Санкт-Петербургский государственный
университет

Н.Ю. Кропачева И.В. Пелевина М.Ю.
Федорова

Схема полного исследования функции одной переменной

Санкт-Петербург
2019

УДК 517(07)
ББК 22.1я73
С50

Р е ц е н з е н т ы:
доктор.физ.-мат.наук, проф. Смирнова В.Б. (С.-Петерб.гос.ун-т)
доктор.физ.-мат.наук, проф.Аксенова О.А. (ВУНЦ ВМФ «ВМА»)

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета по направлению «Геология» Санкт-Петербургского государственного университета

Кропачева Н.Ю. Пелевина И.В. Федорова М.Ю.

С50 Схема полного исследования функции одной переменной: учебно-методическое пособие/ Кропачева Н.Ю., Федорова М.Ю., Пелевина И.В. – СПб.: СПбГУ, 2019 – 57 с.

Предлагаемое учебно-методическое пособие содержит необходимый теоретический материал для проведения полного исследования функции и построения графика. Схема полного исследования функции иллюстрируется подробно рассмотренными примерами. Внимательное ознакомление с данным учебным пособием поможет. Материалы пособия могут быть использованы обучающимися как при выполнении контрольных работ (в последнем разделе пособия представлен ряд заданий для самостоятельной работы по изучению материала), так и при самостоятельном изучении данного раздела, помогут расширить представления об основных приемах и методах анализа данных, получить исследовательские навыки построения графиков, способствуют изучению других разделов математики.

Для студентов естественнонаучных специальностей Санкт-Петербургского государственного университета.

Приносим глубокую благодарность рецензентам и сотрудникам университета, чьи советы и критические замечания учтены при подготовке данного издания и способствовали его опубликованию.

УДК 517(07)
ББК 22.1я73

§ 1. Основные теоретические положения.

Рассматриваемые в математике величины можно разделить на два класса: ***постоянные***, т.е. величины, принимающие лишь одно значение, и ***переменные***, т.е. величины, которые могут в процессе решения задачи принимать различные значения. Переменная величина считается заданной, если известно множество значений, которые она может принимать. Это множество называется ***областью изменения переменной или множеством ее значений***. Как правило, переменные обозначаются строчными буквами (латинскими или греческими)

$$x, y, z\ldots,$$

а множества их значений – прописными:

$$D, E, X, Y\ldots.$$

В пособии рассматриваются переменные, множества значений которых лежат в одном из следующих ***числовых множеств***:

1) N – множестве натуральных чисел,
2) Z_+ – множестве целых неотрицательных чисел,
3) Z – множестве целых чисел,
4) Q – множестве всех рациональных чисел (т.е. множество всех несократимых дробей вида $\frac{z}{n}$, где z – целое, а n – натуральное число),
5) R – множестве всех вещественных (действительных) чисел.

Для указанных числовых множеств выполнена цепочка включений:

$$N \subset Z_+ \subset Z \subset Q \subset R,$$

то есть, если, например, $D \subset Z$, то и $D \subset \mathrm{R}$.

Основным понятием при изучении зависимости между переменными величинами является понятие ***функции***. Приведем определение так называемой функции одной переменной.

Определение 1. *Пусть заданы переменная x с областью изменения $D \subset R$ и переменная y с областью изменения $E \subset R$. Если можно указать правило f, по которому каждому значению $x \in D$ ставится в соответствие единственное значение $y \in D$, то переменная y называется* ***функцией переменной*** *x. При этом переменная x называется* ***аргументом функции***, *множество D–* ***областью определения (или областью задания) функции***, *а* *множество* E *–* ***областью изменения (или областью значений) функции***.

Тот факт, что y *является функцией* x *записывается следующим образом:*

$$y = f(x) \text{ или } y = y(x),\ x \in D.$$

Для полного исследования функции напомним основные понятия математического анализа.

Область определения функции и область значений функции.

Область определения функции $D \subset R$ – это множество всех допустимых действительных значений аргумента $x \in D$ (переменной x), при которых функция $y = f(x)$ определена. ***Область значений функции*** $E \subset R$ – это множество всех действительных значений $y \in E$, которые принимает функция.

Замечание 1. Области определения функции могут быть весьма разнообразны. Если аргумент может принимать только натуральные значения, областью определения функции является множество $D = N$. В этом случае имеем частный случай функции – числовую последовательность, обозначаемую следующим образом:

$$x_n = f(n).$$

Областью изменения аргумента также может служить любой числовой промежуток: $[a,b]$ – замкнутый промежуток или отрезок; (a,b) – открытый промежуток или интервал; $[a,b)$ или $(a,b]$ – полуоткрытые промежутки или интервалы; любой бесконечный промежуток: (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ или $(-\infty,\infty)$, а также объединение или пересечение промежутков.

Вывод. *Функция представляет собой тройку* (D,E,f), *в которую входят: область определения* D, *область значений* E *и правило* f, *по которому устанавливается соответствие между элементами множеств* D *и* E. *Задать функцию – означает указать все три элемента* D,E,f.

Способы задания функции.

1) Аналитический способ задания функции.

а) Явный способ задания функции. *Если правило* f*, по которому устанавливается соответствие между элементами множеств* D *и* E*, задается в виде формулы, указывающей, какие действия необходимо произвести над переменной* x*, чтобы получить значение* y*, то такой способ задания называется **явным**.* В этом случае область определения D и область изменения E определяются, как правило, самой формулой.

Следует отметить, что при явном задании функции для разных подмножеств множества D могут быть использованы разные формулы.

Пример 1.

Функция

$$y = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ \ln(x), & 1 < x, \end{cases}$$

задана на множестве $D = R \setminus \{0, 1\}$, на его подмножествах $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ разными формулами. Множество значений $E = R \setminus \{0\}$.

б) Неявный способ задания функции. *Если соответствие между элементами множеств* D *и* E *задается в виде уравнения*

$$F(x, y) = 0,$$

связывающего переменные $x \in D$ *и* $y \in E$*, то такой способ задания называется **неявным**. При этом, если для любого* $x \in D$ *существует значение* y*, которое совместно с* x *удовлетворяет уравнению* $F(x, y) = 0$*, то тем самым определена функция* $y = f(x)$.

Следует заметить, что не всегда удается разрешить уравнение $F(x, y) = 0$ относительно y и, тем самым, задать функцию явно, как $y = f(x)$. Кроме того, уравнение $F(x, y) = 0$ может задавать не одну, а множество функций.

Пример 2.

Уравнение

$$y^2 - x^2 = 9$$

задает две функции

$$y = f_1(x) = \sqrt{9 + x^2},$$

$$y = f_2(x) = -\sqrt{9 + x^2},$$

заданные на множестве $D = R$. Множество значений функции $f_1(x)$ – $E_1 = [3, +\infty)$, функции $f_2(x)$ – $E_2 = (-\infty, -3]$.

В) Параметрический способ задания функции. *Пусть на множестве T заданы две функции: $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, имеющие области значений D и E соответственно. Для каждого $t \in T$ значению $x = \varphi(t)$ сопоставим значение $y = \psi(t)$. При этом может случиться, что значению x сопоставлено более одного значения y. Пусть дано правило, по которому из множества значений y выбирается только одно значение. Функции*

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (t \in T),$$

*вместе с этим правилом определяют соответствие f между элементами множеств D и E. Такой способ задания функции f называется **параметрическим**, а переменная t – **параметром**.*

Пример 3.

Параметрические уравнения прямой на плоскости:

$$\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 3t - 4, \end{cases} t \in R,$$

задают функцию, которую можно получить исключением параметра t:

$$t = \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \ .$$

Ее область определения на множестве $D = R$, множество значений $E = R$

2) Словесный способ задания функции.

Если правило f*, по которому устанавливается соответствие между множествами* D *и* E *описывается словами, то такой способ задания называется* ***словесным***.

Пример 4.

Описание: «ближайшее целое, не превосходящее x», определяет функцию $[x]$, которая называется целой частью вещественного числа x:

$$[x]=n,\ n\in Z:\ n\leq x<n+1.$$

3) Табличный способ задания функции.

Если правило f*, по которому устанавливается соответствие между множествами* D *и* E*, задается в виде таблицы, в которой указываются пары соответствующих элементов этих множеств, то такой способ задания называется* ***табличным***.

Как правило, такой способ задания возникает при экспериментальном изучении функциональных зависимостей, когда в таблицу сводятся полученные из опыта данные.

Пример 5.

Таблица 1.

Зависимость скорости ветра v [м/с],

от температуры T^o.

T^o	-11	-12	-10	-13	-1
v [м/с]	3,1	2,8	3,5	2,4	1,8

4) Графический способ задания функции.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy.

Если правило f*, по которому устанавливается соответствие между множествами* D *и* E*, задается в виде кривой на плоскости* Oxy*, координатами точек которой являются пары* (x,y)

значений $x \in D$ *и соответствующего ему* $y \in E$, *то такой способ задания называется* ***графическим***.

Определение 2. ***Графиком функции*** $y = f(x)$, $x \in D$, *называется множество точек*

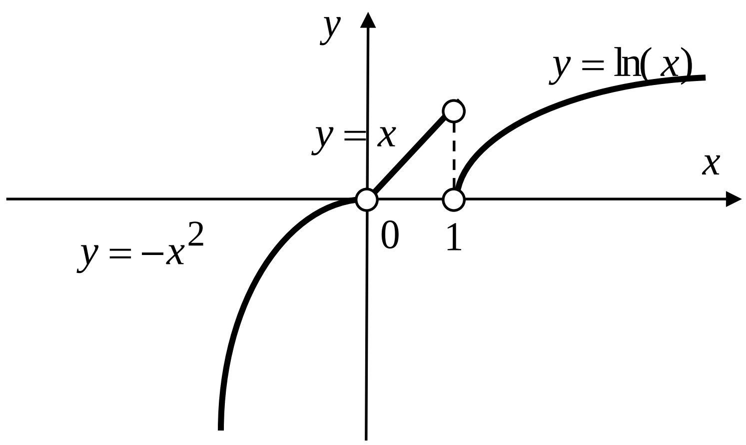
$$\Gamma = \{M(x, y) : x \in D, y = f(x)\}$$

График функции обладает следующим ***свойством:*** любая вертикальная прямая может пересекать график не более чем в одной точке.

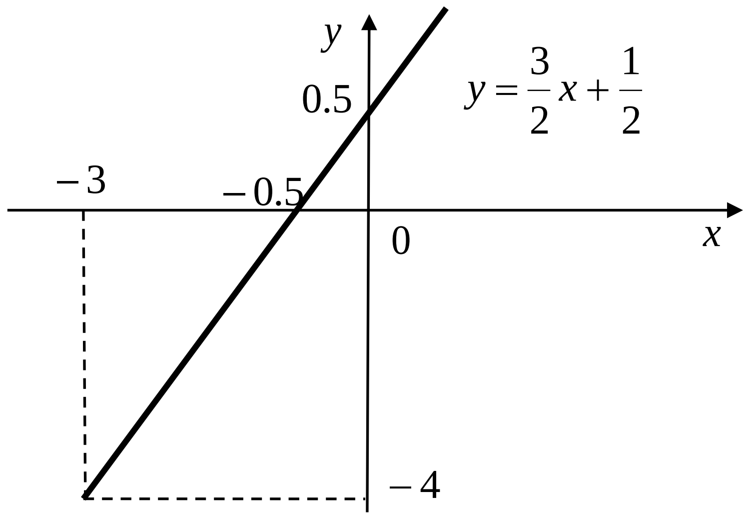
Если область задания функции представляет собой объединение непересекающихся интервалов с общими концевыми точками, на каждом из которых графиком функции является некоторая кривая, то отсутствие значения на конце одной из двух соседних кривых обозначается стрелкой, направленной к этому концу. Отсутствие значения на кривой, в общем случае, обозначается также кружком ○.

Пример 6.

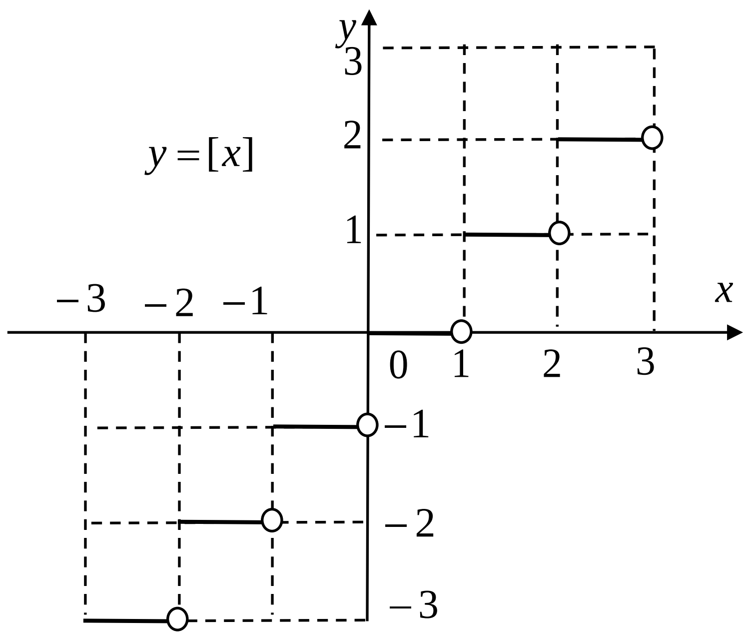
На рис. 1.1 а) представлен график функции из примера 1, на рис. 1.1 б) – из примера 3, 1.1 в) – из примера 4.



а)



б)



в)

Рис. 1. 1.

Рассмотрев различные способы задания функции, можно сделать **следующий вывод.**

Все способы задания функции связаны между собой. Каждый из способов обладает теми или иными достоинствами. Задание функции формулой позволяет по любому значению аргумента находить значение функции и решать обратную задачу (находить значение аргумента по заданному значению функции). Табличный способ сразу предоставляет числовое значение функции. Графический же способ имеет большое преимущество перед *другими способами – он обладает наглядностью, дает представление о поведении функции в целом.*

Основные свойства функций.

1) Нули функции.

Нуль функции – такое значение аргумента $x = a$, при котором значение функции равно нулю:

$$f(a) = 0.$$

Пример 7. Функция на рис. 1.1 а) нулей не имеет. Для функции на рис. 1.1 б) решается уравнение:

$$\frac{3}{2}a + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}\ .$$

2) **Четность (нечетность) функции**.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет *симметричную относительно начала координат область определения* D, то есть

$$\forall x \in D: \quad (-x) \in D.$$

Определение 3. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***четной****, если для любого* $x \in D$ *из области определения выполняется равенство:*

$$f(-x) = f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат Oy (рис 1.2 а)).

Определение 4. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***нечетной****, если для любого* $x \in D$ *из области определения выполняется равенство:*

$$f(-x) = -f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис 1.2 б)). Если определено значение функции в точке $x = 0$, то $f(0) = 0$.

Замечание 2. Если не выполнено ни свойство четности, ни свойство нечетности, то функция называется ***функцией общего вида***.

Замечание 3. В силу симметрии графиков, для четных и нечетных функций можно ограничиться исследованием их свойств лишь при $x \geq 0$.

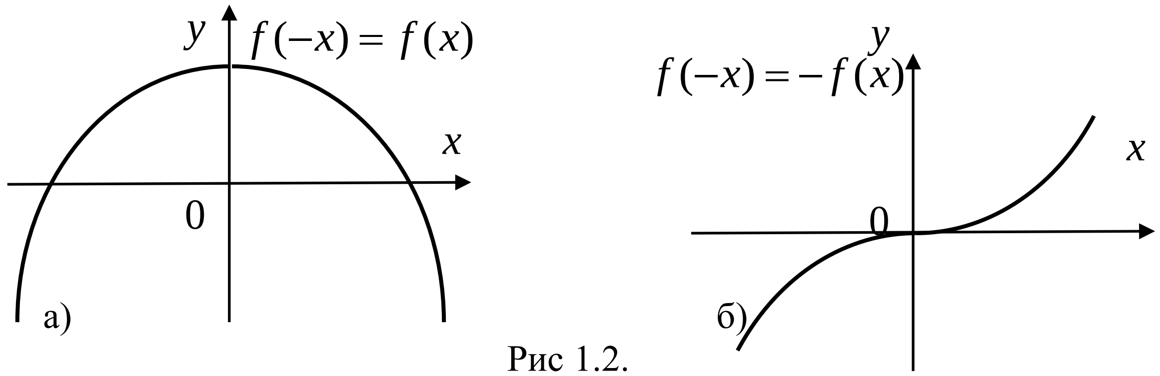


Рис 1.2.

3) Монотонность функции.

Далее промежутком X будем называть любое из множеств $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,\infty)$.

Определение 5. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на промежутке* X. *Говорят, что* $f(x)$ ***возрастает /убывает*** *на промежутке* X, *если для любых* $x_1, x_2 \in X$, *таких что*

$$x_1 < x_2,$$

выполнено неравенство

$$f(x_1) \le f(x_2) \qquad / \; f(x_1) \ge f(x_2).$$

Функция, обладающая любым из этих свойств, называется ***монотонной.***

Если для любых $x_1, x_2 \in X:$ $x_1 < x_2$, *выполнено строгое неравенство*

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad / \; f(x_1) > f(x_2),$$

функция называется ***строго монотонной.***

Графики монотонных функций приведены на рис. 1.3 а), б), строго монотонных – на рис. 1.4 а), б).

