УДК 519.178 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2019. Т. 15. Вып. 3
MSC 91B38

Математическая модель интегрированной цепочки поставок

В. М. Буре[1], *В. В. Карелин*[1], *Л. Н. Полякова*[1], *А. В. Флегонтов*[1,2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

[2] Российский государственный педагогический университет имени А. И. Герцена, Российская Федерация, 191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48

Для цитирования: *Буре В. М., Карелин В. В., Полякова Л. Н., Флегонтов А. В.* Математическая модель интегрированной цепочки поставок // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 3. С. 353–361. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.305

Управление цепочкой поставок занимает очень важное место в деятельности любой фирмы в условиях глобализации экономики и возрастании конкуренции на рынке. Главная цель управления цепочками поставок заключается в координации работы фирм-поставщиков сырья, фирмы-производителя и торговой фирмы, реализующей товар на рынке. В статье изучается непрерывная математическая модель, описывающая взаимодействие перечисленных фирм в условиях непостоянной скорости поставки сырья некоторого вида. Предполагается, что скорость поставки данного сырья может принимать два возможных значения, выбор которых определяется фирмой-производителем, при этом более высокая скорость поставки сырья соответствует интенсивному варианту производства продукта, более медленная скорость — обычному. Математическое моделирование проводится с использованием дифференциальных уравнений. Сформулирована оптимизационная задача, которая заключается в выборе момента времени переключения режима поставки сырья с интенсивного варианта на обычный с целью максимизации дохода фирмы-производителя.

Ключевые слова: уровень запаса товара, многоуровневая цепочка поставок, производство.

Введение. В работе рассматривается математическая модель управления цепочкой поставок, в которой взаимодействуют две фирмы-поставщики сырья, фирма-производитель и торговая фирма, реализующая товар на рынке. Эти фирмы взаимодействуют между собой таким образом, чтобы обеспечить производство и реализацию на рынке некоторого производимого ими товара. Предполагается, что скорость поставки сырья определенного вида может осуществляться в двух вариантах: интенсивном (с высокой скоростью) и обычном (скорость поставки сырья существенно ниже, чем в первом варианте). Выбор варианта режима поставки сырья определяется фирмой-производителем в целях максимизации своего дохода. Сырье от фирм-поставщиков сырья доставляется непрерывно и сразу направляется в производство, хранение сырья осуществляется на складах фирм, поставляющих сырье. Произведенный продукт сразу же отправляется в торговую фирму, но вследствие того, что скорость отгрузки товара может быть меньше, чем скорость производства, возникает необходимость хранить произведенный товар на складе фирмы-производителя, а это представляет собой затратную, дорогостоящую процедуру.

Близкие по постановке задачи описывались в [1–5]. Главная отличительная особенность данной работы заключается в наличии двух режимов поставки сырья определенного вида и в оптимизационной задаче, заключающейся в выборе момента переключения варианта поставки сырья с целью максимизации дохода фирмы-производителя. Оптимизационные задачи, связанные с деятельностью торговой фирмы, рассматривались в статьях [6–10].

Цепочка поставок включает три вида фирм (рис. 1).

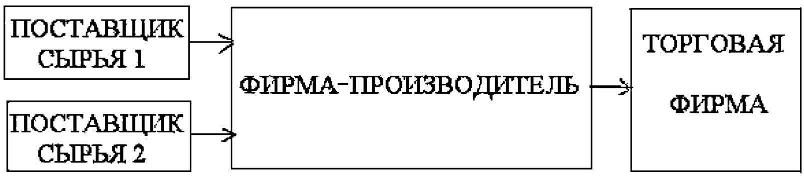

Рис. 1. Цепочка поставок

Модель для поставщиков сырья. Пусть $P_1(t)$ — скорость поставки сырья типа 1 (возможны два варианта поставок: интенсивный, обычный), равная

$$P_1(t) = \begin{cases} P_1^{(1)}, & t < T_1, \\ P_1^{(2)}, & t \geqslant T_1. \end{cases}$$

Будем считать, что $P_1^{(1)} > P_1^{(2)}$, T_1 — момент времени, который выбирается фирмой-производителем. Скорость $P_1^{(1)}$ соответствует интенсивному варианту поставок, скорость $P_1^{(2)}$ — обычному.

