АСТРОНОМИЯ

УДК 52-17
MSC 70F15

О локальной нормируемости пространств кеплеровских орбит*

Д. В. Миланов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Миланов Д. В.* О локальной нормируемости пространств кеплеровских орбит // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 505–518. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.314

Геометрические свойства пространств кеплеровских орбит представляют интерес для задач небесной механики, связанных с поиском групп небесных тел, орбиты которых близки между собой. К таким группам относятся семейства астероидов и метеорные потоки, изучение которых дает важные сведения об эволюции Солнечной системы, характеристиках объектов, составляющих семейство, и их родительских тел. Для задач поиска семейств родственных тел наиболее существенны локальные свойства функции расстояния между орбитами, поскольку орбиты членов семейства группируются в небольшой области пространства орбит. В настоящей статье мы рассматриваем несколько метрик на множестве кеплеровских орбит $\mathbb{H}$ и его фактормножествах. Для каждой из этих метрик решается вопрос о том, существует ли нормированное пространство, локально изометричное метрическому пространству орбит. В двух из рассмотренных случаев ответ оказывается положительным: факторпространство $\mathbb{H}$ по отношению эквивалентности, пренебрегающему величиной аргумента перицентра орбиты, изометрично вкладывается в $\mathbb{R}^4$. Вложение в $\mathbb{R}^3$ находится также для факторпространства по двум элементам: долготе восходящего узла и аргументу перицентра. В остальных случаях, как показано в статье, ответ отрицателен. Возможность изометричного вложения пространства орбит или его части в евклидово пространство полезна для приложений к упомянутым задачам небесной механики. С помощью такого отображения естественно определяется среднее семейства орбит: среднее арифметическое образов соответствует орбите с минимальным квадратичным отклонением расстояния от орбит членов семейства.

Ключевые слова: пространство кеплеровских орбит, критерий близости орбит, локальная изометрия, нормируемость, семейство астероидов, метеорный поток, средняя орбита.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-12-00050).

Введение. Со времени открытия Цереры в 1801 году известное нам население Солнечной системы растет экспоненциальными темпами. На сегодняшний день надежно определены орбиты более полумиллиона малых тел. Среди растущего количества известных орбит исследователи стали обнаруживать обособленные группы, получать результаты, свидетельствующие об общем происхождении членов этих групп, определять их возраст и родительские тела. В связи с этим возник вопрос о количественной оценке расстояния между орбитами.

Было предложено немало различных критериев близости орбит, среди которых мы остановимся на вариантах из работ [1] и [2]. Формулы расстояний между орбитами, предложенные в этих статьях, обладают важным качеством: для них выполняются аксиомы метрического пространства. Таким образом, множество орбит становится геометрическим объектом и можно поставить следующий простой вопрос относительно его строения: нельзя ли пространству орбит, с одной из известных метрик, сопоставить векторное пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой, порождающей эту метрику?

Действительно, было бы интересно, если бы с орбитами можно было оперировать как с векторами, и расстояние между двумя орбитами было бы равно величине их «разности». Кроме свежего взгляда на геометрию пространства такая линейная структура придала бы естественный смысл операции определения средней орбиты, часто используемой при изучении групп родственных тел, таких как семейства астероидов и метеорные рои.

Задача о существовании топологических векторных пространств, гомеоморфных пространствам кеплеровских орбит с метриками, предложенными в статьях [3] и [4], рассматривалась в [5]. В работе показано, что пространства орбит, метризованные таким образом, топологически не эквивалентны евклидовым, из чего следует, что их нельзя изометрично отобразить в $\mathbb{R}^5$ с какой-либо нормой.

Однако отсюда не следует невозможность *локальной* нормируемости. В этой статье мы рассматриваем вопрос о существовании нормы, порождающей заданную метрику на пространстве орбит *локально*, в окрестности какой-нибудь точки. Такая постановка задачи не менее интересна как с теоретической, так и с прикладной точек зрения по сравнению с вопросом о возможности «нормировать» пространство орбит целиком. Иллюстрацией здесь может служить пространство $\mathbb{R}^n$ с одной удаленной или добавленной точкой. В силу топологических причин такое пространство не будет нормированным в строгом смысле, однако может содержать обширные плоские участки, как, например, многогранник.

Метрики на пространстве кеплеровских орбит, выбранные нами для анализа, родственны в следующем смысле: расстояние между орбитами определяется как расстояние между парами соответствующих ортогональных векторов. Один из этих векторов сонаправлен с моментом импульса тела, движущегося по орбите, а второй представляет собой вектор Лапласа — Рунге — Ленца. Шесть координат этих векторов, связанные условием ортогональности, отождествляются с точками 5-мерного многообразия, вложенного в $\mathbb{R}^6$. Различие метрик состоит в способе подсчета расстояния между элементами этого пространства.