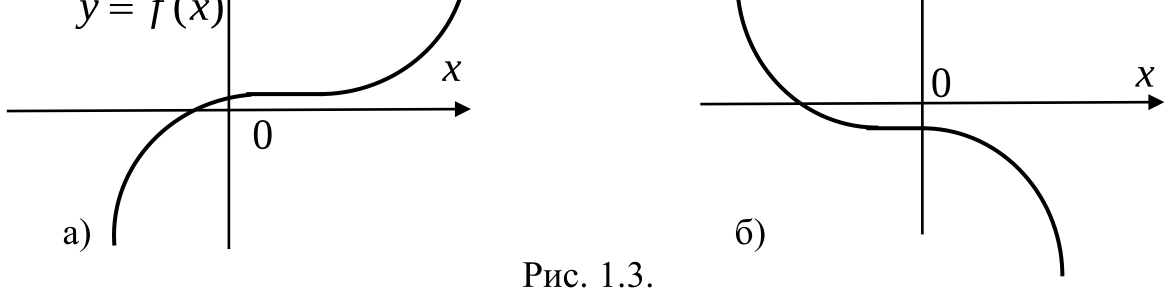


Рис. 1.3.

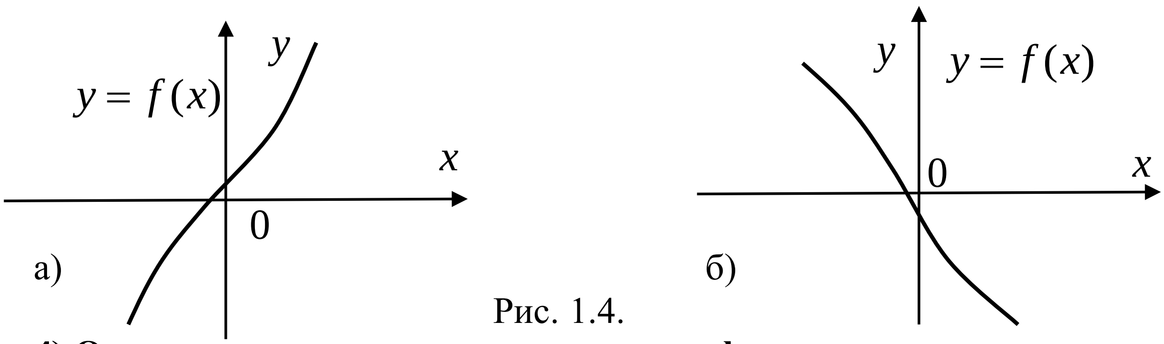


Рис. 1.4.

4) Ограниченность и неограниченность функции.

Определение 6. ***Функция*** $y = f(x)$ ***называется ограниченной***, *если существует такое положительное число* $M > 0$, *что* $|f(x)| < M$ *для всех значений* x *из области определения* D. *Если такого числа* M *не существует, то функция* $y = f(x)$ *– неограниченная.*

5) Периодичность функции.

Определение 7. ***Функция*** $y = f(x)$ ***называется периодической***, *если существует такое отличное от нуля число* $T > 0$, *что для любого* $x \in D$, $x + T \in D$, $x - T \in D$ *и имеют место равенства:* $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$.

Наименьшее среди всех таких чисел $T > 0$ *называется периодом функции.*

Замечание 4. Исходя из этого определения, область задания периодической функции обладает свойством: для любого $x \in D$ $x + kT \in D$, при этом выполнено равенство $f(x) = f(x+kT)$, где $k \in Z$ – любое целое число.

Пример 8. Функция

$$y = \{x\} = x - [x],$$

называемая дробной частью числа x, где $[x]$ – его целая часть (пример 4), является периодической, с периодом $T = 1$ (рис. 1.5).

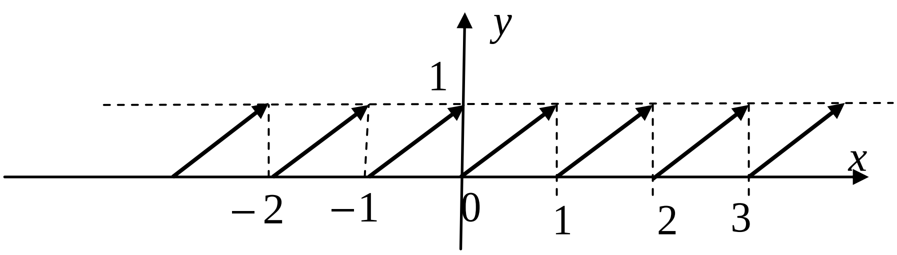


Рис. 1.5.

Замечание 5. Все тригонометрические функции являются периодическими.

Замечание 6. Для периодических функций можно ограничиться исследованием их свойств на любом промежутке длины T.

Обратная функция.

Пусть функция $y = f(x)$ с областью определения D и областью значений E такова, что разным значениям аргумента x соответствуют разные значения y. Пусть для каждого значения $y \in E$ можно найти значение $x \in D$, при котором $f(x) = y$. В силу сделанного предположения такое x единственно. Таким образом, на множестве E определена функция:

$$x = f^{-1}(y),\ y \in E,\ x \in D.$$

Полученная функция с областью определения E и областью значений D называется ***обратной*** по отношению к исходной функции $y = f(x)$.

Следует заметить, что графики функции $y = f(x)$ и обратной к ней $x = g(y)$ совпадают. Если же в обратной функции перейти к традиционному обозначению переменных: x – аргумент, y– значение функции, то график функции $y = g(x)$ окажется симметричным графику $y = f(x)$ относительно биссектрисы I и III координатных углов (см. рис. 1.6 для пары функций: $y = x^2$ с областью задания $[0, +\infty)$ и $y = \sqrt{x}$).

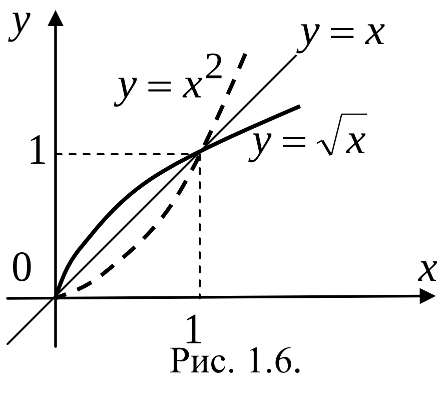


Рис. 1.6.

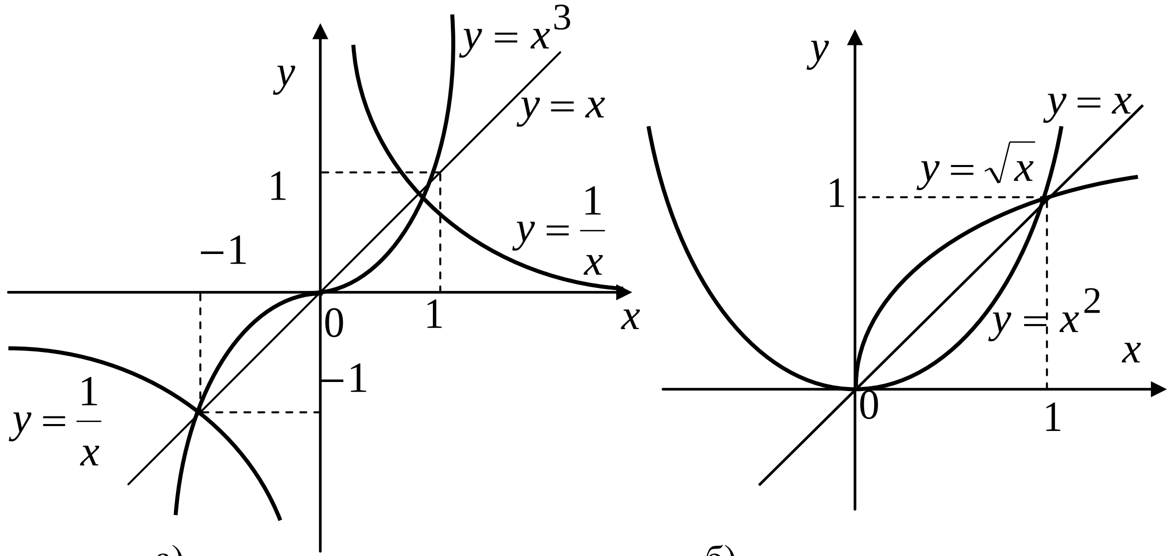
Основные элементарные функции

1) Степенная функция:

$$y = x^a \ (a \in R).$$

Область задания этой функции определяется числом a.

Примеры графиков степенной функции представлены на рис. 1.7 (а,б). График любой степенной функции проходит через точку $(1,1)$.



а) б)

Рис. 1.7.

2) Показательная функция:

$$y = a^x \quad (a > 0).$$

Область задания этой функции совпадает с $\boldsymbol{R}$. Графики для различных значений a представлены на рис. 1.8.

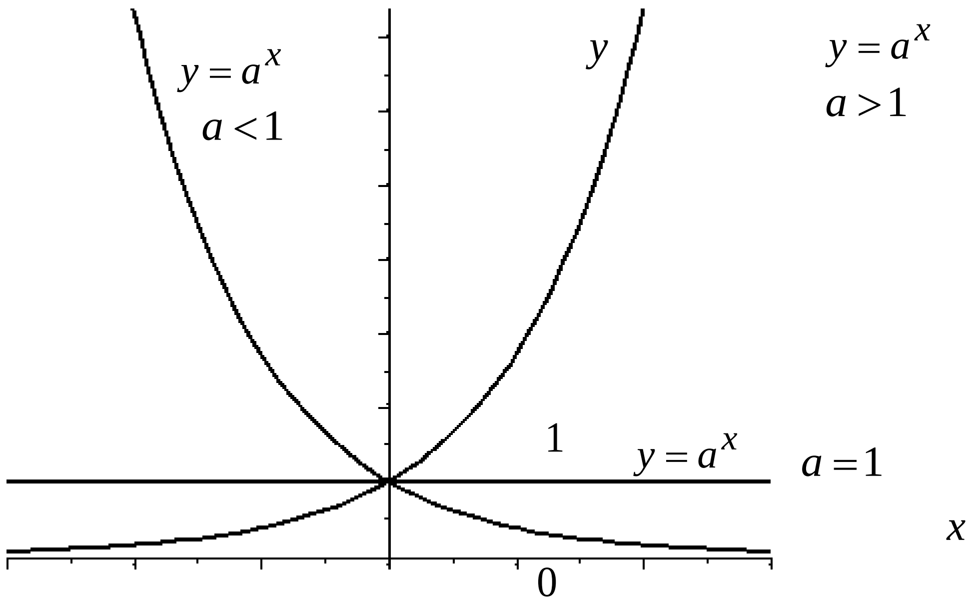


Рис. 1.8.

3) Логарифмическая функция:

$$y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$$

является обратной для показательной функции на всей ее области определения R. Ее значения определяются равенством

$$a^y = x.$$

Область задания логарифмической функции – бесконечный промежуток $(0, +\infty)$. Графики логарифмической функции для различных значений a представлены на рис. 1.9 а, б.

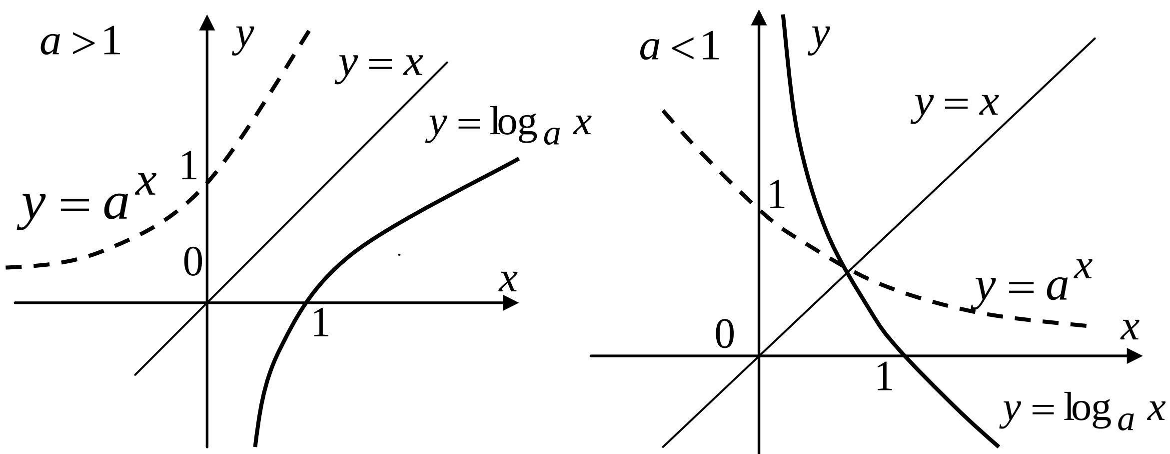


Рис. 1.9.

4) Тригонометрические функции.

а) $y = \sin x$, $\quad x \in R$, $y \in [-1, 1]$, график представлен на рис. 1.10;

б) $y = \cos x$, $x \in R$, $y \in [-1, 1]$, график представлен на рис. 1.11;

в) $y = \text{tg } x$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in Z$, $y \in R$, график представлен на рис. 1.12;

г) $y = \text{ctg } x$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$, $y \in R$, график представлен на рис. 1.13.

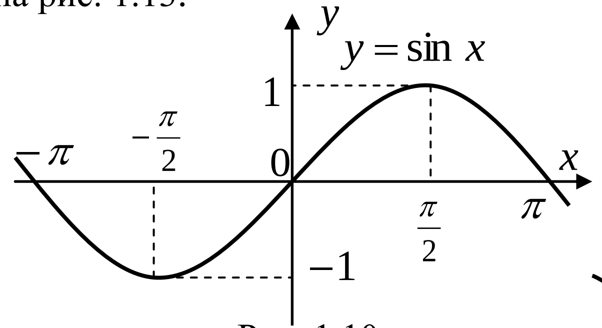


Рис. 1.10.

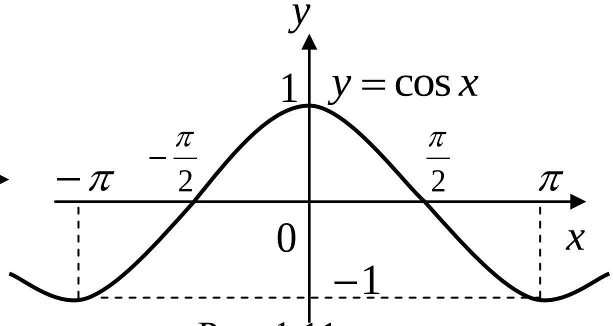


Рис. 1.11.

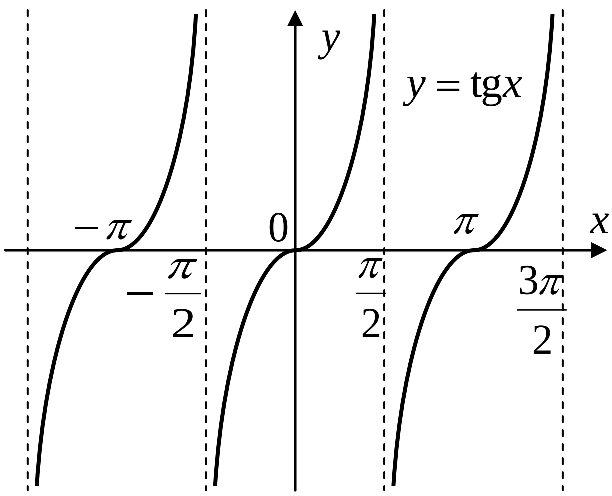


Рис. 1.12.

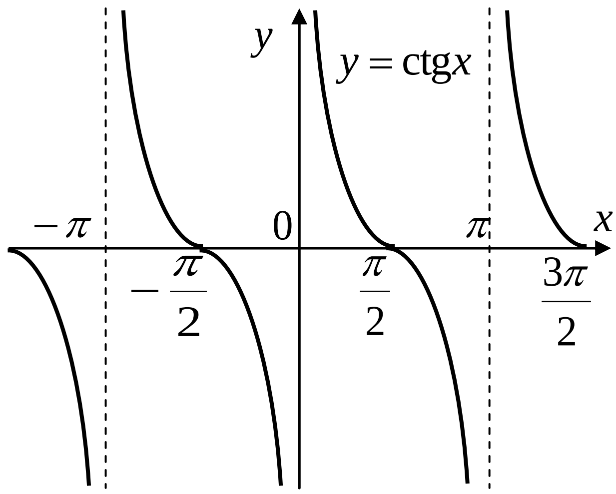


Рис.1.13.

5) Обратные тригонометрические функции.

а) Функция

$$y = \arcsin x$$

является обратной для функции $y = \sin x$ с областью задания $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$. Область задания функции $y = \arcsin x$ – промежуток $D = [-1, 1]$, область значений – промежуток $E = [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$. График представлен на рис. 1.14.

