (21), последняя формула может быть переписана как (17), что и обосновывает справедливость утверждения. ■

Линейная система (17), (18), полученная для вычисления приближения первого порядка ухода конкретного возмущенного решения от номинального (14), измеренного при помощи конкретной репараметризации времени  $\tau(\cdot)$ , оказалась не зависящей от  $\tau(\cdot)$ . Поэтому, повторив проделанные рассуждения для другого возмущенного решения, мы получим ту же формулу (18), если, конечно, для нового решения справедливы условия утверждения 2. Так будет, например, для произвольного возмущенного решения  $x(t, y_0)$ , если номинальное решение  $x(t, x_0)$  устойчиво по Жуковскому и отклонение  $|x_0 - y_0|$  в начальный момент мало.

Линейная система (17), очевидно, отличается от стандартной линеаризации (20) динамики системы (1) в окрестности решения  $x^0(t)$ . Таким образом, утверждение 2 предлагает к рассмотрению новый тип линейных систем сравнения для нелинейной системы в окрестности ее номинального решения. Укажем одно из первостепенных свойств решений линейной системы (17).

**Утверждение 3.** Для произвольного решения  $v(t)$  линейной системы (17), где матричная функция  $A(t)$  определена по формуле (18), скалярное произведение

$$v(t)^* f(x^0(t)) \equiv v(0)^* f(x^0(0)), \quad \forall t \geq 0, \quad (23)$$

остаётся постоянным.

Действительно, производная по времени функции  $v(t)^* f(x^0(t))$  на решении линейной системы (17) определяется как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [v(t)^* f(x^0(t))] &= \frac{d}{dt} [v(t)]^* f(x^0(t)) + v(t)^* \frac{d}{dt} [f(x^0(t))] = \\ &= [A(t)v(t)]^* f(x^0(t)) + v(t)^* \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right] \Big|_{x=x^0(t)} f(x^0(t)) = \\ &= v(t)^* \left[ \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial f(x)^*}{\partial x} \right) \left( I_n - \frac{f(x)f(x)^*}{f(x)^* f(x)} \right) \right] \Big|_{x=x^0(t)} f(x^0(t)). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что произведение

$$\left( I_n - \frac{f(x)f(x)^*}{f(x)^* f(x)} \right) \Big|_{x=x^0(t)} f(x^0(t))$$

даёт нулевой вектор  $\vec{0}$ . А именно, раскрывая скобки в произведении, имеем

$$\begin{aligned} \left( I_n - \frac{f(x)f(x)^*}{f(x)^* f(x)} \right) \Big|_{x=x^0(t)} f(x^0(t)) &= \\ &= f(x^0(t)) - f(x^0(t)) \frac{f(x^0(t))^* f(x^0(t))}{f(x^0(t))^* f(x^0(t))} \equiv \vec{0}, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt} [v(t)^* f(x^0(t))] = v(t)^* \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial f(x)^*}{\partial x} \right) \Big|_{x=x^0(t)} \vec{0} = 0,$$

что и доказывает справедливость утверждения. ■

Последнее рассуждение показывает, что множество решений  $v(\cdot)$ , удовлетворяющих одновременно обоим уравнениям

$$\frac{d}{dt} v(t) = A(t)v(t), \quad v(t)^* f(x^0(t)) \equiv 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (24)$$

формирует инвариантное линейное подпространство ко-размерности один, которое определяет в первом приближении координаты на подвижном сечении Пуанкаре  $S(\cdot)$  решения  $x^0(t)$  (см. (5)). Система (24) стала одним из объектов исследования в оригинальной публикации [1] и в последующих работах Г. А. Леонова и его учеников. В литературе подобные континуальные наборы линейных подпространств и их изменение вдоль движения называется трансверсальной линеаризацией [4].

**Пример анализа трансверсальной динамики.** В качестве примера использования трансверсальной линеаризации (24), вычисленной по методу Г. А. Леонова, проведем анализ поведения замкнутой системы управления

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{c}{a} \sin(x_1) - \phi(x_2) \left( \frac{g}{2} x_2^2 + c \cos(x_1) - E_0 \right) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где  $a, c$  — положительные константы,  $\phi(\cdot)$  — коэффициент усиления в обратной связи,  $E_0$  — параметр, описывающий номинальное поведение замкнутой системы. Система (25) появляется в задаче раскачивания физического маятника к одному из колебательных режимов за счет медленной подкачки энергии в систему обратной связью с переменным коэффициентом усиления  $\phi(\cdot)$ , обычно выбранным так, чтобы выполнялось неравенство

$$s \phi(s) > 0. \quad (26)$$

Локальный и нелокальный анализ поведения замкнутой системы (25) и ей подобной были рассмотрены в большом количестве публикаций (см. [5–11] и др.).