Уравнения динамики запаса сырья типа 1 для фирмы-поставщика 1 представим следующим образом:

$$\begin{array}{l} \frac{dI_1(t)}{dt} = -P_1^{(1)}, \quad t < T_1, \\ \frac{dI_1(t)}{dt} = -P_1^{(2)}, \quad t \geqslant T_1, \end{array}$$

где $I_1(t)$ — уровень запаса сырья типа 1 на складе фирмы-поставщика 1 на момент времени t.

Пусть Q_1 — объем сырья типа 1 (известен), момент T_{m_1} — окончание поставок сырья типа 1 (рис. 2). Тогда получим, что

$$I_1(0) = Q_1,$$

$$I_1(t) = Q_1 - P_1^{(1)}, \qquad 0 < t < T_1,$$

$$I_1(T_1) = Q_1 - P_1^{(1)} T_1.$$

Для $t : T_1 \leqslant t \leqslant T_{m_1}$ находим, что

$$I_1(t) = Q_1 - P_1^{(1)} T_1 - P_1^{(2)}(t - T_1),$$

следовательно,

$$I_1(T_{m_1}) = 0 = Q_1 - P_1^{(1)} T_1 - P_1^{(2)}(T_{m_1} - T_1)$$

и

$$T_{m_1} = T_1 + \frac{Q_1 - P_1^{(1)} T_1}{P_1^{(2)}}.$$

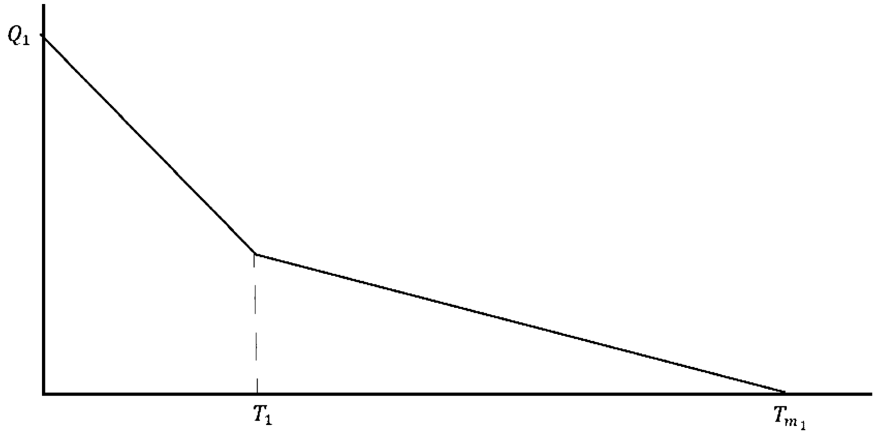

Рис. 2. Динамика уровня запаса товара типа 1 на складе поставщика 1

Пусть P_2 — скорость поставок сырья типа 2 (постоянная). Уравнение динамики запаса сырья типа 2 для фирмы-поставщика 2 будет иметь вид

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = -P_2,$$

где $I_2(t)$ — уровень запаса сырья типа 2 на складе фирмы-поставщика 2 на момент времени t.