Метрика ϱ_2, введенная в [1], определяет расстояние между орбитами, как евклидову длину разности двух 6-мерных векторов. Результат, полученный для этого случая (теорема 1), ожидаем: метрика не является внутренней в окрестности любой точки пространства и, следовательно, не порождается какой-либо нормой.

Внутренняя метрика на множестве ограниченных кеплеровских орбит была предложена в статье [2]. Преобразование координат превращает многообразие орбит в конус над $S^2 \times S^2$, внутренняя метрика которого, порожденная евклидовой метрикой в объемлющем пространстве, берется в качестве расстояния между орбитами. Проверка этой метрики также дает отрицательный результат (теорема 4): «конус» орбит не будет «плоским» ни в одной точке.

В работе [1] рассмотрены три факторпространства пространства кеплеровских орбит и предложены формулы для вычисления расстояний между их элементами. Потребность в таких факторпространствах возникает из динамических соображений: аргументы перицентров (ω) и долготы восходящих узлов (Ω) орбит тел Солнечной системы изменяются, как правило, значительно быстрее остальных элементов. Поэтому в задачах поиска семейств небесных тел естественно работать с классами эквивалентности, состоящими из орбит, отличающихся друг от друга лишь этими быстро меняющимися параметрами.

В контексте темы нашей работы, факторпространства орбит примечательны тем, что для двух из них (орбиты классов отождествляются по ω и по обоим параметрам Ω и ω) ответ на вопрос о локальной нормируемости оказывается положительным. Как показано в [6], эти два пространства изометричны подмножествам $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$ с непустой внутренностью. Здесь мы исследуем вопрос для факторпространства по Ω и получаем отрицательный ответ (теорема 2). В дополнение к результатам упомянутой статьи мы указываем подмножество $\mathbb{R}^4$, топологически эквивалентное факторпространству по Ω (теорема 3).

Пространство криволинейных орбит. Рассмотрим материальную точку, движущуюся в центральном поле тяготения. Пусть $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ обозначают радиус-вектор точки и ее скорость в системе координат, связанной с притягивающим центром, $r = |\mathbf{r}|$ и $\varkappa^2$ — гравитационный параметр. Величины

$$\mathbf{K} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{K}}{\varkappa^2} - \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{1}$$

первая из которых называется вектором площадей, а вторая — вектором Лапласа — Рунге — Ленца, остаются постоянными во все время движения.

Векторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{e}$ ортогональны, и если дана пара любых ортогональных векторов, то найдутся начальные условия $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$, при которых величины (1) окажутся равными заданным векторам. Если $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$, то траектория точки будет непрямолинейной, и пара векторов $\mathbf{K}, \mathbf{e}$ будет определять эту кривую однозначно. Вектор площадей задаст плоскость, направление движения и фокальный параметр p орбиты, а вектор Лапласа — Рунге — Ленца укажет направление на ее перицентр и величину эксцентриситета.

Обозначим через $\mathbb{H}$ множество всех непрямолинейных орбит. Метрика, введенная в работе [1], определяет расстояние между орбитами $x, y \in \mathbb{H}$ следующим образом:

$$\varrho_2(x, y) = \sqrt{|\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y|^2 + |\mathbf{v}_x - \mathbf{v}_y|^2}, \tag{2}$$

где $\mathbf{u}_x, \mathbf{v}_x$ и $\mathbf{u}_y, \mathbf{v}_y$ — отвечающие орбитам x и y пары векторов, сонаправленных с $\mathbf{K}$ и $\mathbf{e}$, заданные формулами

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{K}}{\varkappa}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{e}|\mathbf{u}|.$$

Выбор нормировки векторов обусловлен соображениями практической полезности метрики: различия размеров, форм и плоскостей двух орбит вносят сравнимые между собой вклады в расстояние между ними. Примеры применения метрики ϱ_2 к задачам поиска родственных небесных тел можно найти в [1] и [7].

Векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ можно выразить в кеплеровских элементах:

$$\mathbf{u} = \sqrt{p}\begin{pmatrix} \sin i \sin\Omega \\ -\sin i \cos\Omega \\ \cos i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = e\sqrt{p}\begin{pmatrix} \cos\omega\cos\Omega - \cos i \sin\omega \sin\Omega \\ \cos\omega \sin\Omega + \cos i \sin\omega\cos\Omega \\ \sin i \sin\omega \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где e, p, i, ω, Ω — эксцентриситет, фокальный параметр, наклонение, аргумент перицентра и долгота восходящего узла орбиты.