б) Функция

$$y = \arccos x$$

является обратной для функции $y = \cos x$ с областью задания $[0, \pi]$. Область задания функции $y = \arccos x$ – промежуток $D = [-1, 1]$, область значений – промежуток $E = [0, \pi]$. График представлен на рис. 1.15.

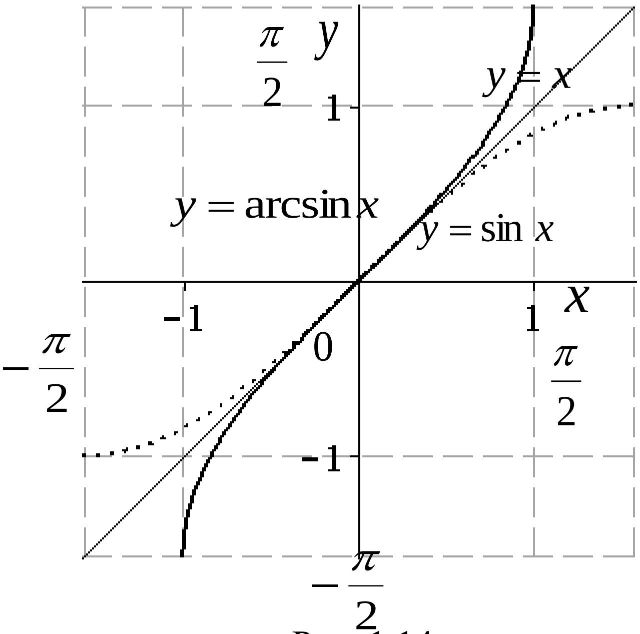


Рис. 1.14.

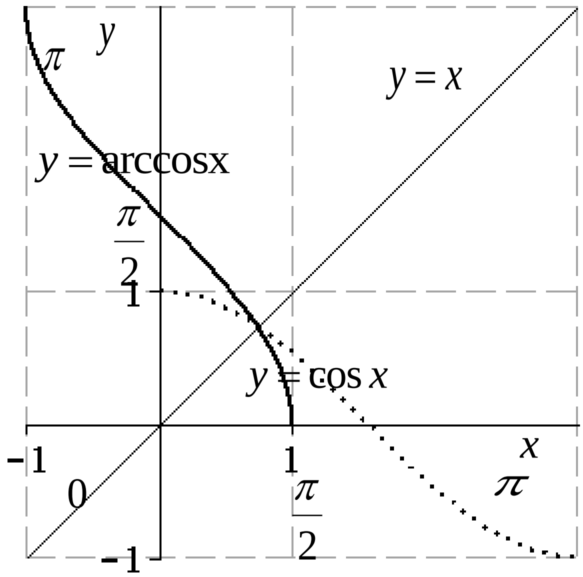


Рис. 1.15.

в) Функция

$$y = \operatorname{arctg} x$$

является обратной для функции $y = \operatorname{tg} x$ с областью задания $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Область задания функции $y = \operatorname{arctg} x$ – интервал $D = (-\infty, +\infty)$, область значений – интервал $E = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

График представлен на рис. 1.16.

г) Функция

$$y = \operatorname{arcctg} x$$

является обратной для функции $y = \operatorname{ctg} x$ с областью задания $(0, \pi)$. Область задания функции $y = \operatorname{arcctg} x$ – интервал $D = (-\infty, +\infty)$, область значений – интервал $E = (0, \pi)$. График представлен на рис. 1.17.

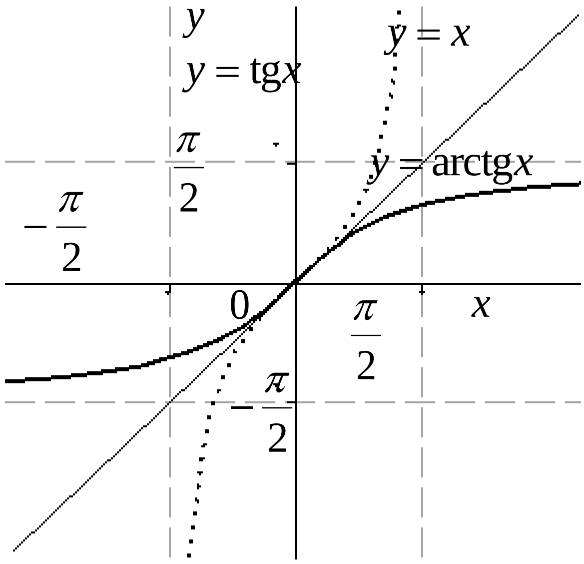


Рис. 1.16.

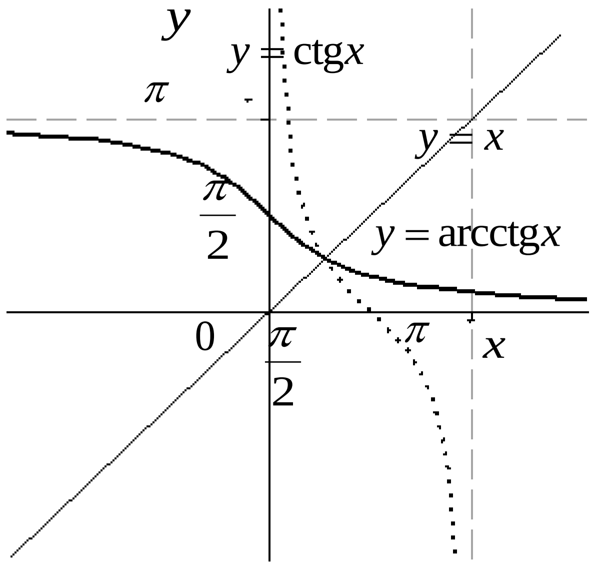


Рис. 1.17.

Суперпозиция функций.

Пусть функция $y=\varphi(z)$ определена на множестве G, а функция $z=f(x)$ определена на множестве D, причем все ее значения содержатся в G. Тогда y посредством переменной z является функцией переменной x. Полученная функция от функции

$$y=\varphi(f(x))$$

называется ***сложной функцией***, а z называется ***промежуточной переменной***. Операция получения функции от функции называется ***суперпозицией функций***.

Пределы функции.

Определение 8. ε- ***окрестностью точки*** x_0 *называется множество*

$$V_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon),\ \varepsilon>0,$$

или, иначе

$$V_\varepsilon(x_0)=\{x\in R : |x-x_0|<\varepsilon\}.$$

Проколотой ε- ***окрестностью точки*** x_0 *называется ее* ε-*окрестность кроме самой точки* x_0*:*

$$\overset{o}{V}_\varepsilon(x_0)=V_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}$$

или, иначе

$$\overset{o}{V}_{\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon),\ \varepsilon > 0.$$

Определение 9. *Точка x_0 является* ***предельной точкой (точкой сгущения)*** *множества D, если в любой проколотой окрестности точки x_0 найдутся точки множества D:*

$$\overset{o}{V}_{\varepsilon}(x_0) \cap D \neq \varnothing, \forall \varepsilon > 0.$$

Далее предполагается, что точка x_0 является точкой сгущения (предельной точкой) множества D.

Определение 10. *Число A является* ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0 *(или* ***при*** x***, стремящемся к*** x_0*)*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное (зависящее от ε) число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $x \in \overset{o}{V}_{\delta}(x_0) \cap D$ выполнено неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Это определение проиллюстрировано рисунком 1.18 а).

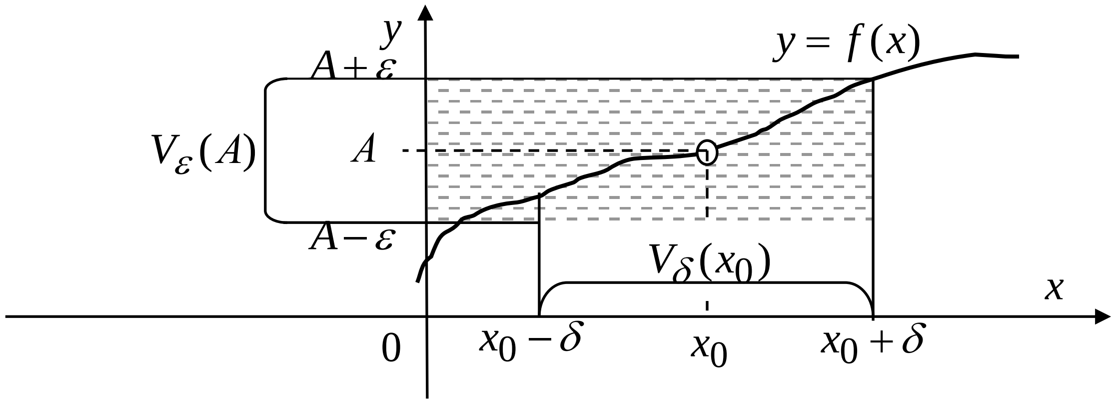
Определение 11. *Число A является* ***пределом функции*** $f(x)$ ***в бесконечно удаленной точке*** *(или* ***при*** x***, стремящемся к бесконечности****)*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A,$$

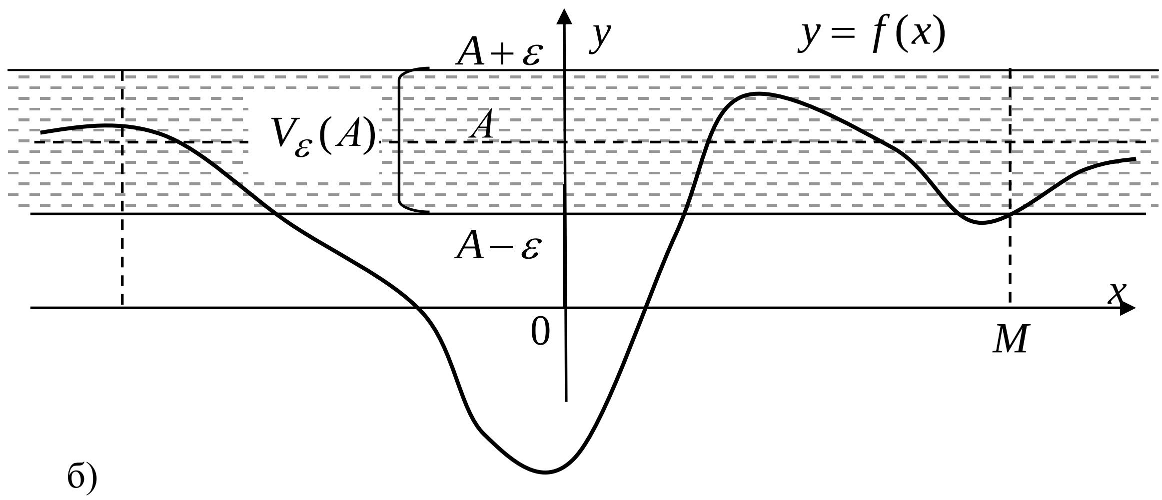
если для любого положительного числа ε найдется такое положительное (зависящее от него) число $M = M(\varepsilon)$, что для всех $x : |x| > M, x \in D$ справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Это определение проиллюстрировано рисунком 1.18 б).



а)



б)

Рис. 1.18

Определение 12. *Число* A *называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** x***, стремящемся к*** $+\infty$ ***/к*** $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad / \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A,$$

если для любого положительного числа ε *найдется такое число* $M = M(\varepsilon) > 0$, *что для всех* $x \in D$, *удовлетворяющих неравенству* $x > M$ / $x < -M$ *выполнено*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Замечание 7. В приведенных определениях предполагается, что $x \in D$: $|x| > M$; $x > M$ ($x < -M$) обязательно найдутся.

Определение 13. *Функция* $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой в точке*** x_0 ***/при*** x***, стремящемся к*** ∞***/при*** x***, стремящемся к*** $+\infty$***/при*** x***, стремящемся к*** $-\infty$, *если*

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ /x\to\infty \\ /x\to+\infty \\ /x\to-\infty}} \alpha(x)=0.$$

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие существование конечного предела). *Для того, чтобы число* A *являлось пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0*/при* x*, стремящемся к* ∞*/при* x*, стремящемся к* $+\infty$*/при* x*, стремящемся к* $-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ /x\to\infty \\ /x\to+\infty \\ /x\to-\infty}} f(x)=A$$

необходимо и достаточно, чтобы разность между функцией и пределом была представима в виде

$$f(x)-A=\alpha(x),$$

где, соответственно,

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ /x\to\infty \\ /x\to+\infty \\ /x\to-\infty}} \alpha(x)=0.$$

Замечание 8. Для самой функции справедливо представление

$$f(x)=A+\alpha(x).$$

Определение 14. *Функция* $f(x)$ *называется* ***бесконечно большой в точке*** x_0 ***(стремится к бесконечности в точке*** x_0***)***

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,$$

если для любого $N>0$ *можно указать такое число* $\delta=\delta(N)>0$*, что для всех* $x\in \overset{o}{V}_\delta(x_0)\bigcap D$ *справедливо неравенство:*

$$|f(x)|>N.$$

Определение 15. *Функция* $f(x)$ ***стремится к +бесконечности /к –бесконечности в точке*** x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad / \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

если для любого $N > 0$ *можно указать такое* $\delta = \delta(N) > 0$*, что для всех* $x \in \overset{o}{V}_\delta(x_0) \cap D$ *справедливо неравенство:*

$$f(x) > N \quad / \, f(x) < -N.$$

Определение 16. *Функция* $f(x)$ *называется* ***бесконечно большой при*** x***, стремящемся к*** $+\infty$ ***/к*** $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty / \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty,$$

если для любого $N > 0$ *найдется такое* $M = M(N) > 0$*, что для всех* $x \in D$*, удовлетворяющих неравенству* $x > M$ $/ x < -M$ *выполнено неравенство:*

$$|f(x)| > N.$$

Замечание 9. Аналогично строятся определения

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \right),$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \right).$$

Определение 17. *Число* A *является* ***пределом справа (слева) функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0*, если для любого положительного числа* ε *можно указать такое положительное число* $\delta = \delta(\varepsilon)$*, что для всех* $x \in D$*:* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $(x \in (x_0 - \delta, x_0))$ *выполнено неравенство:*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Теорема 2 (необходимое и достаточное условие существование предела функции в точке). *Для того, чтобы функция* $f(x)$ *имела предел в точке* x_0 ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), *необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали ее* *пределы слева и справа и чтобы они были равны между собой, то есть*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Непрерывность функции в точке, типы разрывов.

Определение 18. *Пусть функция* $y = f(x)$ *имеет область задания* D *и определена в некоторой окрестности* $V_\delta(x_0)$ $(\delta > 0)$ *точки* $x_0 \in D$, *включая саму точку* $x_0 \in D$. *Говорят, что* ***функция*** $f(x)$ ***непрерывна в точке*** x_0**,** *если существует* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *и*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Определение непрерывности требует одновременного выполнения трех условий:

1) $f(x)$ должна быть определена в точке x_0, то есть должно существовать $f(x_0)$;

2) в точке x_0 существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то есть должны существовать и быть равными два односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$;

3) должно быть выполнено равенство $A = f(x_0)$.

Невыполнение какого-либо из этих условий приводит к нарушению непрерывности функции в точке. В этом случае говорят, что ***в данной точке функция терпит разрыв*.**

Различают три типа разрывов.

I. *Устранимый разрыв I рода*:

существует

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ (то есть, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$),

но $A \neq f(x_0)$ или значение $f(x_0)$ не определено (рис. 1.19 а), б)).

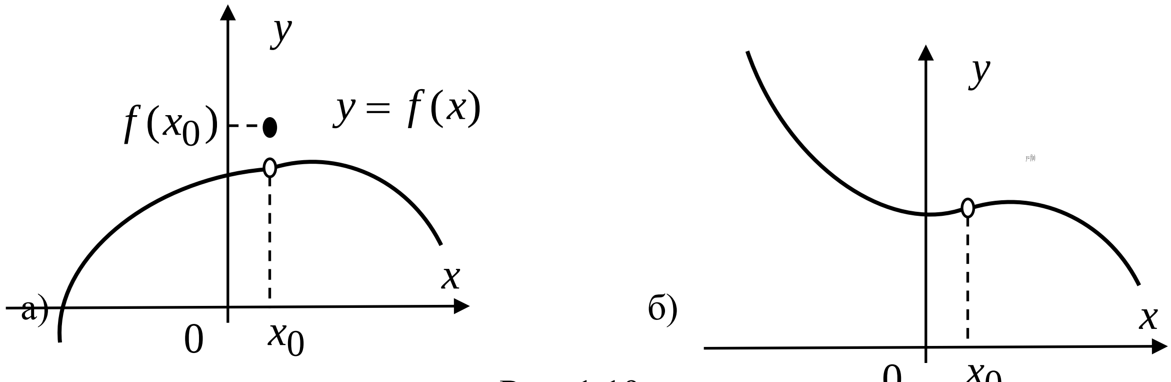


Рис. 1.19.