Пусть Q_2 — объем сырья типа 2 (известен), момент T_{m_2} — окончание поставок сырья типа 2 (рис. 3). Отсюда легко вычисляются следующие параметры:

$$I_2(0) = Q_2,$$

$$I_2(t) = Q_2 - P_2 t, \qquad 0 < t < T_{m_2},$$

$$I_2(T_{m_2}) = 0.$$

Следовательно,

$$Q_2 - P_2 T_{m_2} = 0$$

и

$$T_{m_2} = \frac{Q_2}{P_2}.$$

Затраты и доходы поставщиков. Для поставщика 1 затраты состоят из: $C_1 Q_1$ — покупки сырья типа 1, где C_1 — удельная стоимость сырья типа 1, и расходов на хранение сырья типа 1: $h_1 \left(\int\limits_0^{T_1} (Q_1 - P_1^{(1)} t)dt + \int\limits_{T_1}^{T_{m_1}} [Q_1 - P_1^{(1)} T_1 - P_1^{(2)}(t - T_1)]dt \right)$, где h_1 — удельные расходы.

Затраты поставщика 2 состоят из: покупки сырья типа 2 — $C_2 Q_2$, где C_2 — удельная стоимость сырья типа 2, и расходов на хранение сырья типа 2: $h_2 \int_0^{T_{m_2}} (Q_2 - P_2 t)dt$, где h_2 — удельные расходы.

Обозначим доход поставщика 1 в виде уравнения

$$E_1 = (\omega_1 - C_1)Q_1 - h_1 \left(\int\limits_0^{T_1} (Q_1 - P_1^{(1)} t)dt + \int\limits_{T_1}^{T_{m_1}} [Q_1 - P_1^{(1)} T_1 - P_1^{(2)}(t - T_1)]dt \right),$$

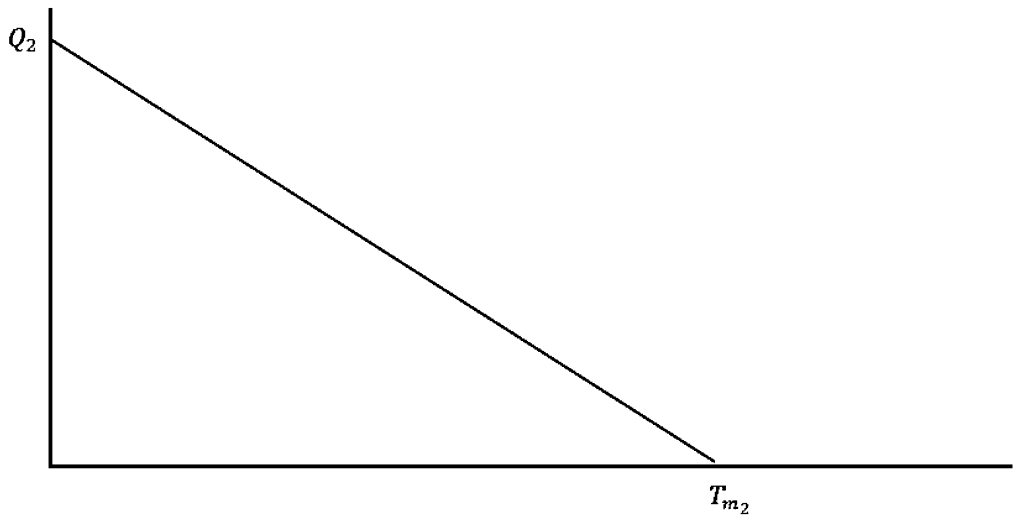

Рис. 3. Динамика уровня запаса сырья типа 2 на складе поставщика 2

в котором E_1 — общий доход, ω_1 — цена, по которой поставщик 1 продает единицу сырья производителю.

Доход поставщика 2 представим так:

$$E_2 = (\omega_2 - C_2)Q_2 - h_2 \int\limits_0^{T_{m_2}} (Q_2 - P_2 t)dt,$$

здесь E_2 — общий доход, ω_2 — цена, по которой поставщик 2 продает единицу сырья производителю.

Будем считать, что величины Q_1, Q_2, T_1, $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}$, P_2, C_1, C_2, ω_1, ω_2, h_1, h_2 известны фирмам-поставщикам, величины T_{m_1}, T_{m_2}, $I_1(t)$, $I_2(t)$, E_1, E_2 вычисляются в рамках модели.

