ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.853
MSC 52A41

Формула субдифференциала функции расстояния до выпуклого множества в асимметричном пространстве

В. В. Абрамова, С. И. Дудов, А. В. Жаркова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Российская Федерация, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Для цитирования: *Абрамова В. В., Дудов С. И., Жаркова А. В.* Формула субдифференциала функции расстояния до выпуклого множества в асимметричном пространстве // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 3. С. 300–309. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.301

Рассматривается функция расстояния, заданная калибровочной функцией Минковского (калибром) некоторого выпуклого телесного компакта, от точки до выпуклого замкнутого множества конечномерного пространства. Известно, эта функция выпуклая на всем пространстве. Получена формула субдифференциала данной функции. Ее запись использует субдифференциал калибра множества и конус возможных направлений множества, до которого измеряется расстояние, в одной из точек проекции на него. Такое обстоятельство отличает предложенную формулу субдифференциала от выведенной ранее Б. Н. Пшеничным, в которой использовались другие характеристики объектов, задающих функцию расстояния. Приводятся примеры применения полученной формулы. В частности, дается конкретизация формулы для случая, когда множество, калибром которого задается функция расстояния, и множество, до которого измеряется расстояние, являются нижними лебеговыми множествами выпуклых функций.

Ключевые слова: функция расстояния, калибр множества, субдифференциал, опорная функция, конус возможных направлений.

Введение. В приложениях нередко возникают задачи наилучшего приближения в пространствах, где роль нормы играет калибр (калибровочная функция Минковского) некоторого выпуклого тела или «асимметричная» норма. Далее будем иметь в виду конечномерные пространства.

Напомним определение калибра (см. [1, 2]).

Пусть M — компактное выпуклое множество из $\mathbb{R}^p$ с непустой внутренностью и $0_p \in \mathrm{int} M$. Функция, определенная как

$$k(x) = \inf\{\alpha \geqslant 0 : x \in \alpha M\}, \tag{1}$$

называется калибровочной функцией Минковского (калибром) множества M.

Пространства с «асимметричной» нормой и некоторые задачи наилучшего приближения в таких пространствах рассматривались, например, в работах [3–9]. Изучаются также пространства с «асимметричной» полунормой, которая задается калибром неограниченного выпуклого множества ([10, 11]).

При постановке и исследовании задач по приближению и оценкам сложных множеств множествами простой структуры важную роль играет функция

$$\rho(x, \Omega) = \min_{y \in \Omega} k(x - y), \tag{2}$$

где Ω — некоторое замкнутое множество из $\mathbb{R}^p$. Таким образом, функция $\rho(\cdot, \Omega)$ задается калибром (1) и выражает расстояние от точки x до множества в этой «асимметричной» норме.

Известно, если Ω — выпуклое замкнутое множество, то функция расстояния (2) (далее ФР) является выпуклой на $\mathbb{R}^p$. В [2, гл. 2, § 3] получена формула ее субдифференциала

$$\underline{\partial}\rho(x, \Omega) = \begin{cases} \underline{\partial}\delta(x, \Omega) \bigcap M^0, & \text{если } x \in \Omega, \\ \underline{\partial}\delta(x, \Omega + \rho(x, \Omega)M) \bigcap \{v \in \mathbb{R}^p : s(v, M) = 1\}, & \text{если } x \notin \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

В ней использованы следующие обозначения: M^0 — поляра множества M; $\delta(x, \Omega)$ — индикаторная функция множества Ω; $\underline{\partial} f(x)$ — субдифференциал выпуклой функции $f(\cdot)$ в точке x; $s(v, M) = \max\limits_{w \in M} < v, w >$ — опорная функция множества M.

Субдифференциал выпуклой функции является ее важной дифференциальной характеристикой и позволяет, в частности, подсчитать производную по направлению, выразить необходимые и достаточные условия минимума этой функции на всем пространстве или на выпуклом множестве, указать направление наискорейшего спуска (см. [12, 13]). Как видно, в записи формулы (3) используются субдифференциал индикаторной функции множества, до которого измеряется расстояние, и опорная функция множества, задающего калибр. В приложениях возникает также необходимость располагать формулой субдифференциала, выраженной через другие характеристики объектов, задающих ФР. В этом и заключается цель данной статьи.