Пример 9. Функция $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ в точке $x=0$ имеет устранимый разрыв I рода. Для его устранения достаточно доопределить значение $y(0)=1$ (рис. 1.20).

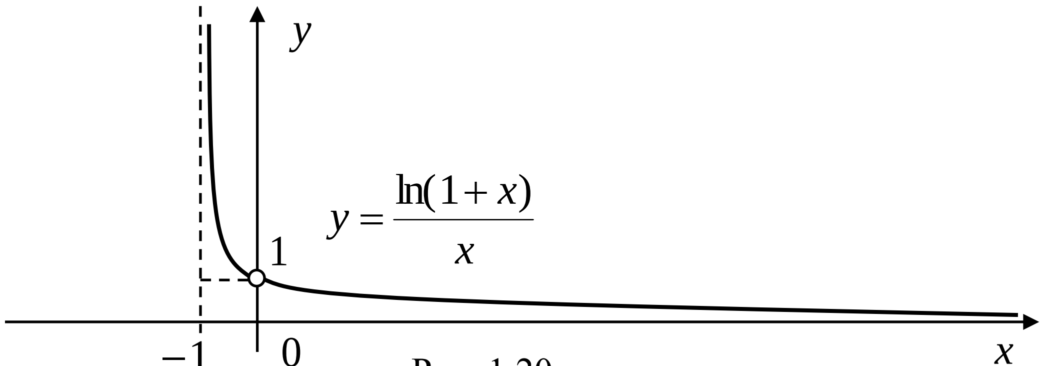


Рис. 1.20.

II. *Неустранимый разрыв первого рода или скачок*: односторонние пределы

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x),\ \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

существуют и конечны, но

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

(см. рис. 1.21).

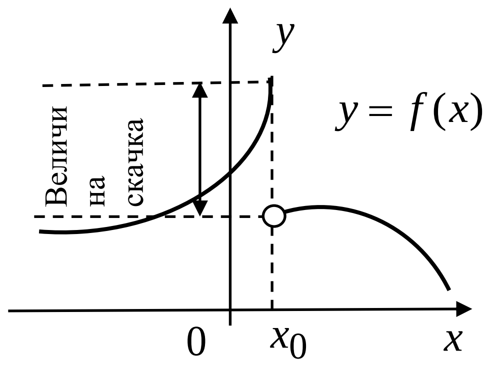


Рис. 1.21.

Пример 10. Функция $y=\{x\}=x-[x]$ (рис. 1.5) в точках $0,\pm1,\pm2,\ldots$ терпит скачки с величиной скачка 1.

III. *Разрыв II рода:*

хотя бы один из односторонних пределов функции

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x),\quad \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

либо не существует, либо хотя бы для одного из пределов выполнено

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$$

(рис. 1.22 а), б), в)).

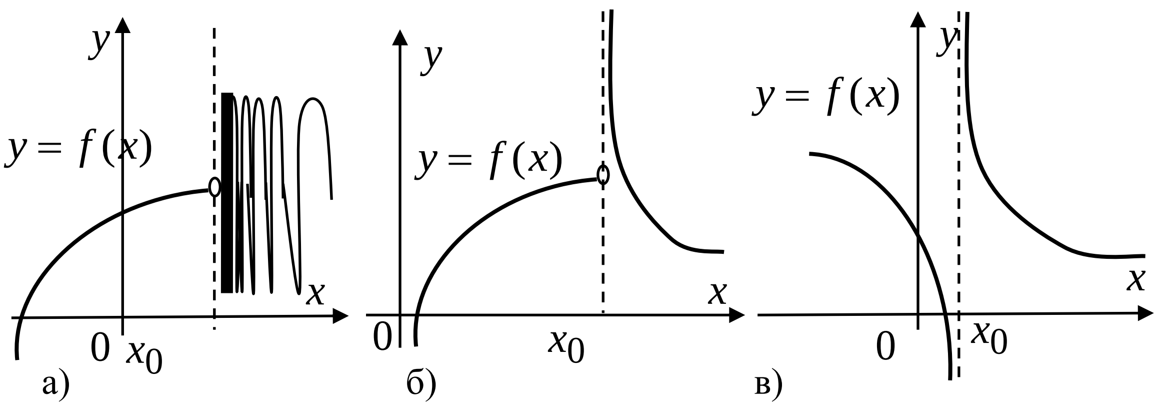


Рис. 1.22.

Пример 11. Функция $y=\operatorname{tg}x$ в точках $x=\frac{\pi}{2}(2k+1))$ (рис. 1.12) и функция $y=\operatorname{ctg}x$ в точках $x=\pi k$ (рис. 1.13) имеют разрывы II рода с бесконечными пределами.

Непрерывность функции на множестве. Свойства непрерывных функций.

Определение 19. *Функция* $y=f(x)$ *непрерывна на множестве* D, *если она непрерывна во всех точках этого множества.*

Свойства непрерывных функций.

1) *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на замкнутом промежутке* $[a,b]$*, то она достигает на нем своего наибольшего* (M) *и наименьшего* (m) *значений:*

$$\exists x_1 \in [a,b],\ f(x_1) = m :\ f(x) \ge m, \forall x \in [a,b],$$
$$\exists x_2 \in [a,b],\ f(x_2) = M :\ f(x) \le M, \forall x \in [a,b].$$

2) *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на замкнутом промежутке* $[a,b]$*, то она достигает на нем всех значений, лежащих между своим наибольшим* (M) *и наименьшим* (m) *значениями:*

$$\forall h : m < h < M \quad \exists c \in [a,b] : f(c) = h.$$

Следует отметить, что таких точек, в которой функция принимает заданное значение $f(c) = h$, может быть несколько.

Это свойство проиллюстрировано рис. 1.23.

3) *Любая элементарная функция непрерывна в области своего определения.*

4) *График непрерывной функции – линия, которую можно нарисовать, не отрывая «пера от бумаги».*

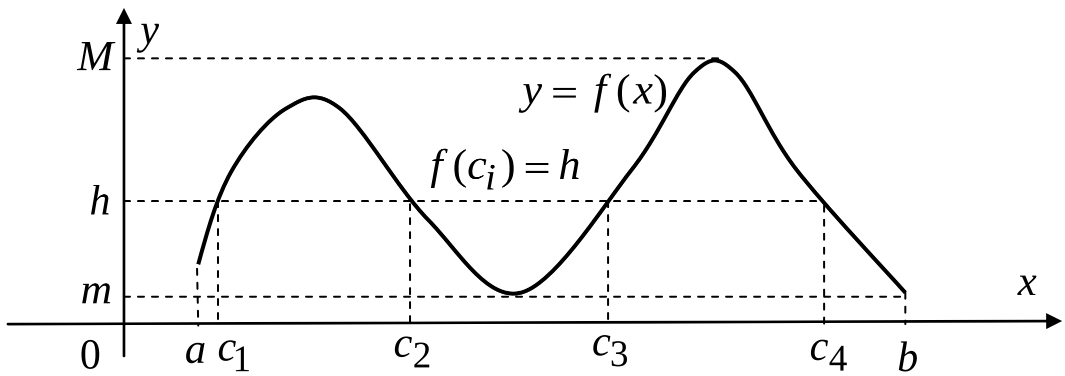


Рис. 1.23.

Производная функции в точке, геометрический смысл производной.

Определение 20. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена на множестве* $D \subset R$ *и* $x_0 \in D$*. Придадим* x_0 *приращение* Δx $(\Delta x < 0$ *или* $\Delta x > 0)$ *так, чтобы* $x_0 + \Delta x \in D$*. При этом функция*

$y = f(x)$ *получит приращение* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
Производной функции $y = f(x)$ ***по переменной*** x ***в точке*** x_0 *называется предел отношения приращения функции* Δy *к вызвавшему его приращению аргумента* Δx *при стремлении последнего к* 0*, то есть*

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

если этот предел существует.

Если этот предел конечен, функция называется ***дифференцируемой в точке*** x_0.

Производная функции $y = f(x)$, вычисленная в точке x_0, равна угловому коэффициенту $k = \operatorname{tg}\alpha$ касательной, проведенной к графику этой функции в точке $M_0\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ (рис. 1.24):

$$f'(x_0) = k.$$

Уравнение касательной имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Теорема 3 (необходимое условие дифференцируемости функции). *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0*, то функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0.

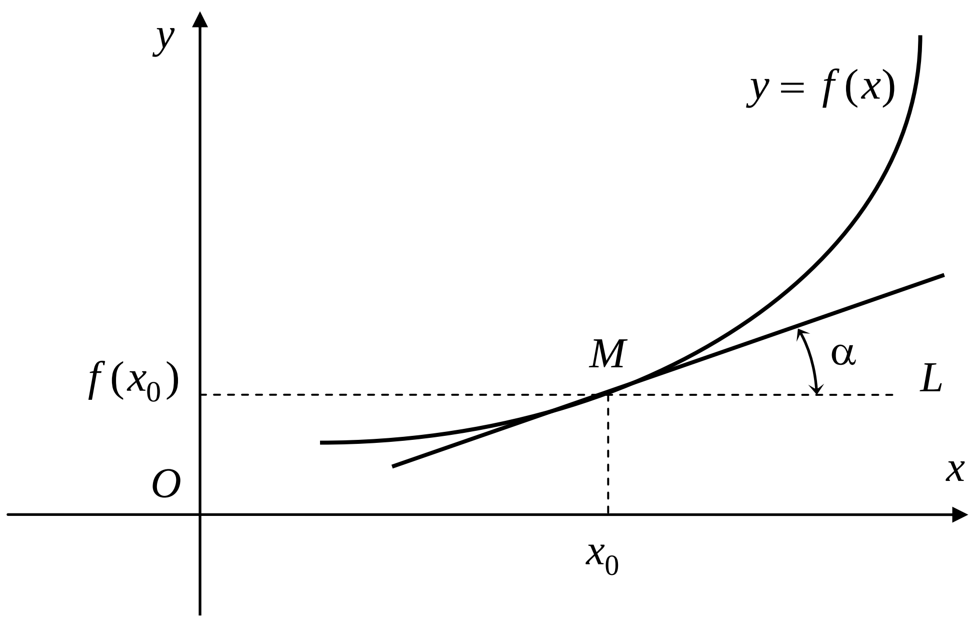


Рис. 1.24.

Условия возрастания, убывания и постоянства дифференцируемых функций.

Теорема 4 (теорема Ферма). *Пусть функция* $f(x)$ *определена на некотором промежутке* X *и в некоторой его внутренней точке*[1] c *принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если в этой точке существует производная* $f'(c)$, *то*

$$f'(c)=0.$$

Теорема 5 (необходимое и достаточное условие постоянства). *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на промежутке* X *и имеет внутри этого промежутка производную. Для того чтобы* $f(x)$ *была постоянной на промежутке X, необходимо и достаточно, чтобы в любой внутренней точке* x *промежутка* X *было выполнено равенство*

$$f'(x)=0\ .$$

Теорема 6 (необходимое условие монотонности дифференцируемой функции). *Пусть функция* $f(x)$ *задана и непрерывна на промежутке* X *и имеет внутри него производную* $f'(x)$. *Если* $f(x)$ *возрастает (убывает) на промежутке* X, *то для всех* x, *лежащих внутри* X *:*

$$f'(x)\geq 0 \qquad \left(f'(x)\leq 0\right).$$

Теорема 7 (достаточное условие строгой монотонности дифференцируемой функции). *Пусть функция* $f(x)$ *задана и непрерывна на промежутке* X *и имеет внутри него производную* $f'(x)$. *Если всех* x, *лежащих внутри* X *:*

$$f'(x)>0 \qquad (f'(x)<0),$$

то $f(x)$ *строго возрастает (убывает) на промежутке* X .

Определение 21. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на промежутке* X, *и пусть точка* x_0 *является внутренней точкой этого промежутка. Говорят, что в точке* $x_0\in X$ *функция* $f(x)$ *имеет* ***максимум (минимум)***, *если существует такая окрестность*

[1] Точка c называется внутренней точкой промежутка X , если $c\in\left(a,b\right)$.

этой точки $V_\delta(x_0)$, *что при всех* $x \in \overset{o}{V}_\delta(x_0)$ ($x \in X$) *выполнены неравенства:*

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \left(f(x_0) \leq f(x)\right).$$

Функция $f(x)$ *имеет в этой точке* ***строгий максимум (строгий минимум)****, если при всех* $x \in \overset{o}{V}_\delta(x_0)$ ($x \in X$) *выполнены строгие неравенства*

$$f(x_0) > f(x) \qquad \left(f(x_0) < f(x)\right).$$

Минимумы и максимумы называются ***экстремумами.*** *Строгие минимумы и максимумы называются* ***строгими экстремумами****.*

Теорема 8 (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции). *Пусть функция* $f(x)$ *задана на промежутке* X *и имеет на нем производную* $f'(x)$. *Если во внутренней точке* x_0 *этого промежутка функция* $f(x)$ *имеет экстремум, то*

$$f'(x_0) = 0.$$

Точки, в которых производная равна нулю, называются ***точками стационарности функции*** или ***стационарными точками.***

Из теоремы следует, что в случае дифференцируемой на промежутке X функции экстремумы следует искать лишь в ***точках стационарности функции***. Однако функция может иметь экстремумы и в точках, где производная $f'(x)$ функции не существует. Точки, в которых производная либо не существует, либо равна 0, называются ***критическими точками*** и являются точками, ***«подозрительными на экстремум»***.

Теорема 9 (достаточное условие строгого экстремума дифференцируемой функции). *Пусть* x_0 *– точка, «подозрительная на экстремум» для функции* $f(x)$, *и в некоторой окрестности этой точки* $V_\delta(x_0)$ *существует производная* $f'(x)$. *Тогда если в этой окрестности*

$$\text{при } x < x_0 \;\; f'(x) < 0, \; \text{при } x > x_0 \;\; f'(x) > 0,$$

то в точке x_0 *функция* $f(x)$ *имеет строгий минимум. Если*

при $x < x_0$ $f'(x) > 0$, *при* $x > x_0$ $f'(x) < 0$,
то в точке x_0 *функция* $f(x)$ *имеет строгий максимум.*

Теорема 10 (достаточное условие экстремума дважды дифференцируемой функции). *Пусть функция* $f(x)$ *задана на промежутке* X *и имеет на нем первую производную* $f'(x)$, *внутренняя точка* x_0 *этого промежутка является точкой стационарности функции* $f(x)$. *Если существует вторая производная* $f''(x_0)$, *то при*

$$f''(x_0) < 0$$

функция $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *максимум, а при*

$$f''(x_0) > 0$$

функция $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *минимум.*

Условия выпуклости и вогнутости дважды дифференцируемых функций. Точки перегиба.

Определение 22. *Пусть функция* $y = f(x)$ *задана и непрерывна на промежутке* X. *Она называется* ***выпуклой вниз (вогнутой)*** *на X, если все точки ее графика на этом промежутке лежат* ***не ниже*** *любой касательной, построенной к графику функции на данном промежутке:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \ \forall x \in X, \ \forall x_0 \in X$$

Она называется ***выпуклой вверх(выпуклой)*** *на X, если все точки ее графика на этом промежутке лежат* ***не выше*** *любой касательной, построенной к графику функции на данном промежутке:*

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \quad \forall x \in X, \ \forall x_0 \in X.$$

Если неравенства строгие:

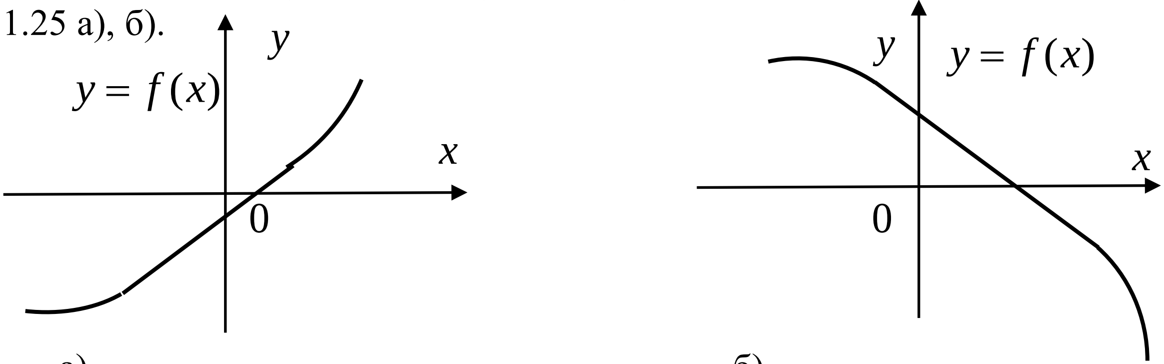
$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \forall x \in X, \ \forall x_0 \in X$$

или

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \ \forall x \in X, \ x \neq x_0, \ x_0 \in X,$$

то функция называется ***строго выпуклой вниз (строго вогнутой)*** *или* ***строго выпуклой вверх (строго выпуклой).***

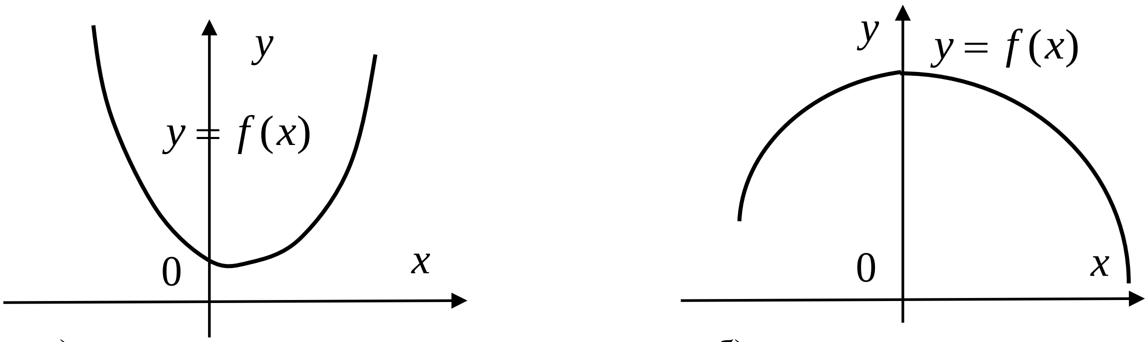
Графики вогнутых и выпуклых функций представлены на рис. 1.25 а), б).