Понятно, что в случае когда начальные данные  $x_0 = [x_{10}; x_{20}]$  лежат на уровне энергии физического маятника, т. е.

$$\frac{a}{2}x_{20}^2 + c \cdot \cos x_{10} = E_0,$$

решение  $x^0(t) = x(t, x_0)$  системы (25), выпущенное из этой точки фазового пространства, будет невозмущенным решением маятника

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{c}{a} \sin x_1,$$

и оно будет периодическим, если  $E_0 \neq c$ . Аргументы, приведенные в основной части работы, позволяют провести исчерпывающее исследование замкнутой системы (25) в окрестности номинального поведения  $x^0(t)$ .

**Утверждение 4.** *Поведение трансверсальной переменной*

$$z(t) = x(\tau(t), y_0) - x(t, x_0),$$

где  $y_0 \in S(0, \varepsilon)$ , в системе (25) в первом приближении описывается функцией

$$z(t) \approx \frac{\lambda(t)}{\Delta(t)} \begin{bmatrix} \frac{c}{a} \sin x_1^0(t) \\ -x_2^0(t) \end{bmatrix}, \quad \Delta(t) = \sqrt{(x_2^0(t))^2 + \left(\frac{c}{a} \sin x_1^0(t)\right)^2}, \quad (27)$$

где  $\lambda(\cdot)$  есть решение линейного скалярного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\lambda = -x_2^0(t) \phi(x_2^0(t)) \lambda, \quad \lambda(0) = \frac{1}{\Delta(0)}(y_0 - x_0)^* \begin{bmatrix} \frac{c}{a} \sin x_1^0(0) \\ -x_2^0(0) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Более того, если энергия номинального движения маятника отличается от ее значения в верхнем положении равновесия,  $E_0 \neq c$ , а функция  $\phi(\cdot)$  удовлетворяет неравенству

$$\int_0^T x_2^0(t) \phi(x_2^0(t)) dt > 0, \quad (29)$$

где  $T$  — период решения  $x^0(t)$ , то номинальное движение  $x^0(t)$  системы (25) асимптотически устойчиво по Жуковскому.

Доказательство следует из возможности найти в примере инвариантное подпространство системы (24) в явной форме как (27), (28). Так что аргументы Г. А. Леонова позволяют заменить «точечное» условие устойчивости (26), наложенное на коэффициент усиления  $\phi(\cdot)$ , на более слабое «интегральное» неравенство (29), существенно расширяя множество стабилизирующих обратных связей.



Интересно отметить, что линейная система (28) определена и в критическом случае, когда  $E_0 = c$  и  $x^0(t)$  описывает движения маятника вдоль гомоклинической петли. Известно, что в таком случае номинальное движение  $x^0(t)$  не может быть устойчивым по Жуковскому. Тем не менее система (28) может быть использована для анализа поведения поперечной координаты в малом, например, при анализе изменения расстояния от возмущенного решения до орбиты номинального движения в замкнутой системе.

**Заключение.** Эта статья позволяет дополнить и проиллюстрировать известные результаты Г. А. Леонова по исследованию устойчивости решений нелинейных динамических систем по Жуковскому по линеаризации. Основным результатом работы является обоснование аналитического просчета вспомогательной линейной системы дифференциальных уравнений, которая описывает линеаризацию так называемой поперечной динамики нелинейной системы в окрестности ее решения. Результат проиллюстрирован на примере анализа поведения нелинейной механической системы с обратной связью.

## Литература

1. Leonov G. A. Generalization of the Andronov-Vitt theorem // Regular and Chaotic Dynamics. 2006. Vol. 11, No. 2. С. 281–289.
2. Kuznetsov N. V., Leonov G. A. Strange attractors and classical stability theory: stability, instability, Lyapunov exponents and chaos. // In: Handbook of Applications of Chaos Theory / Eds. Ch. H. Skiadas, Ch. Skiadas. Chapman and Hall/CRC, 2016. P. 105–134.
3. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Time-varying linearization and the Perron effects // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, No. 4. P. 1079–1107.
4. Shiriaev A. S., Freidovich L. B., Gusev S. V. Transverse linearization for controlled mechanical systems with several passive degrees of freedom // IEEE Transactions on Automatic Control. 2010. Vol. 55, No. 4. P. 893–906.
5. Fradkov A. L. Swinging control of nonlinear oscillations // International Journal of Control. 1996. Vol. 64, No. 6. P. 1189–1202.
6. Spong M. W., Corke P., Lozano R. Nonlinear control of reaction wheel pendulum // Automatica. 2001. Vol. 37. P. 1845–1851.
7. Spong M. W., Block D. J., Åström K. J. The mechatronic control kit for education and research // Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications. 2001. P. 105–110.
8. Shiriaev A. S., Fradkov A. L. Stabilization of invariant sets for nonlinear systems with applications to control of oscillations // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2001. P. 215–240.
9. Формальский А. М. Физико-технический практикум «Управление маятником при помощи маховика». М.: Изд-во Московского ун-та, 2003.
10. Srinivas K. N., Behera L. Swing-up control strategies for a reaction wheel pendulum // International Journal of Systems Science. 2008. Vol. 39, No. 12. P. 1165–1177.
11. Freidovich L., La Hera P., Mettin U., Robertsson A., Shiriaev A. S., Johansson R. Stable periodic motions of inertia wheel pendulum via virtual holonomic constraints // Asian Journal of Control. 2009. Vol. 11, No. 5. P. 548–556.