Кроме уже введенных, будем также применять следующие обозначения: $\overline{A}$, $\mathrm{int}A$, $\mathrm{co}A$, $\mathbb{K}(A)$ — замыкание, внутренность, выпуклая оболочка и коническая оболочка множества A соответственно; $\gamma(x, A) = \{g \in \mathbb{R}^p : \exists \alpha_g > 0,\ x + \alpha g \in A,\ \forall \alpha \in (0, \alpha_g)\}$, $K(x, A) = \overline{\gamma}(x, A)$ — конус допустимых и конус возможных направлений множества A в точке x соответственно; $Q^\rho(x, \Omega) = \{z \in \Omega : k(x - z) = \rho(x, \Omega)\}$ — проекция точки x на множество Ω; $< x, y >$ — скалярное произведение элементов $x, y \in \mathbb{R}^p$; $\frac{\partial f(x)}{\partial g} = \lim\limits_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}[f(x + \alpha g) - f(x)]$ — производная по направлению $g \in \mathbb{R}^p$ функции $f(\cdot)$ в точке x; $K^+ = \{w \in \mathbb{R}^p :< v, w > \geqslant 0,\ \forall v \in K\}$ — конус, сопряженный к конусу K; $0_p = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$.

Основной результат. Напомним свойства калибра [1, 2]:

1) если $\lambda \geqslant 0$, то $k(\lambda x) = \lambda k(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^p$;

2) если $x \in M$, то $k(x) \leqslant 1$, а если $x \notin M$, то $k(x) > 1$;

3) $k(x + y) \leqslant k(x) + k(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^p$.

Как выпуклая и конечная на $\mathbb{R}^p$ функция, калибр — всюду непрерывная и дифференцируемая по направлениям функция в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$. Для производной по направлениям справедлива формула ([12, гл. 1])

$$\frac{\partial k(x)}{\partial g} = \max_{v \in \underline{\partial} k(x)} < v, g > .$$

Известна [2, гл. 4, § 4] формула субдифференциала калибра

$$\underline{\partial} k(x) = \begin{cases} \{v \in \mathbb{R}^p : s(v, M) \leqslant 1\}, & \text{если } x = 0_p, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : s(v, M) = 1, < v, x >= k(x)\}, & \text{если } x \neq 0_p. \end{cases} \tag{4}$$

Основным результатом является

Теорема. *Если Ω — выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^p$, то функция расстояния* (2)*, заданная калибром* (1)*, является выпуклой на $\mathbb{R}^p$ функцией. Ее субдифференциал в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$ можно выразить в виде*

$$\underline{\partial} \rho(x, \Omega) = \underline{\partial} k(x - z) \bigcap -K^+(z, \Omega), \tag{5}$$

где z — любая точка из $Q^\rho(x, \Omega)$.

Доказательство. Сам факт выпуклости ФР, определенной через (1) и (2), доказан в [2, гл. 2, § 3]. Докажем справедливость формулы (5).

Зафиксируем произвольную точку $x \in \mathbb{R}^p$ и точку $z \in Q^\rho(x, \Omega)$. Нетрудно видеть, что из выпуклости множества Ω следует включение $\Omega \subset z + K(z, \Omega)$, используя которое, с одной стороны, получаем неравенство

$$\rho(x + \alpha g, \Omega) \equiv \min_{y \in \Omega} k(x + \alpha g - y) \geqslant \min_{y \in z + K(z, \Omega)} k(x + \alpha g - y) =$$
$$= \min_{y \in K(z, \Omega)} k(x - z + \alpha(g - y)) \quad \forall g \in \mathbb{R}^p, \ \alpha \geqslant 0. \tag{6}$$

Из определения субдифференциала выпуклой функции вытекает неравенство

$$k(x - z + \alpha(g - y)) \geqslant k(x - z) + \alpha \max_{v \in \underline{\partial} k(x - z)} < v, g - y > . \tag{7}$$

Поскольку $z \in Q^\rho(x, \Omega)$, то $k(x - z) = \rho(x, \Omega)$, и тогда из (6), (7) при $\alpha > 0$ имеем

$$(\rho(x + \alpha g, \Omega) - \rho(x, \Omega))/\alpha \geqslant \inf_{y \in K(z, \Omega)} \max_{v \in \underline{\partial} k(x - y)} < v, g - y > . \tag{8}$$