Модель для фирмы-производителя. Предположим, что скорость производства товара $P(t)$ определяется по выражению

$$P(t) = \alpha_1 P_1(t) + \alpha_2 P_2,$$

где технологические коэффициенты $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \leqslant 1$ — известные константы.

Рассчитываем объем партии произведенного товара из всего закупленного сырья D по формуле

$$D = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2.$$

Тогда момент времени T_p — завершение производства всей партии товара — получим по уравнению

$$\int\limits_0^{T_p} P(t)dt = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2. \qquad (1)$$

Можно заметить, что

$$\int_0^{T_p} P(t)dt = \int_0^{T_1} (\alpha_1 P_1^{(1)} + \alpha_2 P_2)dt + \int_{T_1}^{T_p} (\alpha_1 P_1^{(2)} + \alpha_2 P_2)dt.$$

Тогда из (1) находим, что

$$T_p = \frac{\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 - T_1 \alpha_1 (P_1^{(1)} - P_1^{(2)})}{\alpha_1 P_1^{(2)} + \alpha_2 P_2}.$$

Пусть $I_3(t)$ — текущий объем запаса производимого продукта на складе фирмы-производителя:

$$\frac{dI_3(t)}{dt} = P(t) - d_1, \tag{2}$$

где d_1 — скорость отгрузки товара в торговую фирму, очевидно, что $I_3(0) = 0$.

Уравнение (2) описывает динамику объема товара на складе фирмы-производителя до момента времени T_p.

Опишем динамику после момента времени T_p следующим образом:

$$\frac{dI_3(t)}{dt} = -d_1, \tag{3}$$

здесь $T_p < t \leqslant T_r$, T_r — момент окончания отгрузки товара в торговую фирму.

Очевидно, что

$$I_3(T_p) = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 - d_1 T_p$$

представляет собой граничное условие для уравнения (3).

Решение уравнения (2) запиишем в виде

$$I_3(t) = \int_0^t (P(\tau) - d_1)d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T_p,$$

решение уравнения (3) — как

$$I_3(t) = I_3(T_p) - d_1(t - T_p), \qquad T_p < t \leqslant T_r.$$

Так как $I_3(T_r) = 0$, получим, что

$$T_r = \frac{I_3(T_r) + d_1 T_p}{d_1} = \frac{\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2}{d_1}.$$

Окончательно, для представления $I_3(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T_p$ будем иметь следующее выражение:

$$I_3(t) = \int_0^t (P(\tau) - d_1)d\tau = \begin{cases} \int_0^t (P_1^{(1)} - d_1)d\tau = t(P_1^{(1)} - d_1), \qquad t \leqslant T_1, \\ \int_0^{T_1} (P_1^{(1)} - d_1)d\tau + \int_{T_1}^t (P_1^{(2)} - d_1)d\tau = \\ = t(P_1^{(2)} - d_1) + T_1(P_1^{(1)} - P_1^{(2)}), \qquad T_1 < t \leqslant T_p, \end{cases}$$

а на интервале $T_p < t \leqslant T_r$ — такое:

$$I_3(t) = \int\limits_0^t (P(\tau) - d_1) d\tau = \int\limits_0^{T_p} (P(\tau) - d_1) d\tau + \int\limits_{T_p}^t (-d_1) d\tau = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 - d_1 t.$$

Расходы и доход фирмы-производителя. Расходы фирмы-производителя рассчитываются по формуле

$$s(\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) + h_3 \left[\int\limits_0^{T_p} I_3(t) dt + \int\limits_{T_p}^{T_r} I_3(t) dt \right] + \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2,$$

в которой s — себестоимость производства единицы товара, h_3 — удельные расходы хранения товара на складе фирмы-производителя. Доход фирмы-производителя определим следующим образом:

$$E_3 = \omega_3(\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) - s(\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) - h_3 \left[\int\limits_0^{T_p} I_3(t) dt + \int\limits_{T_p}^{T_r} I_3(t) dt \right] - \omega_1 Q_1 - \omega_2 Q_2,$$

где E_3 — общий доход; ω_3 — цена единицы товара, по которой торговая фирма покупает произведенный товар у фирмы-производителя (оптовая закупочная цена).