а) б)

Рис. 1.25.

Графики строго вогнутых и выпуклых функций представлены на рис. 1.26 а), б).



а) б)

Рис. 1.26.

Теорема 11 (необходимое условие выпуклости). *Пусть функция* $f(x)$ *задана на промежутке* X *и имеет внутри него вторую производную* $f''(x)$. *Если* $f(x)$ *выпукла вниз (вогнута)/выпукла вверх (выпукла) на* X *, то для внутренних точек* $x \in X$ *:*

$$f''(x) \geq 0 \qquad / \; f''(x) \leq 0.$$

Теорема 12 (достаточное условие выпуклости). *Пусть функция* $f(x)$ *задана и непрерывна на промежутке* X *и имеет внутри него вторую производную* $f''(x)$. *Если для внутренних точек* $x \in X$ *:*

$$f''(x) > 0 \qquad / \, f''(x) < 0,$$

то функция строго выпукла вниз (строго вогнута)/строго выпукла вверх (строго выпукла) на X .

Определение 23. *Говорят, что в точке* $M_0(x_0,\ f(x_0))$ *график функции* $y = f(x)$ *имеет* ***перегиб****, если точка* x_0 *отделяет промежуток, где функция* $f(x)$ *выпукла вверх (выпукла), от промежутка, где функция выпукла вниз (вогнута).*

Теорема 13 (необходимое условие перегиба). *Пусть функция* $f(x)$ *задана на промежутке* X *и имеет внутри него вторую производную* $f''(x)$*. Тогда, если* x_0 *лежит внутри промежутка* X *и* $M_0(x_0,\ f(x_0))$ *является точкой перегиба графика функции, то*

$$f''(x_0) = 0.$$

Теорема 14 (достаточное условие перегиба графика). *Пусть функция* $f(x)$ *задана на промежутке* X *и имеет внутри него вторую производную* $f''(x)$*. Тогда если при переходе через точку* $x = x_0$*, где* x_0 *лежит внутри промежутка* X*,* $f''(x)$ *меняет знак, то точка* $M_0(x_0,\ f(x_0))$ *является точкой перегиба графика функции.*

Асимптоты графика функции.

Рассмотрим плоскую кривую K, имеющую *бесконечную ветвь*, то есть *при движении точки* $M(x,\ y)$ *вдоль этой ветви расстояние от точки до начала координат*

$$\rho(M,O) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

неограниченно увеличивается:

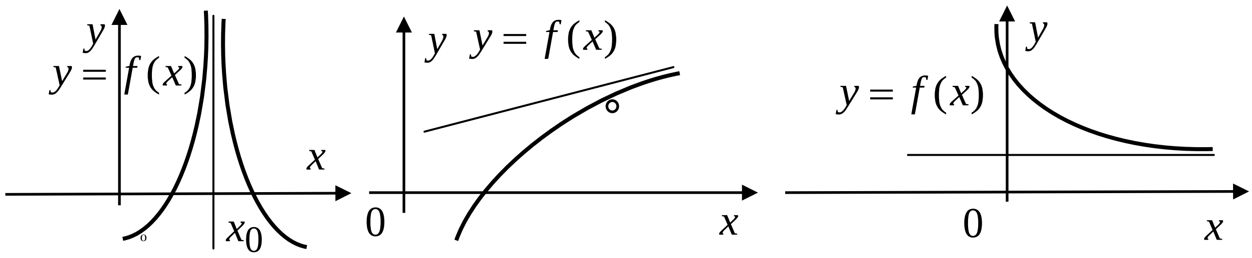
$$\rho(M,O) \to +\infty \text{ или } x^2 + y^2 \to \infty.$$

Приведем нестрогое определение асимптоты графика функции.

Определение 24. *Пусть* K *– плоская кривая, имеющая бесконечную ветвь, точка* $M(x,\ y) \in K$*. Прямая* L *называется* ***асимптотой*** *кривой* K*, если расстояние* $\rho(M,L)$ *от точки* $M(x,\ y) \in K$ *до прямой* L *стремится к нулю при движении точки по бесконечной ветви, то есть при* $x^2 + y^2 \to +\infty$*:*

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} \rho(M,L) = 0.$$

Асимптоты могут быть ***вертикальными, наклонными*** **и** ***горизонтальными*** (рис. 1.27 а), б), в))**.** Горизонтальную асимптоту часто рассматривают как частный случай наклонной асимптоты.



а) б) в)

Рис. 1.27.

Вертикальная асимптота $x = x_0$ к графику функции возникает в точке разрыва II рода, если один или оба односторонних предела бесконечны

$$\lim_{\substack{x\to x_0+0 \\ (x\to x_0-0)}} f(x) = \infty .$$

Наклонная асимптота $y = kx + b$ к графику функции возникает при $x \to +\infty \,/ x \to -\infty$.

Теорема 15. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена на промежутке* $(a, +\infty)\ /(-\infty, a)$. *Для того чтобы ее график при* $x \to +\infty\ \ / x \to -\infty$ *имел наклонную асимптоту* $y = kx + b$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы:*

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ / x\to-\infty}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ / x\to-\infty}} (f(x) - kx).$$

При $k = 0$ получаем ***горизонтальную асимптоту***.

Замечание 10. Если $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ / x\to-\infty}} f(x) = 0$, то, тем более, $k = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ / x\to-\infty}} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ и функция будет иметь горизонтальную асимптоту.

Замечание 11. График функции $y = f(x)$ может пересекать свою асимптоту, причем неоднократно.

Пример 12. Функция $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (рис. 1.20) имеет вертикальную асимптоту $x = -1$ и горизонтальную ($y = 0$) при $x \to +\infty$.

§ 2. Схема полного исследования функции. Построение графиков.

Графический способ задания функции находит широкое применение в практической деятельности человека, зачастую, график бывает единственно доступным способом исследования функции. Рассмотренные выше понятия и их свойства позволяют сформулировать общую схему исследования функции. Эта схема применяется при построении графика функции, отражающего основные черты её поведения.

Пусть задана функция $y = f(x)$. Исследование проводится по следующей схеме.

1. Исследование общих свойств функции.

1.1. Найти область определения D функции $y = f(x)$.

1.2. Найти точки разрыва функции.

1.3. Проверить, является ли функция четной, нечетной или функцией общего вида.

1.4. Проверить, является ли функция периодической.

1.5. Найти точки пересечения с осями координат: с осью OY – точка $(0,\ f(0))$, с осью OX – точки $(x_k,\ 0)$, где x_k удовлетворяют уравнению $f(x_k) = 0$.

2. Найти односторонние пределы функции в граничных точках области определения и в точках разрыва. Найти вертикальные асимптоты.

3. Найти уравнения наклонных асимптот графика при $x \to \pm\infty$.

4. Найти первую производную функции $f'(x)$. Найти интервалы (строгого) возрастания: $f'(x) > 0$, (строгого) убывания: $f'(x) < 0$, точки экстремума функции.

5. Найти вторую производную функции $f''(x)$. Найти интервалы (строгой) выпуклости: $f''(x)<0$, (строгой) вогнутости: $f''(x)>0$, точки перегиба.

6. Построить график функции.

Примеры

Задание: провести полное исследование функции и построить ее график.

Пример 1. $y=\dfrac{3x-1}{2(x-1)}$.

Решение.

1. Исследование общих свойств функции.

1.1. Область определения $D=(-\infty,1)\bigcup(1,+\infty)$.

1.2. $x=1$ – точка разрыва.

1.3. Функция общего вида:

$$f(-x)=\frac{-3x-1}{2(-x-1)}=\frac{3x+1}{2(x+1)}\neq\left[\begin{array}{l} f(x), \\ -f(x) \end{array}\right.$$

1.4. Функция непериодическая.

1.5. Точки пересечения графика с осями координат:

$$f(0)=1\Rightarrow(0,1);$$

$$\frac{3x-1}{2(x-1)}=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}\Rightarrow(\frac{1}{3},\ 0).$$

2. Односторонние пределы в точке разрыва:

$$\lim_{x\to1-0}\frac{3x-1}{2(x-1)}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{3x-1}{2(x-1)}=+\infty.$$

$x=1$ – точка бесконечного разрыва II рода. График имеет вертикальную асимптоту $x=1$.

3. Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-1}{2x(x-1)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x-1}{2(x-1)}\right)=\frac{3}{2},$$

$y=\dfrac{3}{2}$ – общая горизонтальная асимптота при $x\to\pm\infty$.

4. Первая производная функции:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{3(x-1)-(3x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

Очевидно, что для всех $x \in X \quad f'(x) < 0$, функция строго убывает.

5. Вторая производная функции $f''(x)$:

$$f''(x) = \left(-(x-1)^{-2}\right)' = 2(x-1)^{-3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Очевидно, что при $x < 1 \quad f''(x) < 0$ и функция строго выпукла (строго выпукла вверх), при $x > 1 \quad f''(x) > 0$ и функция строго вогнута (строго выпукла вниз).

6. График функции (рис. 2.1).

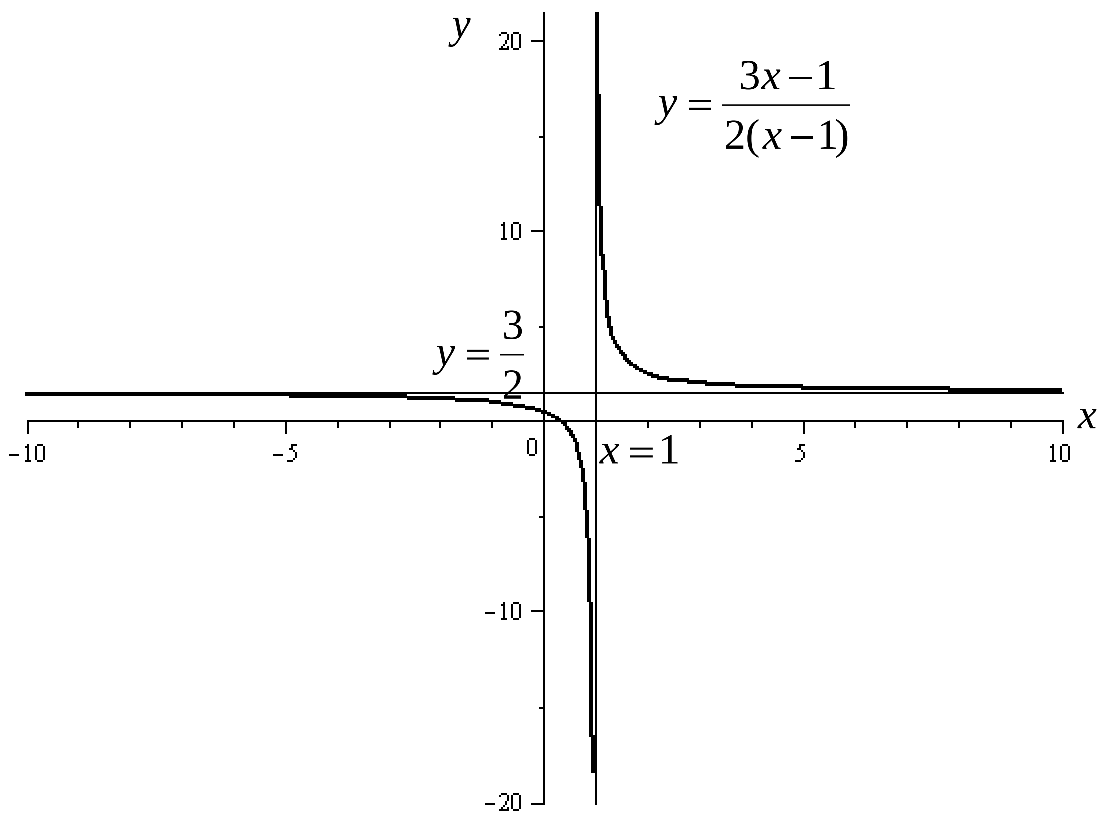


Рис. 2.1.

Приведенные построения позволяют уточнить множество значений функции: $Y = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

Пример 2. $y = \dfrac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}$.

Решение.

1. Исследование общих свойств функции.

Функцию представим в виде:

$$y = \frac{x(4x^2 - 3)}{4x^2 - 1} = x\left(1 - \frac{2}{4x^2 - 1}\right).$$

1.1. Область определения: $D = (-\infty, \ -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

1.2. $x = \pm\frac{1}{2}$ – точки разрыва.

1.3. Функция нечетная:

$$f(-x) = -x\left(1 - \frac{2}{4(-x)^2 - 1}\right) = -f(x).$$

1.4. Функция непериодическая.

1.5. Точка пересечения с осями координат: $(0, 0)$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0); (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

2. Односторонние пределы в точках разрыва.

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2} - 0} \frac{x(4x^2 - 3)}{4x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \to -\frac{1}{2} + 0} \frac{x(4x^2 - 3)}{4x^2 - 1} = -\infty.$$

Следовательно, $x = -\frac{1}{2}$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2} - 0} \frac{x(4x^2 - 3)}{4x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{1}{2} + 0} \frac{x(4x^2 - 3)}{4x^2 - 1} = -\infty.$$

Следовательно, $x = \frac{1}{2}$ – вертикальная асимптота.

3. Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^2 - 3}{4x^2 - 1} = 1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x(4x^2-3)}{4x^2-1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{4(4x^2-1)}=0$$

следовательно, $y=x$ – общая наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$.

4. Первая производная функции:

$$f'(x)=x'\left(1-\frac{2}{4x^2-1}\right)+x\left(1-\frac{2}{4x^2-1}\right)'=\left(1-\frac{2}{4x^2-1}\right)+\frac{16x^2}{(4x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{16x^4-8x^2+1-8x^2+2+16x^2}{(4x^2-1)^2}=\frac{16x^4+3}{(4x^2-1)^2}.$$

Очевидно, что для всех $x\in X$ $f'(x)>0$, то есть функция строго возрастает на всей области определения.

5. Вторая производная функции $f''(x)$ $x\in D$:

$$f''(x)=\left(\frac{16x^4+3}{(4x^2-1)^2}\right)'=\left(1+\frac{8x^2+2}{(4x^2-1)^2}\right)'=-\frac{16x(4x^2+3)}{(4x^2-1)^3}.$$

Корень числителя $x=0$ и корни знаменателя $x=\pm\frac{1}{2}$ определяют знаки второй производной (рис. 2.2).

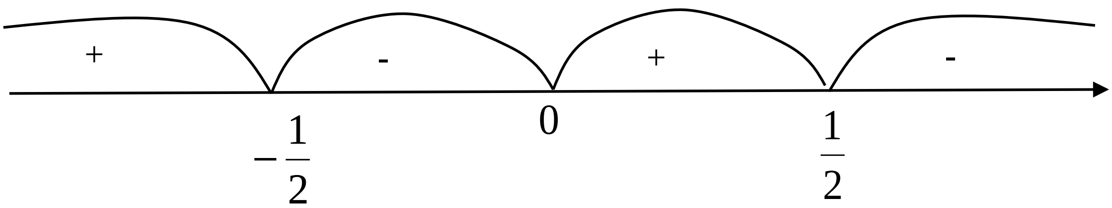


Рис. 2.2.

Следовательно, функция строго вогнута (строго выпукла вниз) на промежутках $(-\infty,\ -\frac{1}{2}),(0,\ \frac{1}{2})$; строго выпукла (строго выпукла вверх) на промежутках $(-\frac{1}{2},\ 0)$, $(\frac{1}{2},\ +\infty)$. Точка $M(0,\ 0)$ является точкой перегиба графика функции.

6. График функции (рис. 2.3).