Как выпуклая конечная функция, ФР дифференцируема по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$ ([12, гл. 1, § 4]). Поэтому, переходя в (8) к пределу по $\alpha \downarrow 0$, получаем

$$\frac{\partial \rho(x, \Omega)}{\partial g} \geqslant \inf_{y \in K(z, \Omega)} \max_{v \in \underline{\partial} k(x - y)} < v, g - y > . \tag{9}$$

С другой стороны, пусть $y \in \gamma(z, \Omega)$. То есть существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $z + \alpha y \in \Omega$ при $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Отсюда, учитывая дифференцируемость калибра $k(\cdot)$ по направлениям, следует, что

$$\rho(x + \alpha g, \Omega) \leqslant k(x + \alpha g - z - \alpha y) = k(x - z) + \alpha \frac{\partial k(x - z)}{\partial (g - y)} + o(\alpha, g - y), \tag{10}$$

где $o(\alpha, g - y)/\alpha \to 0$ при $\alpha \downarrow 0$. Из (10), используя $k(x - z) = \rho(x, \Omega)$, имеем неравенство

$$(\rho(x+\alpha g,\Omega)-\rho(x,\Omega))/\alpha \leqslant \frac{\partial k(x-z)}{\partial(g-y)}+o(\alpha,g-y)/\alpha,$$

переходя в котором к пределу по $\alpha \downarrow 0$, находим, что

$$\frac{\partial\rho(x,\Omega)}{\partial g} \leqslant \frac{\partial k(x-z)}{\partial(g-y)} = \max_{v\in\underline{\partial}k(x-z)} < v, g-y > \quad \forall y\in\gamma(z,\Omega). \tag{11}$$

Правая часть неравенства (11) является непрерывной по y. Поэтому оно будет справедливым и для любого $y\in K(z,\Omega)=\overline{\gamma}(z,\Omega)$. Таким образом, из (9) и (11) вытекает неравенство

$$\frac{\partial\rho(x,\Omega)}{\partial g} = \inf_{y\in K(z,\Omega)}\max_{v\in\underline{\partial}k(x-z)} < v, g-y > \quad \forall g\in\mathbb{R}^p. \tag{12}$$

Теперь, применяя к правой части (12) известную теорему о минимаксе (см., например, [13, приложение 1]), условия справедливости которой в данном случае выполняются, получаем

$$\frac{\partial\rho(x,\Omega)}{\partial g} = \max_{v\in\underline{\partial}k(x-z)}\inf_{y\in K(z,\Omega)} < v, g-y > \quad \forall g\in\mathbb{R}^p. \tag{13}$$

Заметим, что

$$\inf_{y\in K(z,\Omega)} < v,g-y > = < v,g > + \inf_{y\in -K(z,\Omega)} < v,y > = \begin{cases} < v,g >, & \text{если } v\in -K^+(z,\Omega),\\ -\infty, & \text{если } v\notin -K^+(z,\Omega).\end{cases}$$

Поэтому (13) можно переписать так:

$$\frac{\partial\rho(x,\Omega)}{\partial g} = \max_{v\in\underline{\partial}k(x-z)\bigcap -K^+(z,\Omega)} < v, g > \quad \forall g\in\mathbb{R}^p. \tag{14}$$

В то же время для ФР, как выпуклой конечной функции, имеет место формула производной по направлениям ([12, гл. 1, § 5])

$$\frac{\partial\rho(x,\Omega)}{\partial g} = \max_{v\in\underline{\partial}\rho(x,\Omega)} < v, g > \quad \forall g\in\mathbb{R}^p, \tag{15}$$

а ее субдифференциал $\underline{\partial}\rho(x,\Omega)$ является выпуклым компактом. В соответствии с известным фактом из выпуклого анализа (см., например, [12, гл. 1, § 2]) равенство правых частей в (14) и (15) для всех $g\in\mathbb{R}^p$ приводит к равенству выпуклых компактов, по которым берется максимум. Формула (5) тем самым доказана. Одновременно получили инвариантность множества $\underline{\partial}k(x-z)\bigcap -K^+(z,\Omega)$ относительно точек $z\in Q^\rho(x,\Omega)$. □

З а м е ч а н и е 1. Формула (5) является обобщением формулы субдифференциала обычной ФР, доказательство справедливости которой в [14] опиралось на работу [15]. Применение результатов [15] в рассматриваемом случае стало невозможным именно из-за возможности выпуклого тела M быть не обязательно симметричным относительно 0_p.