Модель торговой фирмы. Пусть $I_4(t)$ — текущий запас товара на складе торговой фирмы. Тогда опишем динамику $I_4(t)$ до момента T_r в виде уравнения

$$\frac{dI_4(t)}{dt} = d_1 - d_2,$$

в котором d_2 — скорость продажи (реализации) товара в торговой фирме, $0 \leqslant t \leqslant T_r$.

Очевидно, что $I_4(0) = 0$. Тогда

$$I_4(t) = (d_1 - d_2)t,$$

следовательно,

$$I_4(T_r) = (d_1 - d_2)T_r.$$

Представим динамику $I_4(t)$ после момента T_r так:

$$\frac{dI_4(t)}{dt} = -d_2. \tag{4}$$

В уравнении (4) $T_r \leqslant t \leqslant T_s$, где T_s — момент завершения продажи товара (рис. 4).

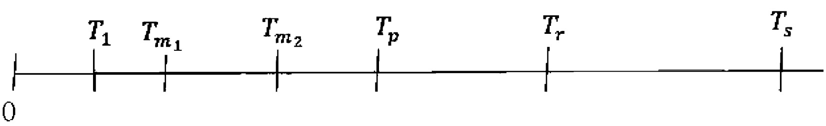

Рис. 4. Временная диаграмма

Очевидно, что $I_4(t) = (d_1 - d_2)T_r - d_2(t - T_r)$, при $t > T_r$. Так как $I_4(T_s) = 0$, получаем, что

$$d_2(T_s - T_r) = (d_1 - d_2)T_r, \qquad T_s = \frac{d_1}{d_2}T_r.$$

Из экономического смысла математической модели следует, что $d_1 \geqslant d_2$. В принципе, возможна ситуация, когда $d_1 < d_2$, в этом случае продается еще не поставленный в торговую фирму товар.

Доход торговой фирмы рассчитаем следующим образом:

$$E_4 = \omega_4(\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) - \omega_3(\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) - h_4 \left[\int\limits_0^{T_r} I_4(t)dt + \int\limits_{T_r}^{T_s} I_4(t)dt \right],$$

где ω_4 — розничная цена одной единицы товара; h_4 — удельные расходы хранения товара на складе торговой фирмы, предполагается, что $d_1 > d_2$.

Задача оптимизации. Возможна следующая постановка оптимизационной задачи. Момент времени T_1 выбирается фирмой-производителем с целью максимизации своего дохода из некоторого промежутка $[T_{1,\min}, T_{1,\max}]$, границы которого определяются технологическими требованиями.

Тогда оптимизационный критерий будет иметь вид

$$\max_{T_1 \in [T_{1,\min}, T_{1,\max}]} E_3,$$

где

$$E_3 = \omega_3(\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) - s(\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) - h_3 \left[\int\limits_0^{T_p} I_3(t)dt + \int\limits_{T_p}^{T_r} I_3(t)dt \right] - \omega_1 Q_1 - \omega_2 Q_2.$$

В рамках рассматриваемой постановки задачи максимизация дохода фирмы-производителя эквивалентна задаче минимизации

$$F = \min_{T_1 \in [T_{1,\min}, T_{1,\max}]} \left\{ \int\limits_0^{T_p} I_3(t)dt + \int\limits_{T_p}^{T_r} I_3(t)dt \right\}.$$

В этом случае необходимо ввести еще ограничение на продолжительность периода времени, когда фирма-производитель перерабатывает сырье в интенсивном режиме.