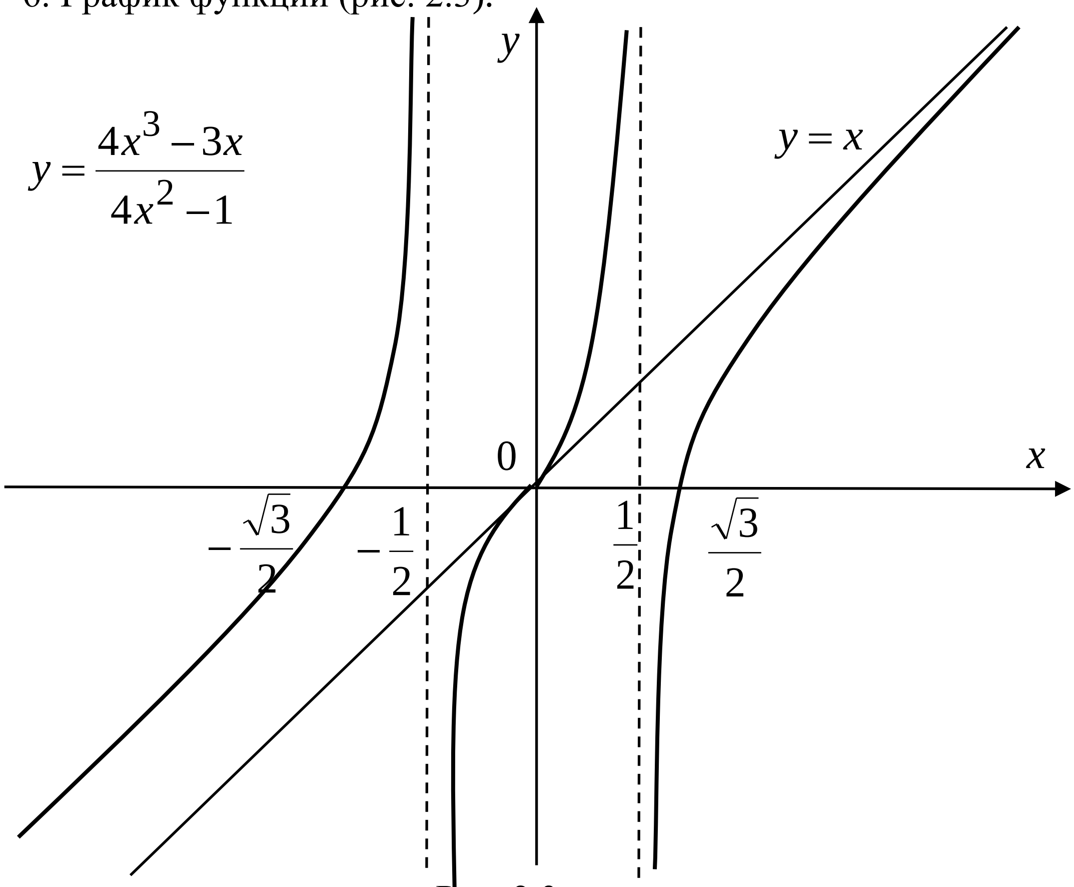


Рис. 2.3.

Пример 3. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}-2x$.

Решение.

1. Исследование общих свойств функции.

1.1. При $x=0$ функция не определена, $D=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

1.2. Поскольку функция определена в любой окрестности точки $x=0$, кроме самой точки, $x=0$ – точка разрыва.

1.3. Функция нечетная: $f(-x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+2x=-f(x)$.

1.4. Функция непериодическая.

1.5. Точки пересечения с осями координат. Решения уравнения:

$$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}-2x=\frac{x^2+1-2x^4}{x^3}=0,$$

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.,$$ откуда $x = \pm 1$, точки пересечения с OX : $(\pm 1, 0)$.

2. Вертикальные асимптоты:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \left(\frac{x^2 + 1 - 2x^4}{x^3} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{x^2 + 1 - 2x^4}{x^3} \right) = \infty,$$

следовательно, $x = 0$ – вертикальная асимптота.

3. Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - 2 \right) = -2$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - 2x + 2x \right) = 0.$$

Таким образом, $y = -2x$ – наклонная асимптота.

4. Первая производная функции:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - 2x \right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} - 2 = -\frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^4}.$$

Поскольку $2x^4 + x^2 + 3 > 0$ ($D = 1 - 24 < 0$), $f'(x) < 0$ и функция строго убывает на всей числовой оси, точек экстремума нет.

5. Вторая производная функции $f''(x)$:

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} - 2 \right)' = \frac{2}{x^3} + \frac{12}{x^5} = 2\frac{x^2 + 6}{x^5}.$$

Очевидно, что $f''(x) < 0$ при $x < 0$, $f''(x) > 0$ при $x > 0$. Следовательно, функция строго выпукла (строго выпукла вверх) на промежутке $(-\infty, 0)$ и строго вогнута (строго выпукла вниз) на $(0, +\infty)$.

6. График функции (рис. 2.4).

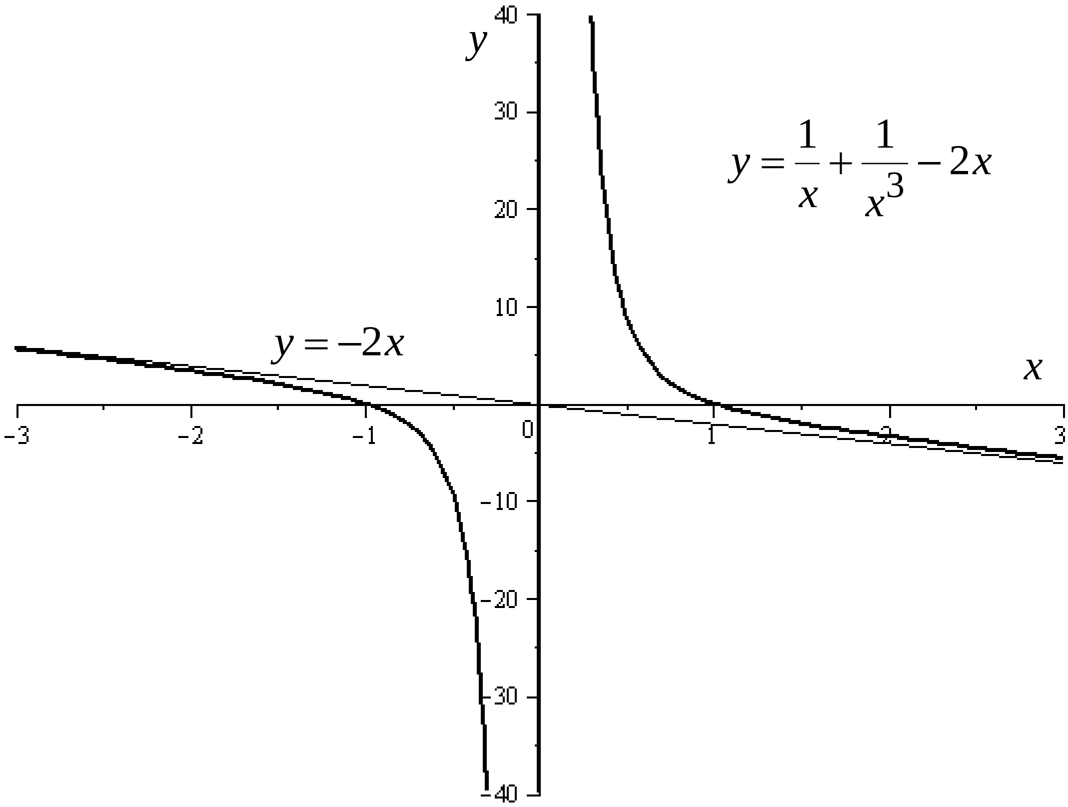


Рис. 2.4.

Пример 4. $y=\sqrt[4]{1-x^5}$;

Решение.

1. Исследование общих свойств функции.
   1.1. Область определения $D=(-\infty;1]$.
   1.2. Точек разрыва нет.
   1.3. Функция общего вида.
   1.4. Функция непериодическая.
   1.5. Точки пересечения с осями координат: $(0,1)$, $(1,0)$.
2. Предел в граничной точке области определения:

$$\lim_{x\to 1-0}\sqrt[4]{1-x^5}=0.$$

Вертикальных асимптот нет.

3. Наклонной асимптоты у графика функции нет, поскольку:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{1-x^5}}{x}=-\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[4]{\frac{1-x^5}{x^4}}=-\infty.$$

4. Первая производная:

$$f'(x)=\left((1-x^5)^{1/4}\right)'=\frac{1}{4}\left(1-x^5\right)^{-3/4}\cdot\left(-5x^4\right).$$

Очевидно, что при $x=1$ производной не существует. Для остальных значений из области определения $f'(x)\le 0$ функция убывает.

5. Вторая производная:

$$f''(x)=\left(\frac{1}{4}\left(1-x^5\right)^{-3/4}\cdot\left(-5x^4\right)\right)'=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\left(1-x^5\right)^{-7/4}\cdot 25x^8-20x^3\cdot\left(1-x^5\right)^{-3/4}\right)=-\frac{5x^3}{16}\frac{16-x^5}{\left(1-x^5\right)^{7/4}}$$

.

Отсюда видно, что $f''(x)>0$ при $x<0$, $f''(x)<0$ при $x>0$, $f''(x)=0$ при $x=0$, то есть при $x<0$ функция строго вогнута (строго выпукла вниз), при $x>0$ функция строго выпукла (строго выпукла вверх); $x=0$, $y=1$ является точкой перегиба.

6. График функции (рис 2.5).

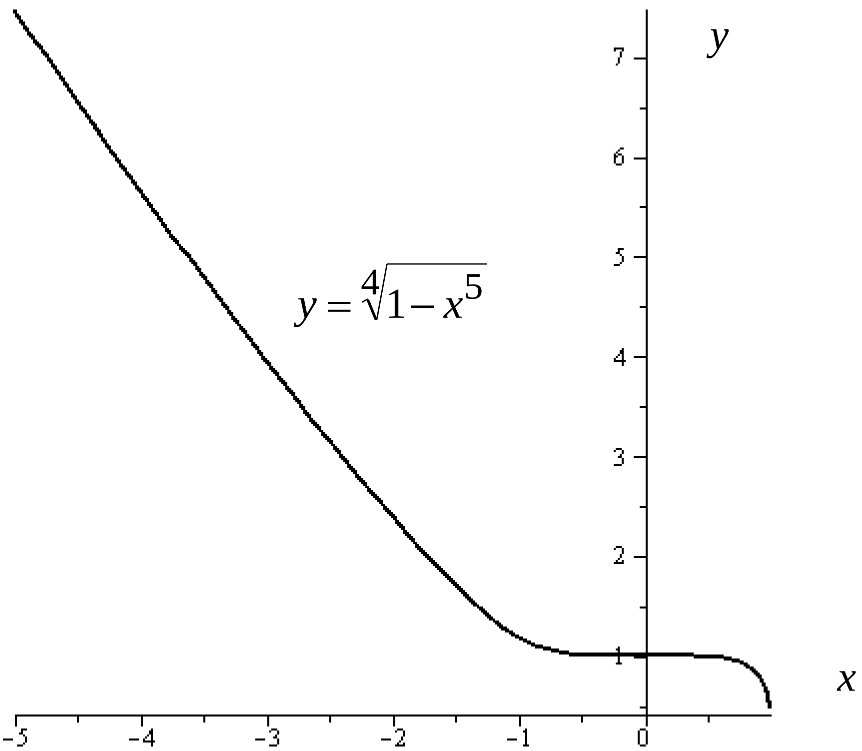


Рис. 2.5.

Пример 5. $y=\sqrt[3]{(2-x)(x+2)^2}$.

Решение.

1. Исследование общих свойств функции.

1.1. Область определения $D=(-\infty;+\infty)$.

1.2. Точек разрыва нет.

1.3. Функция общего вида.

1.4. Функция непериодическая.

1.5. Точки пересечения с осями координат: при $x=0$ $y=2$; если $y=\sqrt[3]{(2-x)(x+2)^2}=0$, то $x=\pm 2$. Следовательно, это точки – $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$.

2. Вертикальных асимптот нет.

3. Наклонная асимптота:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{(2-x)(x+2)^2}}{x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{(2-x)(x+2)^2}+x\right)^{[\infty-\infty]}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+4x+8}{\sqrt[3]{(2-x)^2(x+2)^4}-x\sqrt[3]{(2-x)(x+2)^2}+x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=-\frac{2}{3}$$

,

следовательно, уравнение асимптоты

$$y=-x-\frac{2}{3}.$$

4. Первая производная:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left((2-x)(x+2)^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-(x+2)^2+2(x+2)(2-x)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(x+2)(4-2x-x-2)}{\left((2-x)(x+2)^2\right)^{\frac{2}{3}}}=-\frac{1}{3}\frac{3x-2}{\sqrt[3]{(2-x)^2(x+2)}}.$$

При $x=\pm 2$ производной не существует. Корень числителя – $x=\frac{2}{3}$.

Знаки производной (рис. 2.6).

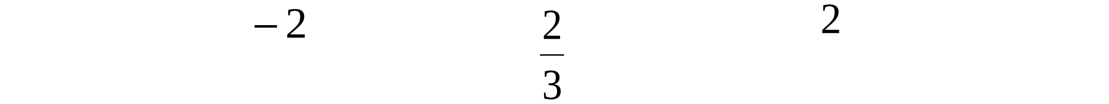


Рис. 2.6.

При $x \in (-\infty, -2)$ $f(x)$ строго убывает, при $x \in (-2, \frac{2}{3})$ $f(x)$ строго возрастает, при $x \in (\frac{2}{3}, 2) \bigcup (2, +\infty)$ $f(x)$ строго убывает. При переходе через точку $x = 2$ производная знака не меняет, точек экстремума только две: $x = -2$ – точка минимума, $y(-2) = 0$; $x = \frac{2}{3}$ – точка максимума, $y(\frac{2}{3}) = \sqrt[3]{\left(\frac{8}{3}\right)^2 \frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4} \approx 2{,}12$.

5. Вторая производная:

$$f''(x) = -\frac{1}{3} \frac{(3x-2)' \cdot \sqrt[3]{(2-x)^2(x+2)} - (3x-2) \cdot \left(\sqrt[3]{(2-x)^2(x+2)}\right)'}{\sqrt[3]{(2-x)^4(x+2)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{9} \frac{9(2-x)(x+2) + (3x-2) \cdot (3x+2)}{\sqrt[3]{(2-x)^5(x+2)^4}} = -\frac{1}{9} \frac{9(4-x^2) + (9x^2-4)}{\sqrt[3]{(2-x)^5(x+2)^4}} =$$

$$= -\frac{1}{9} \frac{32}{\sqrt[3]{(2-x)^5(x+2)^4}}.$$

Знаки второй производной (рис. 2.7).

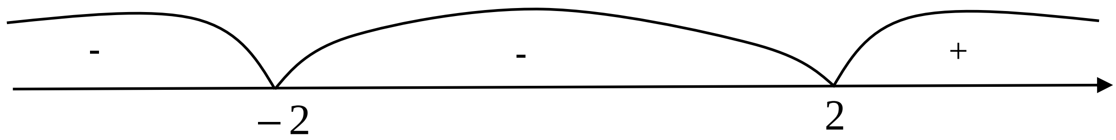


Рис. 2.7.

Отсюда видно, что при $x \in (-\infty, -2) \bigcup (-2, 2)$ функция строго выпукла (строго выпукла вверх), при $x \in (2, +\infty)$ функция строго вогнута (строго выпукла вниз). Точка $x = 2$, $y(2) = 0$ является точкой перегиба.

6. График функции (рис 2.8).

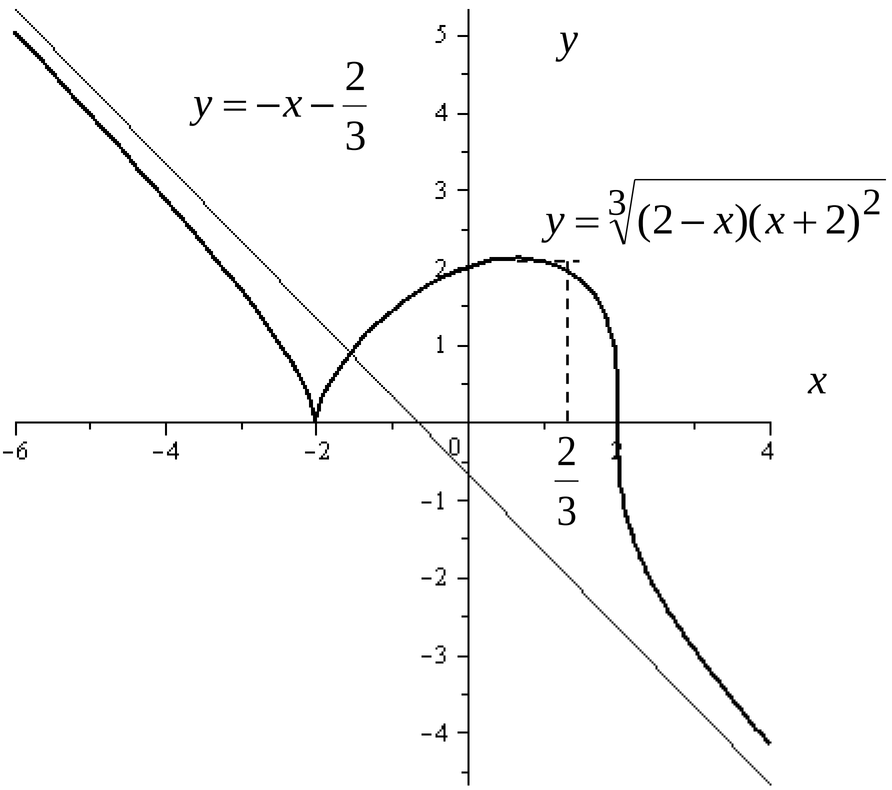


Рис. 2.8.