Приложения. В частных случаях в зависимости от способа задания множеств M и Ω формула (5) может быть конкретизирована, например, с помощью представления конуса возможных направлений выпуклого множества, заданного в виде нижнего лебегова множества выпуклой функции. Приведем вспомогательный факт из [12, гл. 1, § 12] в используемых здесь обозначениях.

Лемма. *Пусть множество Ω задано в виде*

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leqslant 0\},$$

где $f(y)$ — выпуклая конечная функция, причем существует точка $\hat{y}$, в которой $f(\hat{y}) < 0$. Если $f(y_0) = 0$, то

$$K(y_0, \Omega) = -\mathbb{K}^+(\underline{\partial} f(y_0)).$$

Следствие 1. *Пусть выпуклое множество Ω и выпуклый компакт M заданы в виде*

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leqslant 0\},\ M = \{y \in \mathbb{R}^p : h(y) \leqslant 0\}. \tag{16}$$

Здесь $f(\cdot)$ и $h(\cdot)$ — выпуклые конечные на $\mathbb{R}^p$ функции, причем $h(0_p) < 0$ и существует точка $\hat{y}$, в которой $f(\hat{y}) < 0$. Тогда справедлива формула

$$\underline{\partial}\rho(x, \Omega) = \begin{cases} 0_p, & \text{если } f(x) < 0, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : s(v, M) \leqslant 1\} \bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial} f(x)), & \text{если } f(x) = 0, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : s(v, M) = 1\} \bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial} h(\frac{x-z}{K(x-z)})) \bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial} f(z)), & \text{если } f(x) > 0, \end{cases} \tag{17}$$

где z — любая точка из $Q^\rho(x, \Omega)$.

Доказательство. Пусть $f(x) \leqslant 0$. Тогда $Q^\rho(x, \Omega) = \{x\}$ и формулу (5) можно записать так:

$$\underline{\partial}\rho(x, \Omega) = \underline{\partial} k(0_p) \bigcap -K^+(x, \Omega). \tag{18}$$

Из непрерывности выпуклой конечной функции $f(x)$ ([12, гл. 1, § 4]), а также из леммы следует, что

$$K(x, \Omega) = \begin{cases} \mathbb{R}^p, & \text{если } f(x) < 0, \\ -\mathbb{K}^+(\underline{\partial} f(x)), & \text{если } f(x) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Если $f(x) = 0$, то, поскольку $f(\hat{y}) < 0$, точка x не является точкой минимума выпуклой функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^p$ и, следовательно [2, гл. 4, § 2], $0_p \notin \underline{\partial} f(x)$. И так как $\underline{\partial} f(x)$ — выпуклый компакт [12, гл. 1, § 5], конус $\mathbb{K}(\underline{\partial} f(x))$ будет замкнутым [12, гл. 1, § 3]. Поэтому из (19) получаем, что

$$K^+(x, \Omega) = \begin{cases} 0_p, & \text{если } f(x) < 0, \\ -\mathbb{K}(\underline{\partial} f(x)), & \text{если } f(x) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Теперь из (4), (18) и (20) вытекает справедливость формулы (17) в случаях $f(x) < 0$ и $f(x) = 0$.