Статья поступила в редакцию 9 мая 2019 г.;  
после доработки 11 июня 2019 г.;  
рекомендована в печать 13 июня 2019 г.

### Контактная информация:

Ширяев Антон Станиславович — проф.; anton.shiriaev@ntnu.no  
Хусаинов Рамиль Расимович — науч. сотр.; r.khusainov@innopolis.ru  
Мамедов Шамиль Намиг оглы — мл. инж.-исслед.; sh.mamedov@innopolis.ru  
Гусев Сергей Владимирович — доц.; gusev@ieee.org  
Кузнецов Николай Владимирович — проф.; nkuznetsov239@mail.ru, n.v.kuznetsov@spbu.ru

# On Leonov's method for computing the linearization of the transverse dynamics and analysis of Zhukovsky stability\*

A. S. Shiriaev<sup>1</sup>, R. R. Khusainov<sup>2</sup>, Sh. N. Mamedov<sup>2</sup>, S. V. Gusev<sup>3</sup>, N. V. Kuznetsov<sup>3,4,5</sup>

<sup>1</sup> Norwegian University of Science & Technology, NO-7491, Trondheim, Norway

<sup>2</sup> Innopolis University, Universitetskaya ul., 1, Innopolis, 420500, Russian Federation

<sup>3</sup> St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

<sup>4</sup> Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,

Bolshoy pr. V. O., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation

<sup>5</sup> University of Jyväskylä, P.O. Box 35, FI-40014, Jyväskylä, Finland

**For citation:** Shiriaev A. S., Khusainov R. R., Mamedov Sh. N., Gusev S. V., Kuznetsov N. V. On Leonov's method for computing the linearization of the transverse dynamics and analysis of Zhukovsky stability. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 4, pp. 544–554. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.402> (In Russian)

The paper is focused on a comprehensive discussion of one of results of Prof. G. A. Leonov aimed at analysis of Zhukovsky stability of a solution of a nonlinear autonomous system by linearization. The main contribution is in deriving a linear system that approximates dynamics of the original nonlinear systems transverse to the vector-flow on a nominal behavior. As illustrated, such a linear comparison system becomes instrumental in analysis and re-design of classical feedback controllers developed earlier for stabilization of motions of nonlinear mechanical systems.

*Keywords:* moving Poincaré section, Zhukovsky stability, transverse linearization.

## References

1. Leonov G. A., "Generalization of the Andronov-Vitt theorem", *Regular and Chaotic Dynamics* **11**(2), 281–289 (2006).
2. Kuznetsov N. V., Leonov G. A., *Strange attractors and classical stability theory: stability, instability, Lyapunov exponents and chaos*, in *Handbook of Applications of Chaos Theory*, 105–134 (Eds. Ch. H. Skiadas, Ch. Skiadas, Chapman and Hall/CRC, 2016).
3. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., "Time-varying linearization and the Perron effects", *International Journal of Bifurcation and Chaos* **17** (4), 1079–1107 (2007).
4. Shiriaev A. S., Freidovich L. B., Gusev S. V., "Transverse linearization for controlled mechanical systems with several passive degrees of freedom", *IEEE Transactions on Automatic Control* **55**(4), 893–906 (2010).
5. Fradkov A. L., "Swinging control of nonlinear oscillations", *International Journal of Control* **64** (6), 1189–1202 (1996).
6. Spong M. W., Corke P., Lozano R., "Nonlinear control of reaction wheel pendulum", *Automatica* **37**, 1845–1851 (2001).
7. Spong M. W., Block D. J., Åström K. J., "The mechatronic control kit for education and research", *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, 105–110 (2001).
8. Shiriaev A. S., Fradkov A. L., "Stabilization of invariant sets for nonlinear systems with applications to control of oscillations", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 215–240 (2001).
9. Formal'ski A. M., *Controlling an inverted pendulum by an inertia wheel* (Moscow Univ. Press, Moscow, 2003). (In Russian)
10. Srinivas K. N., Behera L., "Swing-up control strategies for a reaction wheel pendulum", *International Journal of Systems Science* **39**(12), 1165–1177 (2008).

---

\* The work is supported by RFBR (grant N 18-38-20186\18) and the Leading Scientific Schools of Russia (grant NSh-2858.2018.1).

11. Freidovich L., La Hera P., Mettin U., Robertsson A., Shiriaev A.S., Johansson R., “Stable periodic motions of inertia wheel pendulum via virtual holonomic constraints”, *Asian Journal of Control* **11** (5), 548–556 (2009).

Received: May 9, 2019  
Revised: June 11, 2019  
Accepted: June 13, 2019

Authors' information:

*Anton S. Shiriaev* — anton.shiriaev@ntnu.no

*Ramil R. Khusainov* — r.khusainov@innopolis.ru

*Shamil N. Mamedov* — sh.mamedov@innopolis.ru

*Sergey V. Gusev* — gusev@ieee.org

*Nikolay V. Kuznetsov* — nkuznetsov239@mail.ru, n.v.kuznetsov@spbu.ru