Пример 6. $y = xe^{-x^2}$.

Решение.

1. Исследование общих свойств функции.

1.1. Область определения $D = (-\infty; +\infty)$.

1.2. Точек разрыва нет.

1.3. Функция нечетная: $f(-x) = -xe^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -f(x)$.

1.4. Функция непериодическая.

1.5. Точки пересечения с осями координат: $(0,\ 0)$.

2. Точек разрыва нет. Вертикальных асимптот нет.

3. Уравнения наклонных асимптот. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0.$$

Получили горизонтальную асимптоту:

$$y = 0.$$

4. Первая производная функции:

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Уравнение $f'(x) = 0$ имеет корни $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0.71$, определяющие знаки производной (рис. 2.9). При $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ функция строго убывает, при $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ – строго возрастает; $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точка минимума $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}} \approx -0.43$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ – точка максимума $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.43$.

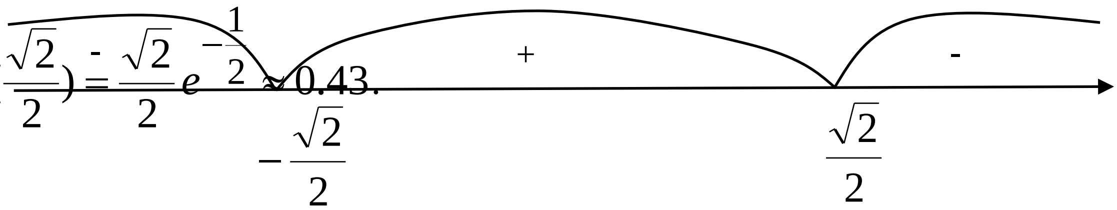


Рис. 2.9.

5. Вторая производная функции:

$$f''(x) = -2xe^{-x^2}(1 - 2x^2) + e^{-x^2}(-4x) = -2xe^{-x^2}(3 - 2x^2).$$

При $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $x \in (0, \sqrt{\frac{3}{2}})$ функция строго выпукла (строго выпукла вверх), при $x \in (-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$, $x \in (\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$ строго вогнута (строго выпукла вниз); $x = 0$, $f(0) = 0$ и $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.22$, $f(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} e^{-1.5} \approx \pm 0.27$ – точки перегиба,.

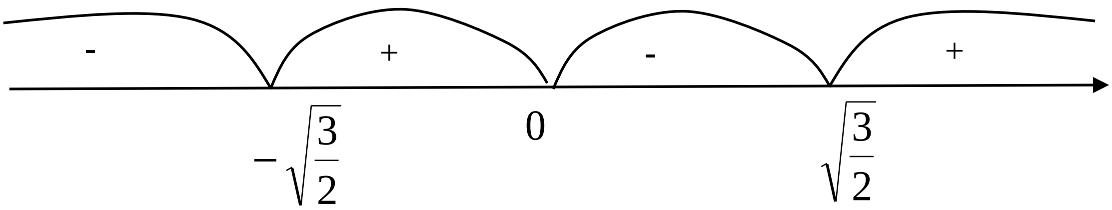


Рис. 2.10.

6. График функции (рис. 2.11).

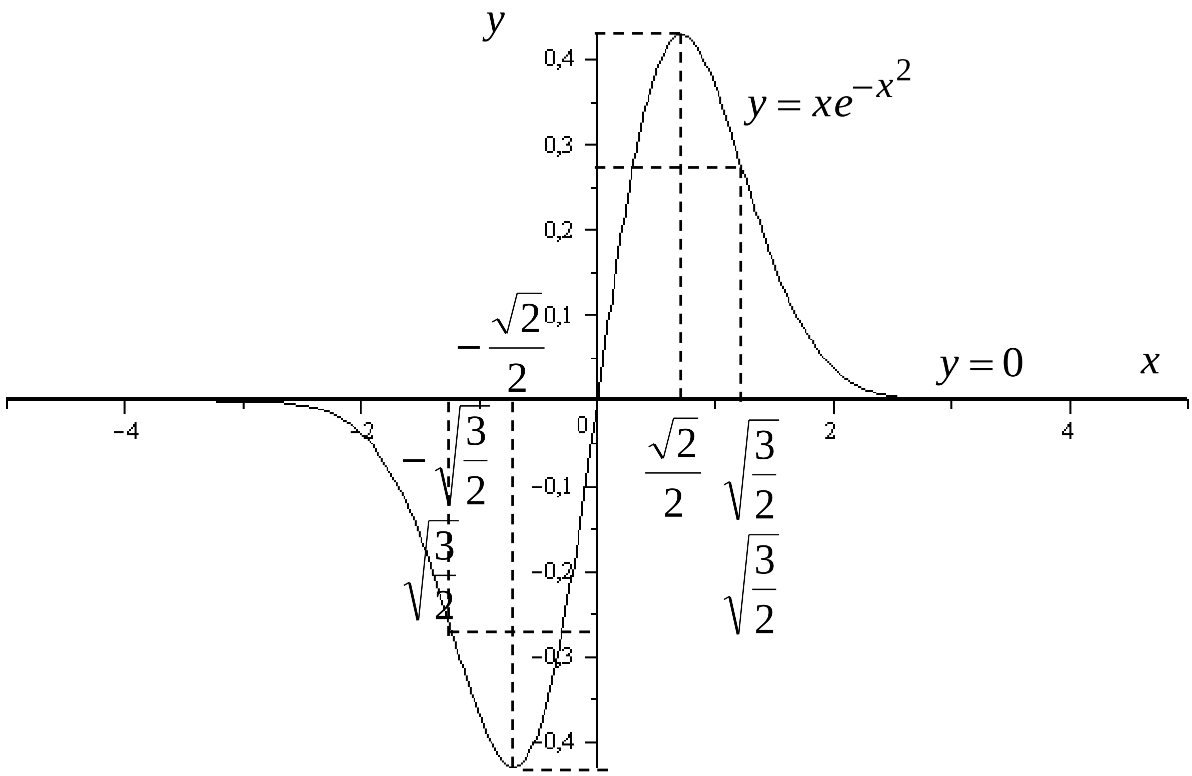


Рис. 2.11

Пример 7. $y = \sin 3x + \cos 3x$.

Решение.

1. Исследование общих свойств функции.

1.1. Область определения $D = (-\infty; +\infty)$.

1.2. Точек разрыва нет.

1.3. Функция общего вида:

$$f(-x) = \sin(-3x) + \cos(-3x) = \cos 3x - \sin 3x \neq \left[\begin{array}{l} f(x) \\ -f(x) \end{array}\right.$$

1.4. Периодичность. Представим функцию в виде:

$$f(x)=\sin 3x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$$
.
Тогда период, как минимальное число, удовлетворяющее равенству $f(x+T)=f(x)$, определяется условием

$$\sqrt{2}\cos\left(3x+3T-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right),$$

откуда следует:

$$3T=2\pi\Rightarrow T=\frac{2\pi}{3}.$$

1.5. Точки пересечения с осями координат. В силу периодичности функции, их следует определить на промежутке длиной $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$. С осью OY: $f(0)=\sin 0+\cos 0=1$ – точка $(0{,}1)$. С осью абсцисс OX :

$$f(x)=\sqrt{2}\cos(3x-\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow 3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}(1+2k),$$

$$x_1=\frac{\pi}{4}, x_2=\frac{7\pi}{12}.$$

Итак, на промежутке $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ точки пересечения с осями координат: $(0,1)$, $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, $\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$.

2. Точек разрыва нет. Вертикальных асимптот нет.

3. Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{2}\cos(3x-\frac{\pi}{4})}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{2}\cos(3x-\frac{\pi}{4})-$$

– предела не существует как у периодической функции. Поэтому асимптот нет.

4. Первая производная функции:

$$f'(x)=-\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sin(3x-\frac{\pi}{4}).$$

Корни производной $\sin(3x-\frac{\pi}{4})=0$ $\quad x=\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$. Определим знаки производной на промежутке $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ (рис. 2.12).

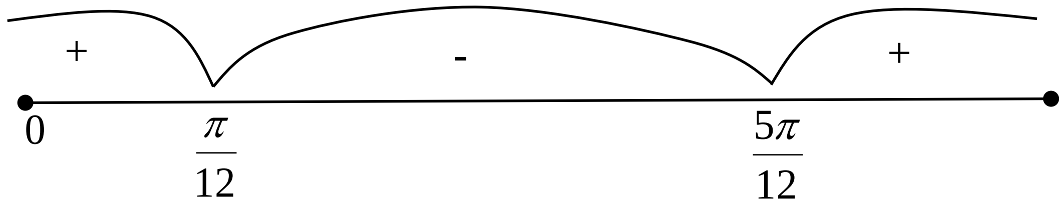


Рис. 2.12.

При $x\in(0,\frac{\pi}{12})$, $x\in(\frac{5\pi}{12},\frac{2\pi}{3})$ функция строго возрастает, при $x\in(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12})$ – строго убывает; $x=\frac{\pi}{12}$ – точка максимума, $f(\frac{\pi}{12})=\sqrt{2}$; $x=\frac{5\pi}{12}$ – точка минимума, $f(\frac{5\pi}{12})=-\sqrt{2}$.

5. Вторая производная функции:

$$f''(x)=-\sqrt{2}\cdot 9\cdot\cos(3x-\frac{\pi}{4}).$$

Уравнение $\cos(3x-\frac{\pi}{4})=0$ на промежутке $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ имеет корни $x=\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}$, определяющие знаки второй производной (рис. 2.12).

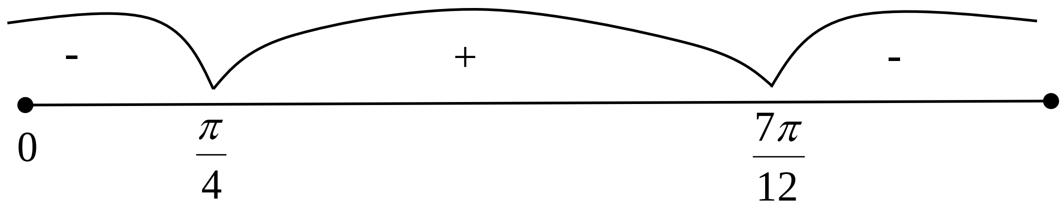


Рис. 2.12.

При $x\in(0,\frac{\pi}{4})$, $x\in(\frac{7\pi}{12},\frac{2\pi}{3})$ функция строго выпукла (строго выпукла вверх), при $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12})$ – строго вогнута (строго выпукла вниз); $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{7\pi}{12}$ – точки перегиба, $f(\frac{\pi}{4})=0$, $f(\frac{7\pi}{12})=0$.

6. График функции строится на промежутке $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, и продлевается повторением на всю числовую ось по свойству $T = \frac{2\pi}{3}$ периодичности (рис. 2.13).

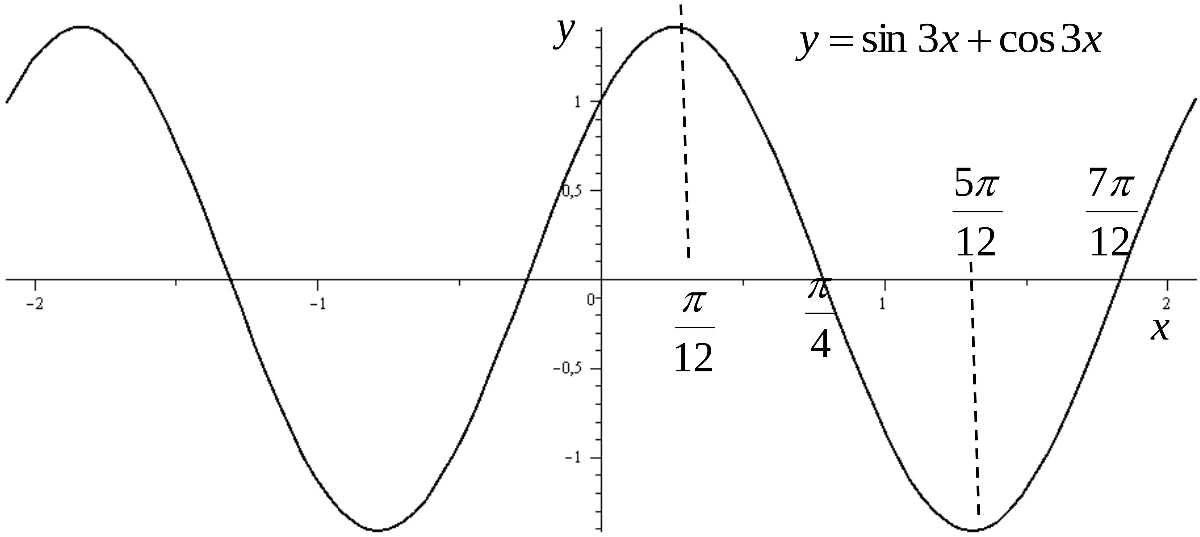


Рис. 2.13.

Пример 8. $y = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 1)$.

Решение.

1. Исследование общих свойств функции.

1.1. Область определения функции: $D = (-\infty; -1) \bigcup (1; +\infty)$.

1.2. Внутри области определения точек разрыва нет.

1.3. Функция общего вида, поскольку:

$$f(-x) = -(x+1) \cdot \ln(x^2 - 1) \neq \left[\begin{array}{l} f(x) \\ -f(x) \end{array} \right. .$$

1.4. Функция непериодическая.

1.5. Точки пересечения с осями координат. Точка $x = 0$ не принадлежит области определения, поэтому пересечения с осью OY график функции не имеет.

Решая уравнение

$$y = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 1) = 0,$$

получим $x = 1$ – не принадлежит области определения, $x^2 = 2$, то есть точками пересечения с осью OX являются $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

2. Односторонние пределы в граничных точках области определения. В первой точке:

$$\lim_{x\to -1-0}(x-1)\cdot\ln(x^2-1)\overset{[-2\cdot(-\infty)]}{=}+\infty .$$

Во второй точке по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1+0}(x-1)\cdot\ln(x^2-1)\overset{[0\cdot(-\infty)]}{=}\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln(x^2-1)}{\dfrac{1}{x-1}}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to 1+0}\frac{\dfrac{2x}{x^2-1}}{\dfrac{-1}{(x-1)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\frac{-2x\cdot(x-1)}{x+1}=0 .$$

Итак, вертикальная асимптота имеется только в точке $x=-1$

3. Наклонных асимптот нет, поскольку:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)\cdot\ln(x^2-1)}{x}=+\infty .$$

4. Первая производная функции:

$$f'(x)=\ln(x^2-1)+\frac{2x(x-1)}{x^2-1}=\ln(x^2-1)+\frac{2x}{x+1}=$$

$$=\frac{(x+1)\ln(x^2-1)+2x}{x+1}.$$

Решая уравнение $(x+1)\ln(x^2-1)+2x=0$ численно, получим $x\approx 1.158$. По корням числителя и знаменателя определяются знаки производной (рис. 2.14).

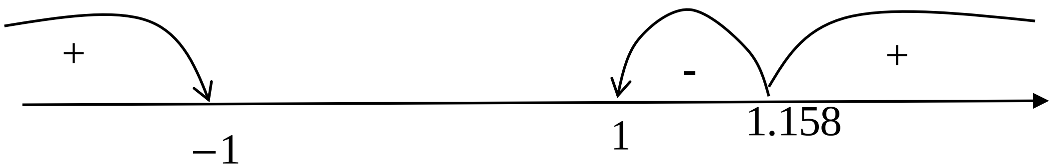


Рис. 2.14.

При $x\in(-\infty,-1)$, $x\in(\approx 1.158,\infty)$ функция строго возрастает, при $x\in(1,1.158)$ – строго убывает; $x=1.158$ – точка минимума, $f(1.158)\approx -0.17$.

5. Вторая производная функции:

$$f''(x)=\frac{2x}{x^2-1}+2\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=2\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)^2}=2\frac{(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{(x-1)(x+1)^2}$$

Корни числителя и знаменателя определяют интервалы в области определения, на которых вторая производная сохраняет знаки (рис 2.15).

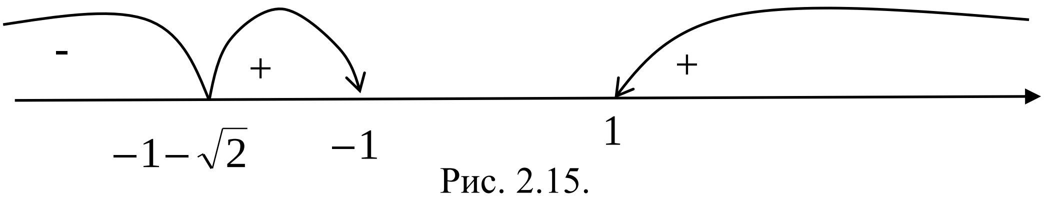


Рис. 2.15.