Рассмотрим случай, когда $f(x) > 0$ и, следовательно, $x \notin \Omega$, при этом $z \in Q^\rho(x, \Omega)$. Из свойств калибра следует, что множество M можно представить следующим образом:

$$M = \{y \in \mathbb{R}^p : k(y) \leqslant 1\}. \tag{21}$$

Точка $y_0 = (x - z)/k(x - z)$ — граничная точка множества M. Поэтому, учитывая также условие регулярности $h(0_p) < 0$ для выпуклой функции $h(\cdot)$, имеем, что

$$k(y_0) = 1, \quad h(y_0) = 0. \tag{22}$$

Теперь из (16), (21) и (22), используя лемму, получаем выражение

$$K(y_0, M) = -\mathbb{K}^+(\underline{\partial} k(y_0)) = -\mathbb{K}^+(\underline{\partial} h(y_0)). \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что конусы $\mathbb{K}(\underline{\partial} k(y_0))$ и $\mathbb{K}(\underline{\partial} h(y_0))$ — замкнутые и $\underline{\partial} k(y_0) = \underline{\partial} k(x-z)$ (это следует из (4) и свойств калибра). Поэтому из (23) вытекает, что

$$\mathbb{K}(\underline{\partial} k(x - z)) = \mathbb{K}(\underline{\partial} h(y_0)). \tag{24}$$

Вместе с тем, поскольку $x \notin \Omega$ и $z \in Q^\rho(x, \Omega)$, то очевидно, что $f(z) = 0$, и тогда по лемме

$$K(z, \Omega) = -\mathbb{K}^+(\underline{\partial} f(z)).$$

Отсюда, учитывая замкнутость конуса $\mathbb{K}(\underline{\partial} f(z))$, имеем

$$K^+(z, \Omega) = -\mathbb{K}(\underline{\partial} f(z)). \tag{25}$$

Как следует из (4), субдифференциал калибра при $x \neq 0_p$ находится на гиперплоскости, для которой вектор x является нормалью. Поэтому выполняется $\underline{\partial} k(x) = \{v \in \mathbb{R}^p : s(v, M) = 1\} \bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial} k(x))$. Учитывая это, из (5), (24) и (25) вытекает справедливость формулы (17) и в случае $f(x) > 0$. Следствие доказано. $\square$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что одной из альтернативных форм записи формулы (17) является следующая:

$$\underline{\partial} \rho(x, \Omega) = \begin{cases} 0_p, & \text{если } f(x) < 0, \\ \operatorname{co}\{0_p, \{v = \frac{w}{s(w,M)} : w \in \underline{\partial} f(x)\}\}, & \text{если } f(x) = 0, \\ \{v = \frac{w}{s(w,M)} : w \in \underline{\partial} h\Big(\frac{x-z}{k(x-z)}\Big) \bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial} f(z))\}, & \text{если } f(x) > 0. \end{cases}$$

Формула (5) может быть использована для дифференциальной характеристики ФР и в некоторых случаях, когда множество Ω не является выпуклым.

Следствие 2. *Пусть множество Ω имеет вид*

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i, \quad \Omega \neq \mathbb{R}^p, \tag{26}$$

где I — конечное множество индексов; Ω_i — выпуклые замкнутые множества для всех $i \in I$. Тогда ФР всюду дифференцируема по любому направлению, причем

$$\frac{\partial \rho(x, \Omega)}{\partial g} = \min_{i \in I(x)} \max_{v \in \underline{\partial} \rho(x, \Omega_i)} < v, g > \quad \forall g \in \mathbb{R}^p. \tag{27}$$

Здесь $I(x) = \{i \in I : \rho(x, \Omega) = \rho(x, \Omega_i)\}$, $\underline{\partial} \rho(x, \Omega_i) = \underline{\partial} k(x - z_i) \bigcap -K^+(z_i, \Omega_i)$, а z_i — любая точка из $Q^\rho(x, \Omega_i)$.

Доказательство. Функции $\rho(x,\Omega_i)$, как выпуклые конечные функции, дифференцируемы всюду по любому направлению, причем

$$\frac{\partial\rho(x,\Omega_i)}{\partial g} = \max_{v\in\underline{\partial}\rho(x,\Omega_i)} < v, g > \quad \forall g\in\mathbb{R}^p.$$

Поскольку множество индексов I является конечным и $\rho(x,\Omega) = \min_{i\in I}\rho(x,\Omega_i)$, то (см. [12, 16])

$$\frac{\partial\rho(x,\Omega)}{\partial g} = \min_{i\in I(x)}\frac{\partial\rho(x,\Omega_i)}{\partial g} \quad \forall g\in\mathbb{R}^p. \tag{28}$$

Из (28) и теоремы следует справедливость следствия 2. □

Замечание 3. В соответствии с введенными в работах [17, 18] понятиями семейство множеств $\{\underline{\partial}k(x-z_i)\bigcap -K^+(z_i,\Omega_i) : i\in I(x)\}$ называется верхним экзостером положительно однородной функции $h(g) = \frac{\partial\rho(x,\Omega)}{\partial g}$.