Абсолютные величины $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, как нетрудно вывести из (3), определяются геометрическими параметрами орбиты:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{p}, \quad |\mathbf{v}| = e\sqrt{p}.$$

Таким образом, множество криволинейных кеплеровских орбит рассматривается, как подпространство $\mathbb{R}^6$:

$$\mathbb{H} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \,|\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{uv} = 0\} \tag{4}$$

с евклидовой метрикой.

Следующие леммы показывают, что в окрестности любой точки пространства $\mathbb{H}$ метрика ϱ_2 не является внутренней.

Лемма 1. *Если для различных точек $x = (\mathbf{u}_x, \mathbf{v}_x), y = (\mathbf{u}_y, \mathbf{v}_y), z \in \mathbb{H}$ выполнено*

$$\varrho_2(x, y) = \varrho_2(x, z) + \varrho_2(z, y), \tag{5}$$

то

$$\mathbf{u}_x\mathbf{v}_y + \mathbf{u}_y\mathbf{v}_x = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку ϱ_2 — сужение евклидовой метрики в $\mathbb{R}^6$, равенство (5) может выполняться лишь для $z = (\mathbf{u}_z, \mathbf{v}_z) \in \mathbb{H}$, лежащих внутри отрезка с концами $(\mathbf{u}_x, \mathbf{v}_x)$, $(\mathbf{u}_y, \mathbf{v}_y)$. То есть

$$\mathbf{u}_z = t\mathbf{u}_x + (1-t)\mathbf{u}_y, \quad \mathbf{v}_z = t\mathbf{v}_x + (1-t)\mathbf{v}_y \tag{7}$$

для некоторого $0 < t < 1$. Равенство (6) непосредственно следует из условий (7) и $\mathbf{u}_z\mathbf{v}_z = 0$. ■

Лемма 2. *Для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in \mathbb{H}$ существует такая точка $y \in \mathbb{H}$, что $\varrho_2(x, y) < \varepsilon$ и*

$$\varrho_2(x, y) \neq \varrho_2(x, z) + \varrho_2(z, y)$$

при любом $z \in \mathbb{H}$, отличном от x и y.

Доказательство. Пусть $x = (\mathbf{u}_x, \mathbf{v}_x)$ и $\mathbf{v}_x \neq \mathbf{0}$. Определим точку $y \in \mathbb{H}$ векторами $\mathbf{v}_y = (1+\delta)R_\varphi\mathbf{v}_x$, и $\mathbf{u}_y = R_\varphi\mathbf{u}_x$, где δ — положительное число, а R_φ — поворот на угол $0 < \varphi < \pi/2$ около нуля в плоскости, содержащей $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{v}_x$. Тогда

$$|\mathbf{u}_x\mathbf{v}_y + \mathbf{u}_y\mathbf{v}_x| = \delta|\mathbf{u}_x||\mathbf{v}_x|\sin\varphi \tag{8}$$

и
$$(\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y)^2 + (\mathbf{v}_x - \mathbf{v}_y)^2 = 2\mathbf{u}_x^2(1-\cos\varphi) + \mathbf{v}_x^2(2(1-\cos\varphi)(1+\delta)+\delta^2). \qquad (9)$$
При малых δ и φ правая часть (9) становится меньше заданного ε, а правая часть (8) отлична от нуля. Таким образом, $\mathbf{u}_y, \mathbf{v}_y$ определяют точку $y \in \mathbb{H}$ в ε-окрестности x, для которой равенство (6) не выполняется, а следовательно не выполняется и (5) ни при каком z.

В случае $\mathbf{v}_x = \mathbf{0}$ точка y находится аналогичным рассуждением, если положить $\mathbf{v}_y$ равным произвольному вектору длины δ, ортогональному $\mathbf{u}_y$. ■

Несложное рассуждение ниже показывает, что метрика нормированного пространства V всегда внутренняя и поэтому изометрии между $\mathbb{H}$ и V быть не может.