При $x\in(-\infty,-1-\sqrt{2})$, функция строго выпукла (строго выпукла вверх), $x\in(-1-\sqrt{2},-1)$, $x\in(1,\infty)$ – строго вогнута (строго выпукла вниз); $x=-1-\sqrt{2}\approx-2.41$ точка перегиба $f(-1-\sqrt{2})=-(2+\sqrt{2})\ln(2\sqrt{2}+2)\approx-5.376$.

6. График функции (рис. 2.16).

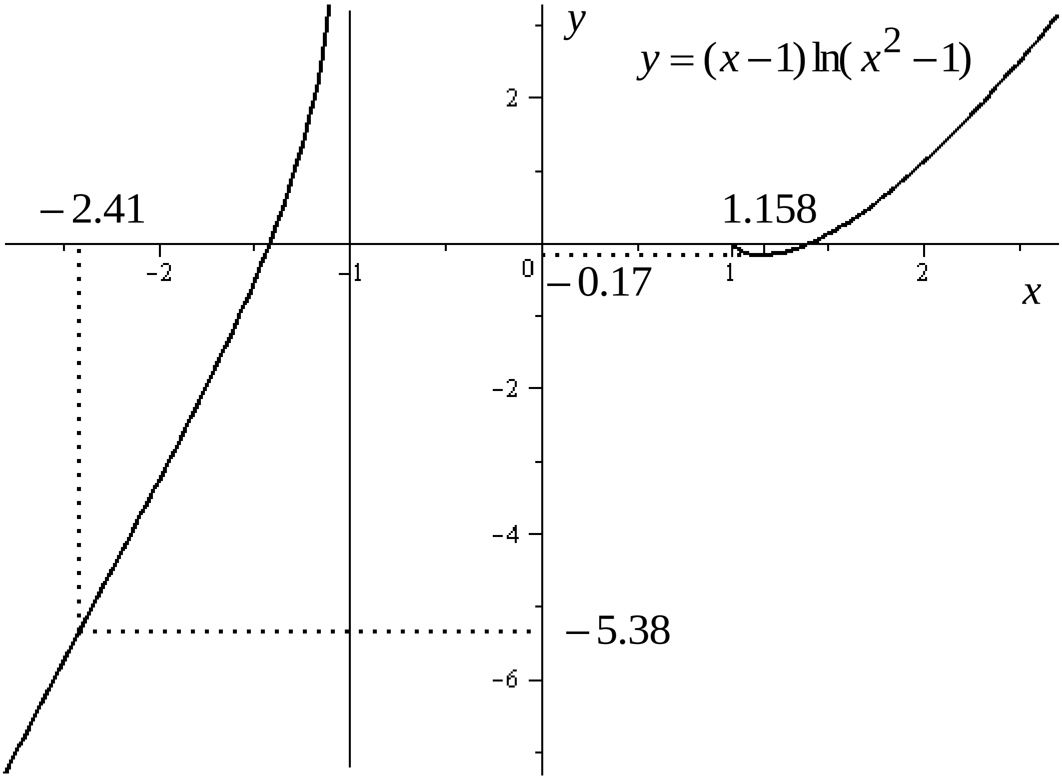


Рис. 2.16.

Пример 9. $y=e^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

Решение.

1. Исследование общих свойств функции.

1.1. Область определения: $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

1.2. Область значений: $E=(-\infty,+\infty)$.

1.3. Точки разрыва: $x=\pm1$.

1.4. Функция общего вида:

$$f(-x)=e^{-\frac{2x}{x^2-1}}\neq\left[\begin{array}{l} f(x) \\ -f(x) \end{array}\right..$$

1.5. Функция непериодическая.

1.6. Точки пересечения с осями координат: $f(0)=1$. Уравнение: $e^{\frac{2x}{x^2-1}}=0$ решений не имеет. Единственная точка пересечения с осью OY: $(0,1)$.

2. Вертикальные асимптоты. Односторонние пределы в точке $x=-1$:

$$\lim_{x\to-1-0}\left(e^{\frac{2x}{x^2-1}}\right)\overset{\left[e^{-\infty}\right]}{=}0,$$

$$\lim_{x\to-1+0}\left(e^{\frac{2x}{x^2-1}}\right)\overset{\left[e^{+\infty}\right]}{=}+\infty.$$

Следовательно: $x=-1$ – вертикальная асимптота. Односторонние пределы в точке $x=1$:

$$\lim_{x\to1-0}\left(e^{\frac{2x}{x^2-1}}\right)\overset{\left[e^{-\infty}\right]}{=}0,$$

$$\lim_{x\to1+0}\left(e^{\frac{2x}{x^2-1}}\right)\overset{\left[e^{+\infty}\right]}{=}+\infty.$$

Следовательно: $x=-1$ – вертикальная асимптота.

3. Наклонные асимптоты. При $x\to\pm\infty$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{e^{\frac{2x}{x^2-1}}}{x}\right)=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{2x}{x^2-1}}=1.$$

Таким образом, $y=1$– горизонтальная асимптота.

4. Первая производная:

$$f'(x)=\left(e^{\frac{2x}{x^2-1}}\right)'=e^{\frac{2x}{x^2-1}}\cdot\left(\frac{2(x^2-1)-4x^2}{(x^2-1)^2}\right)=-2e^{\frac{2x}{x^2-1}}\cdot\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

Уравнение $f'(x)=0$ решений не имеет. Так как точки $x=\pm1$ находятся вне области определения, точек подозрительных на экстремум нет. Для всех $x\in D$ $f'(x)<0$, функция убывает во всей области определения.

5. Вторая производная:

$$f''(x)=-2\cdot\left(e^{\frac{2x}{x^2-1}}\cdot\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=$$

$$=4\cdot e^{\frac{2x}{x^2-1}}\cdot\left(\frac{\left(x^2+1\right)^2-x\cdot\left(x^2-1\right)^2+2x\cdot\left(x^4-1\right)}{\left(x^2-1\right)^4}\right)\quad.$$

Решаем уравнение:

$$\left(x_0{}^2+1\right)^2-x_0\cdot\left(x_0{}^2-1\right)^2+2x_0\cdot\left(x_0{}^4-1\right)=0$$

численным способом, находим решение $x_0\approx-1.541$, $f(x_0)\approx0.106$. При $x<x_0$, $f''(x)<0$ – функция строго выпукла вверх (строго выпукла); при $x>x_0, x\neq\pm1$, $f''(x)>0$ – функция строго выпукла вниз (строго вогнута); точка $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба.

6. График функции (рис. 2.17).

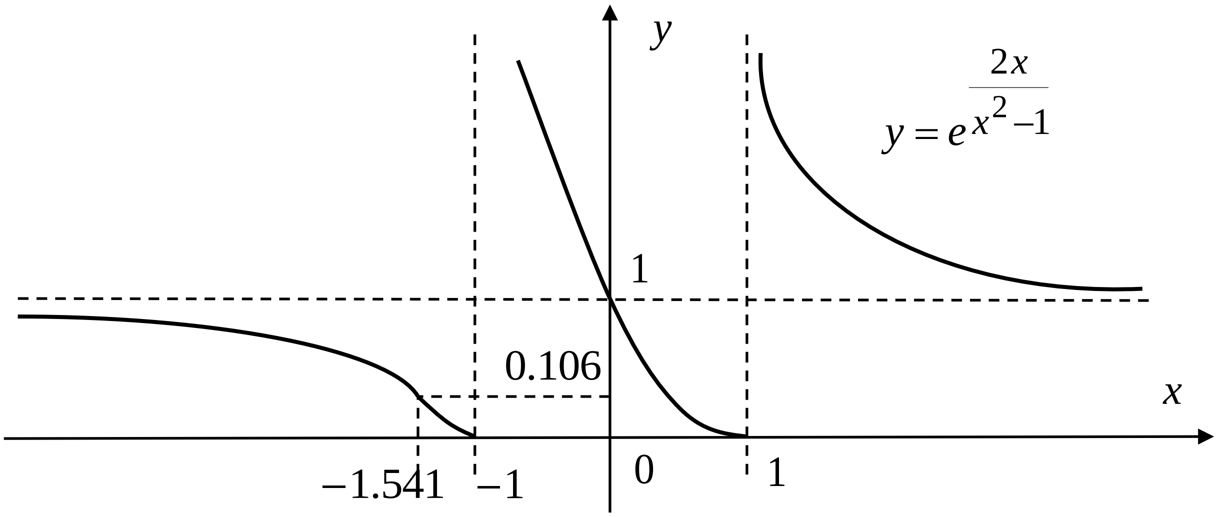


Рис. 2.17.

Пример 10. $y = 2^{\arcsin x}$**.**

Решение.

1. Исследование общих свойств функции.

1.1. Область определения: $D = [-1, 1]$.

1.2. Область значений: $E = (0, +\infty)$.

1.3. Точек разрыва нет.

1.4. Функция общего вида:

$$f(-x) = 2^{\arcsin(-x)} = 2^{-\arcsin x} \neq \left[\begin{array}{l} f(x) \\ -f(x) \end{array}\right. .$$

1.5. Функция непериодическая.

1.6. Точки пересечения с осями координат. С осью OY: $y(0) = 1$. Поскольку уравнение $2^{\arcsin x} = 0$ решений не имеет, точек пересечения с осью OX нет. Единственная точка пересечения с осями – точка $(0, 1)$.

2. Вертикальных асимптот нет, так как нет точек разрыва.

3. Наклонных асимптот нет ($D = [-1, 1]$).

4. Первая производная:

$$f'(x) = \frac{2^{\arcsin x} \ln 2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Уравнение $f'(x) = 0$ решений не имеет. Так как точки $x = \pm 1$ находятся на границе области определения, точек подозрительных на экстремум нет.

Поскольку $f'(x) > 0$, функция возрастает.

5. Вторая производная:

$$f''(x) = \ln 2 \frac{2^{\arcsin x} \ln 2 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} 2^{\arcsin x}}{\left(1-x^2\right)} =$$

$$= \ln 2 \cdot 2^{\arcsin x} \cdot \frac{\ln 2 \cdot \sqrt{1-x^2} + x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}.$$

Решаем уравнение:

$$\ln 2 \cdot \sqrt{1-x_0{}^2} + x_0 = 0$$

в области $D = [-1, 1]$ $\quad x_0 = -\dfrac{\ln 2}{\sqrt{1+\ln^2 2}} \approx -0.6$, $f(x_0) \approx 0.6$.

На интервале $(-1, x_0)$, $f''(x) < 0$ функция строго выпукла вверх (строго выпукла); на интервале $(x_0, 1)$, $f''(x) > 0$ функция строго выпукла вниз (строго вогнута); $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба.

6. График функции (рис. 2.18).

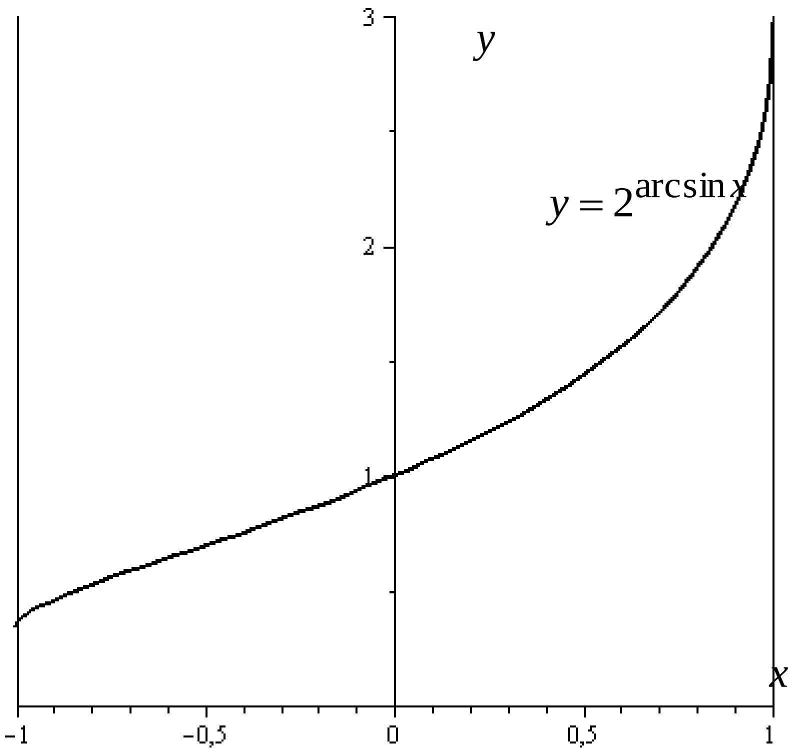


Рис. 2.18.

§ 3. Задания на самостоятельную работу.

Задание: провести полное исследование функции и построить ее график.

Вариант 1.

1. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$; 2. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}}$.

Вариант 2.

1. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$; 2. $y=-\dfrac{1}{4}\left(x^3-3x^2+4\right)$.

Вариант 3.

1. $y=\dfrac{x^2}{x+2}$; 2. $y=x+1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$.

Вариант 4.

$y=\dfrac{x^2}{x^2+4}$; 2. $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot(x-2)$.

Вариант 5.

1. $y=\dfrac{6x-x^2}{4x+1}$; 2. $y=x^2\cdot e^{-x}$.

Вариант 6.

1. $y=\dfrac{2x}{x-1}$; 2. $y=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$.

Вариант 7.

1. $y=\dfrac{3-x}{x^2+2}$; 2. $y=\dfrac{e^x}{x}$.

Вариант 8.

1. $y=\dfrac{2x}{x+1}$; 2. $y=x^3\cdot e^{-x}$.

Вариант 9.

1. $y=\frac{x^2}{x-2}$; 2. $y=x^2\cdot e^{-x^2}$.

Вариант 10.

1. $y=\frac{2x-3}{x^2-4}$; 2. $y=2x-\sqrt[3]{x^2}$.

Вариант 11.

1. $y=\frac{x^2+9}{3x}$; 2. $y=-(x+1)\cdot e^{x+2}$.

Вариант 12.

1. $y=\frac{x^2+2x+1}{x-2}$; 2. $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Вариант 13.

1. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$; 2. $y=\ln\frac{x+1}{x+2}$.

Вариант 14.

1. $y=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$; 2. $y=x^3+x^2-8x$.

Вариант 15.

1. $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$; 2. $y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Вариант 16.

1. $y=\frac{x^2-x+1}{x}$; 2. $y=\sqrt[3]{x^2+1}$.

Вариант 17.

1. $y=\dfrac{x^3+2}{2x}$; 2. $y=x-\sqrt{x}$.

Вариант 18.

1. $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$; 2. $y=\sqrt[3]{(x-1)\cdot(x-2)^2}$.

Вариант 19.

1. $y=\dfrac{x^2+3}{x^2}$; 2. $y=(x-5)\cdot x^{\frac{2}{3}}$.

Вариант 20.

1. $y=\dfrac{x^2}{x+4}$; 2. $y=\left(1+\dfrac{9}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot(x-2)$.

Вариант 21.

1. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$; 2. $y=\sqrt[3]{x(x+3)^2}$.

Вариант 22.

1. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x}$; 2. $y=(x^2-2x)\cdot e^x$.

Вариант 23.

1. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$; 2. $y=x^3+2x^2-x-2$.

Вариант 24.

1. $y=\dfrac{x}{x+1}$; 2. $y=\dfrac{x-3}{\sqrt[2]{x^2+9}}$.

Вариант 25.

1. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$; 2. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Вариант 26.

1. $y = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{2x}$; 2. $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$.

Вариант 27.

1. $y = \dfrac{x}{(x+1)^3}$; 2. $y = (x+2)e^{3x}$.

Вариант 28.

1. $y = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$; 2. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 7}{x - 3}$.

Вариант 29.

1. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 7}{x - 3}$; 2. $y = (x+2) \cdot \ln(x^2 - 4)$.

Вариант 30.

1. $y = x^4 - 10x^2 + 4$; 2. $y = (4x+1) \cdot \exp(-x^2)$.

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1, М., Изд-во: Интеграл-Пресс, 2010г., 416с.
2. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. М., Айрис Пресс, 2017г., 608с.
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. М., ФМЛ, 2015г., 444с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., Наука, 1990г., 624 с.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. СПб., Изд-во:Лань, 2019г., 492с.
6. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М., АСТ, 2016г., 816с.
7. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс. Том 1. М., Изд-во: Юрайт, 2018г., 248с.
8. Смирнова В.Б., Федорова М.Ю. Предел и непрерывность функции одной переменной. СПб., СПбГУ, 2011г., 90с.
9. Смирнова В.Б., Морозова Л.Е., Федорова М.Ю. Производная и дифференциал функции одной переменной. Под ред. Ершова Е.К. СПб., СПбГАСУ, 2016г., 153 с.
10. Беккер Б.М., Иванов О.А. Курс математического анализа. Часть 1. Учебное пособие. СПб., ОЦЭиМ, 2008г., 75с.

Оглавление