Для приложений интересен случай, когда множества Ω_i в (26) являются полупространствами.

Следствие 3. *Пусть множество* Ω *имеет вид* (26), *а* $\Omega_i = \{y\in\mathbb{R}^p :< A_i, y >\leqslant b_i\}$, $A_i\in\mathbb{R}^p$, $A_i\neq 0_p$, $b_i\in\mathbb{R}$ *и* $\mathrm{int}D\neq\emptyset$, *где* $D = \overline{\mathbb{R}^p\backslash\Omega}$. *Тогда*

1) ФР вогнута на D;

2) ее супердифференциал в точках $x\in\mathrm{int}D$ *можно выразить в виде*

$$\overline{\partial}\rho(x,\Omega) = \mathrm{co}\Big\{\frac{A_i}{s(A_i,M)} : i\in I(x)\Big\}, \tag{29}$$

где $I(x) = \{i\in I : \rho(x,\Omega) = \rho(x,\Omega_i)\}$;

3) если D *— ограниченное множество, т. е. многогранник, то, для того чтобы в точке* $x^*\in D$ *выполнялось* $\rho(x^*,\Omega) = \max_{x\in D}\rho(x,\Omega)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_p\in\mathrm{co}\{A_i : i\in I(x^*)\}. \tag{30}$$

Доказательство. Используя формулу (4) и критерий минимума выпуклой функции на выпуклом множестве [2, гл. 4, § 2], нетрудно решить задачу выпуклого программирования

$$k(x-y)\to\min_{y\in\Omega_i}.$$

В результате для $x\in\overline{\mathbb{R}^p\backslash\Omega_i}$ получаем

$$\rho(x,\Omega_i) = \min_{y\in\Omega_i} k(x-y) = \frac{< A_i, x > - b_i}{s(A_i,M)}. \tag{31}$$

Отсюда, ввиду аффинности функций $\rho(x,\Omega_i)$ на множествах $\overline{\mathbb{R}^p\backslash\Omega_i}$, вытекает вогнутость функции $\rho(x,\Omega) = \min_{i\in I}\rho(x,\Omega_i)$ на D.

Справедливость формулы супердифференциала (29) следует как из применения формулы (27), так и непосредственно из (31):

$$\frac{\partial\rho(x,\Omega)}{\partial g} = \min_{i\in I(x)}\frac{\partial\rho(x,\Omega_i)}{\partial g} = \min_{i\in I(x)}\Big\langle\frac{A_i}{s(A_i,M)}, g\Big\rangle = \min_{w\in\mathrm{co}\{\frac{A_i}{s(A_i,M)} : i\in I(x)\}} < w, g > \quad \forall g\in\mathbb{R}^p.$$

Очевидно, если x^* — точка максимума вогнутой функции $\rho(\cdot, \Omega)$ на многограннике D, т. е. является центром вписанного наибольшего шара в асимметричной норме $k(\cdot)$, то $x^* \in \mathrm{int}D$. Поэтому, как известно из выпуклого анализа (см., например, [2, гл. 4, § 2]),

$$\rho(x^*, \Omega) = \max_{x \in D} \rho(x, \Omega) \Leftrightarrow 0_p \in \overline{\partial} \rho(x^*, \Omega),$$

что, ввиду формулы (29), эквивалентно соотношению (30). □

Заключение. Получена формула субдифференциала функции расстояния от точки до множества, заданной (вместо нормы) калибровочной функцией выпуклого телесного компакта. В отличие от предложенной ранее Б. Н. Пшеничным, она выражена через другие характеристики объектов, задающих функцию расстояния, а именно через субдифференциал калибровочной функции и конус возможных направлений множества, до которого измеряется расстояние, в одной из точек проекции. Применение данной формулы продемонстрировано на примерах.