Подставляя в оптимизационный критерий значения, вычисленные ранее для $I_3(t)$, получим критерий в таком виде:

$$\int\limits_0^{T_1} \int\limits_0^{t} (P_1^{(1)} - d_1)d\tau dt + \int\limits_{T_1}^{T_p} \int\limits_0^{T_1} (P_1^{(1)} - d_1)d\tau dt + \int\limits_{T_1}^{T_p} \int\limits_{T_1}^{t} (P_1^{(2)} - d_1)d\tau dt +$$

$$+ \int\limits_{T_p}^{T_r} \int_0^{T_p} (P - d_1)d\tau dt - \int\limits_{T_p}^{T_r} \int_{T_p}^{t} d_1 d\tau dt.$$

В свою очередь, в результате подстановки T_p и T_r через T_1, сведем к квадратичной функции $-\beta_1 T_1^2 + \beta_2 T_1 + \beta_3$ искомую величину T_1. Отсюда и определяем минимум заданного функционала для значений $0 \leqslant T_1 \leqslant T_p$.

Заключение. В статье рассмотрена проблема математического моделирования интегрированной цепочки поставок, включающей фирмы-поставщики сырья, фирму-производителя некоторой продукции и торговую фирму, реализующую данную продукцию на рынке. Математическая модель имеет непрерывный характер, для математического моделирования применяются дифференциальные уравнения. Сформулирована оптимизационная задача, в которой поставка сырья переключается с интенсивного режима производства на обычный.

Литература

1. *Pal B., Sana Sh. S., Chaudhuri K.* A three layer multi-item production-inventory model for multiple suppliers and retailers // Economic Modelling. 2012. Vol. 29. P. 2704—2710.

2. *Ben-Daya M., Al-Nassar A.* An integrated inventory production system in a three-layer supply chain // Production Planning and Control. 2008. Vol. 19 (2). P. 97–104.

3. *Bhattacharya D. K.* On multi-item inventory // European J. of Operational Research. 2005. Vol. 162. P. 786–791.

4. *Brandimarte P.* Multi-item capacitated lot-sizing with demand uncertainty // Intern. J. of Production Research. 2006. Vol. 44 (15). P. 2997–3022.

5. *Kamali A., Fatemi Ghomia S. M. T., Jolai F.* A multi-objective quantity discount and joint optimization model for coordination of a single-buyer multi-vendor supply chain // Computers and Mathematics with Applications. 2011. Vol. 62. P. 3251–3269.

6. *Полякова Л. Н., Буре В. М., Карелин В. В.* Максиминный подход к оценке объема заказа товара в условиях падения спроса // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 4. С. 352–361. htpps://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.408

7. *Буре В. М., Карелин В. В., Буре А. В.* Оценка объема заказа товара при возможном падении спроса // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 252–260. htpps://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.306

8. *Буре В. М., Карелин В. В., Полякова Л. Н., Ягольник И. В.* Моделирование процесса заказа для кусочно-линейного спроса с насыщением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 2. С. 138–146.

9. *Bure V. M., Karelin V. V., Myshkov S. K., Polyakova L. N.* Determination of order quantity with piecewise-linear demand function with saturation // Intern. J. of Applied Engineering Research. 2017. Vol. 12. N 18. P. 7857–7862.

10. *Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N.* Probabilistic model of terminal services // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10. N 39. P. 1945–1952.

Статья поступила в редакцию 15 мая 2019 г.
Статья принята к печати 6 июня 2019 г.