Разумеется, для приложений интересны и формула Б. Н. Пшеничного, и полученная в данной статье. В конкретных ситуациях одна из них может оказаться более удобной для использования.

Авторы благодарят рецензента за указанные погрешности и полезные советы.

Литература

1. *Rockafellar R.* Convex analysis. Princeton: New Jersey Princeton University Press, 1970. 450 с.

2. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.

3. *Dunham Ch. B.* Asymmetric norms and linear approximation // Congr. Numer. 1989. Vol. 69. P. 113–120.

4. *Romaguera S., Schellekens M.* Quasi-metric properties of complexity spaces // Topology Appl. 1999. Vol. 98. N 1–3. P. 311–322.

5. *De Blasi F. S., Myjak J.* On generalized best approximation problem // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. N 1. P. 54–72.

6. *Alegre C.* Continuous operators on asymmetric normed spaces // Acta Math. Hungar. 2009. Vol. 122. N 4. P. 357–372.

7. *Cobzas S.* Functional analysis in asymmetric normed spaces. Basel: Birkhauser, 2013. 219 p.

8. *Алимов А. Р.* Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах. Дис. на соискание учен. степени д-ра физ.-мат. наук. М.: Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, 2014. 207 с.

9. *Алимов А. Р.* Выпуклость ограниченных чебышевских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой // Изв. Саратовск. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. № 4. С. 489–497.

10. *Иванов Г. Е., Лопушански М. С.* Аппроксимативные свойства слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой // Труды Моск. физ.-технич. ин-та. 2012. Т. 4. № 4. С. 94–104.

11. *Ivanov G. E., Lopushanski M. S.* Separation theorems for nonconvex sets in space with nonsymmetric seminorm // J. Mathematical Inequalities and Applications. 2017. Vol. 20. N 3. P. 737–754.

12. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

13. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное вычисление. М.: Наука, 1990. 431 с. (Сер. Оптимизация и исследование операции. Вып. 23.)

14. *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 530–542.

15. *Дудов С. И.* Дифференцируемость по направлениям функции расстояния // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 3. С. 29–52.

16. *Гороховик В. В.* Конечномерные задачи оптимизации. Минск: Издат. центр Белорус. гос. ун-та, 2007. 240 с.

17. *Демьянов В. Ф.* Условные производные и экзостеры в негладком анализе // Докл. РАН. 1999. Т. 338. № 6. С. 730–733.

18. *Demyanov V. F.* Exhausters of positively homogeneous function // Optimization. 1999. Vol. 45. P. 13–29.

Статья поступила в редакцию 22 февраля 2019 г.
Статья принята к печати 6 июня 2019 г.

Контактная информация:

Абрамова Вероника Валерьевна — аспирант; Veronika0322@rambler.ru

Дудов Сергей Иванович — д-р физ.-мат. наук, проф.; DudovSI@info.sgu.ru

Жаркова Анастасия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доц.; ZharkovaAV@gmail.com

The formula for the subdifferential of the distance function to a convex set in an nonsymmetrical space

V. V. Abramova, S. I. Dudov, A. V. Zharkova

Saratov National Research State University, 83, Astrakhanskaya ul., Saratov, 410012, Russian Federation

For citation: Abramova V. V., Dudov S. I., Zharkova A. V. The formula for the subdifferential of the distance function to a convex set in an nonsymmetrical space. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 3, pp. 300–309. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.301 (In Russian)

The distance function, defined by the gauge (the Minkowsky gauge function) of a convex body compact, from a point to a convex closed set is considered in a finite-dimensional space. It is known that this function is convex in the whole space. The formula of its the subdifferential is obtained. It includes the subdifferential of gauge function and the cone of feasible directions of set to which the distance is measured, taken in one of the projection points on this set. This circumstans makes it different from the subdifferentional formula received earlier by B. N. Pshenichny in which another characteristics of the objects, defined the distance function, are used. Examples of applications of the obtained formula are given. In particular, a specific form of the subdifferential formula is given for the case when the set, the gauge of which specifies the distance function, and the set to which the distance is measured are lower Lebesgue sets of convex functions.

Keywords: distance function, gauge of set, subdifferential, support function, cone of feasible directions.

References

1. Rockafellar R. *Convex analysis.* Princeton, New Jersey Princeton University Press, 1970, 450 p.
2. Pschenichnyi B. N. *Vypukliy analiz i extremalnye zadachi* [*Convex analysis and extremal problems*]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 319 p. (In Russian)
3. Dunham Ch. B. Asymmetric norms and linear approximation. *Congr. Numer.*, 1989, vol. 69, pp. 113–120.
4. Romaguera S., Schellekens M. Quasi-metric properties of complexity spaces. *Topology Appl.*, 1999, vol. 98, no. 1–3, pp. 311–322.
5. De Blasi F. S., Myjak J. On generalized best approximation problem. *J. Approx. Theory*, 1998, vol. 94, no. 1, pp. 54–72.
6. Alegre C. Continuous operators on asymmetric normed spaces. *Acta Math. Hungar.*, 2009, vol. 122, no. 4, pp. 357–372.
7. Cobzas S. *Functional analysis in asymmetric normed spaces.* Basel, Birkhauser Publ., 2013, 219 p.
8. Alimov A. R. *Approksimativno-geometricheskie svoistva mnojestv v normirovannyh i nesimmetricno normirovannyh prostranstvah* [*Approximate-geometric properties of sets in normed and asymmetrically normed spaces*]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Press, 2014, 207 p. (In Russian)

9. Alimov A. R. Vypuklost' ogranichennyh chebyshevskih mnozhestv v konechnomernyh prostranstvah s nesimmetrichnoi normoi [Convexity of bounded Chebyshev sets in finite-dimensional asymmetrically normed spaces]. *Izv. Sarat. University (N. S.), Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics. Journal Profile*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 489–497. (In Russian)

10. Ivanov G. E., Lopushanski M. S. Approksimativnye svoistva slabo vypuklyh mnozhestv v prostranstvah s nesimmetrichnoy polunormoy [Approximate properties of weakly convex sets in spaces with asymmetric seminorm]. *Trudy Mosk. fiz.-tekhnich. in-ta* [*Works of Moscow Institute of Physics and Technology*], 2012, vol. 4, no. 4, pp. 94–104. (In Russian)

11. Ivanov G. E., Lopushanski M. S. Separation theorems for nonconvex sets in space with nonsymmetric seminorm. *J. Mathematical Inequalities and Applications*, 2017, vol. 20, no. 3, pp. 737–754.

12. Demyanov V. F., Vasiliev L. V. *Nedifferentsiruemaia optimizatsia* [*Nondifferentiable optimization*]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 384 p. (In Russian)

13. Demyanov V. F., Rubinov A. V. *Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferencial'noe ischislenie* [*Elements of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus*]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 431 p. (Series Optimization and investigation of operation, iss. 23.) (In Russian)

14. Dudov S. I. Subdifferentsiruemost' i superdifferentsiruemost' funktsii rasstoyania [Subdifferentiability and superdifferentiability of distance functions]. *Math. Notes*, 1997, vol. 61, no. 4, pp. 440–450. (In Russian)

15. Dudov S. I. Differentsiruemost' po napravleniyam funktsii rasstoyania [Directional differentiability of the distance function]. *Mat. Sb.*, 1995, vol. 186, no. 3, pp. 29–52. (In Russian)

16. Gorokhovik V. V. *Konechnomerniye zadachi optimizatsii* [*Finite-dimensional optimization problems*]. Minsk, Belarus. State University Press, 2007, 240 p. (In Russian)

17. Demyanov V. F. Uslovniye proizvodniye i ekzostery v negladkom analize [Conditional derivatives and exhausters in nonsmooth analysis]. *Dokl. of Russian Academy Sciences*, 1999, vol. 338, no. 6, pp. 730–733. (In Russian)

18. Demyanov V. F. Exhausters of positively homogeneous function. *Optimization*, 1999, vol. 45, pp. 13–29.

Received: February 22, 2019.
Accepted: June 06, 2019.

Author's information:

Veronika V. Abramova — Postgraduate Student; Veronika0322@rambler.ru

Sergei I. Dudov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics; DudovSI@info.sgu.ru

Anastasia V. Zharkova — PhD in Physics and Mathematics; ZharkovaAV@gmail.com