Контактная информация:

Буре Владимир Мансурович — д-р техн. наук, проф.; vlb310154@gmail.com

Карелин Владимир Витальевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; vlkarelin@mail.ru

Полякова Людмила Николаевна — д-р физ.-мат. наук, проф.; lnpol07@mail.ru

Флегонтов Александр Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; flegontoff@yandex.ru

Mathematical model of the integrated supply chain

V. M. Bure[1], *V. V. Karelin*[1], *L. N. Polyakova*[1], *A. V. Flegontov*[1,2]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Herzen State Pedagogical University of Russia, 48, nab. r. Moika, St. Petersburg, 191186, Russian Federation

For citation: Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N., Flegontov A. V. Mathematical model of the integrated supply chain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 3, pp. 353–361. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.305 (In Russian)

Supply chain management occupies a very important place in the activities of any company in a globalized economy and increasing competition in the market. The main goal of supply chain management is to coordinate the work of firms — suppliers of raw materials, firms-manufacturers and trading companies selling goods on the market. The article studies a continuous mathematical model describing the interaction of the listed firms under conditions of a non-constant rate of supply of some kind of raw materials. It is assumed that the speed of supply of these raw materials can take two possible values, the choice of which is determined by the manufacturer, the manufacturer, the higher rate of supply of raw materials corresponds to the intensive production variant of the product, the slower speed corresponds to the usual production variant. Mathematical modeling is carried out using differential equations. An optimization problem is formulated, which consists in choosing the time point for switching the mode of supply of raw materials from the intensive version to the normal version in order to maximize the income of the manufacturer-manufacturer.

Keywords: stock level of the goods, multi-echelon supply chain, production.

References

1. Pal B., Sana Sh. S., Chaudhuri K. A three layer multi-item production-inventory model for multiple suppliers and retailers. *Economic Modelling*, 2012, vol. 29, pp. 2704—2710.

2. Ben-Daya M., Al-Nassar A. An integrated inventory production system in a three-layer supply chain. *Production Planning and Control*, 2008, vol. 19 (2), pp. 97–104.

3. Bhattacharya D. K. On multi-item inventory. *European Journal of Operational Research*, 2005, vol. 162, pp. 786–791.

4. Brandimarte P. Multi-item capacitated lot-sizing with demand uncertainty. *Intern. J. of Production Research*, 2006, vol. 44 (15), pp. 2997–3022.

5. Kamali A., Fatemi Ghomia S. M. T., Jolai F. A multi-objective quantity discount and joint optimization model for coordination of a single-buyer multi-vendor supply chain. *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, vol. 62, pp. 3251–3269.

6. Polyakova L. N., Bure V. M., Karelin V. V. Maksiminniy podhod k otsenke ob'ioma zakaza tovara v usloviah padenia sprosa [Maximin approach in estimating of the goods order volume under condition of falling demand]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 4, pp. 352–361. htpps://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.408 (In Russian)

7. Bure V. M., Karelin V. V., Bure A. V. Otsenka ob'ioma zakaza tovara pri vozmozhnom padenii sprosa [Evaluation of the volume of ordering of goods while possible demand drop]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 3, pp. 252–260. htpps://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.306 (In Russian)

8. Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N., Yagol'nik I. V. Modelirovanie protsessa zakaza dlia kusochno-lineinogo sprosa s nasyscheniem [Modeling of the ordering process for piecewise-linear demand with saturation]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 2, pp. 138–146. (In Russian)

9. Bure V. M., Karelin V. V., Myshkov S. K., Polyakova L. N. Determination of order quantity with piecewise-linear demand function with saturation. *Intern. J. of Applied Engineering Research*, 2017, vol. 12, no. 18, pp. 7857–7862.

10. Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N. Probabilistic model of terminal services. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no. 39, pp. 1945–1952.

Received: May 15, 2019.
Accepted: June 06, 2019.

Author's information:

Vladimir M. Bure — Dr. Sci. in Technics, Professor; vlb310154@gmail.com

Vladimir V. Karelin — PhD in Physics and Mathematics, Associated Professor; vlkarelin@mail.ru

Lyudmila N. Polyakova — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; lnpol07@mail.ru

Aleksander V. Flegontov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; flegontoff@yandex.ru