Теорема 1. *Пространство $\mathbb{H}$ с метрикой ϱ_2 локально не изометрично пространству с нормой ни в одной точке.*

Доказательство. В нормированном пространстве $(V, ||\cdot||)$ для любых двух точек x, y и точки $z = tx + (1-t)y$, $0 < t < 1$, справедливо
$$||x-y|| = (1-t)||x-y|| + t||x-y|| = ||x-z|| + ||z-y||.$$
Значит, локальная изометрия невозможна ни в одной точке в силу леммы 2. ■

Из определения (4) следует, что топология $\mathbb{H}$, индуцированная метрикой ϱ_2, евклидова в окрестности каждой точки. Однако целиком $\mathbb{H}$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^5$. Ретракция $\mathbb{H}$ на сферу $S^2 \times \{\mathbf{0}\}$, заданная отображением $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{u}/|\mathbf{u}|, \mathbf{0})$, гомотопна тождественному отображению:
$$H(\mathbf{u},\mathbf{v},t) = \left(\left(1 - \left(1 - \frac{1}{|\mathbf{u}|}\right)t\right)\mathbf{u}, (1-t)\mathbf{v}\right).$$
Следовательно, $\mathbb{H}$ гомотопически эквивалентно двумерной сфере и не гомеоморфно евклидову пространству.

Факторпространства $\mathbb{H}$. При сравнении орбит тел Солнечной системы на длительном промежутке времени необходимо принимать в расчет изменения параметров орбит, вызванные возмущающим действием планет. Скорости изменения элементов орбит неодинаковы, быстрее всего меняются аргумент перицентра ω и долгота восходящего узла Ω. Формальными конструкциями, учитывающими «подвижность» двух кеплеровских элементов, становятся три факторпространства $\mathbb{H}$ по отношениям эквивалентности, отождествляющим орбиты, различающиеся лишь аргументом перицентра (пространство $\mathbb{H}/\omega$), долготой восходящего узла ($\mathbb{H}/\Omega$) или обоими параметрами ($\mathbb{H}/(\Omega,\omega)$).

В терминах векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ множества $\mathbb{H}/\omega$ и $\mathbb{H}/\Omega$ определяются как факторпространства по действию группы вращений плоскости. В первом случае преобразование поворачивает вектор $\mathbf{v}$ в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{u}$, а во втором — оба вектора вокруг оси, перпендикулярной базовой плоскости. Пространство $\mathbb{H}/(\Omega,\omega)$ — факторпространство по произведению этих двух групп преобразований.

Отметим, что определение эквивалентности по Ω и паре элементов (Ω,ω) зависит от выбора системы координат. Кроме того, $\mathbb{H}/\Omega$ — единственное из трех факторпространств, полученное действием группы изометрий: поворот вектора $\mathbf{v}$ расстояние ϱ_2 не сохраняет.

Расстояния в факторпространствах $\mathbb{H}/*$ можно определить формулой

$$\varrho_*(X,Y) = \min_{x\in X, y\in Y} \varrho_2(x,y), \tag{10}$$

где $*$ обозначает одно из трех отношений эквивалентности: ω, Ω или (ω, Ω). В работах [1] и [6] показано, что в каждом из трех факторпространств для функции (10) справедливо неравенство треугольника.

Пространства $\mathbb{H}/\omega$ и $\mathbb{H}/(\Omega,\omega)$. Средние орбиты. Ответ на вопрос о существовании точек с окрестностями, локально изометричными нормированному пространству, положителен для $\mathbb{H}/\omega$ и $\mathbb{H}/(\Omega,\omega)$. В [6] показано, что эти пространства изометричны подмножествам $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$ с непустой внутренностью.

Приведем явный вид отображений, реализующих вложения:

$$f_\omega(X(\mathbf{u},\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, |\mathbf{v}|)\,, \tag{11}$$

$$f_{\Omega,\omega}(Y(\mathbf{u},\mathbf{v})) = \left(u^3, \sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}, |\mathbf{v}|\right), \tag{12}$$

где $X(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $Y(\mathbf{u},\mathbf{v})$ — классы эквивалентности элемента $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ в $\mathbb{H}/\omega$ и $\mathbb{H}/(\Omega,\omega)$ соответственно; u^1, u^2, u^3 — абсцисса, ордината и аппликата вектора $\mathbf{u}$.

Вложения (11) и (12) пространств орбит в евклидовы дают естественное определение среднего некоторого семейства орбит. Задача усреднения орбит возникает в исследованиях групп небесных тел, предположительно имеющих общее происхождение, таких как семейства астероидов и метеорные рои.

Пусть n орбит семейства известны и заданы своими элементами (p_j, e_j, i_j, Ω_j, ω_j), $j=1,\dots,n$. Обозначим через $(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j)$ векторы, вычисленные по формулам (3), а через X_j и Y_j — классы эквивалентности j-й орбиты в пространствах $\mathbb{H}/\omega$ и $\mathbb{H}/(\Omega,\omega)$ соответственно.

Формулы (11) и (12) позволяют определить средние X_m и Y_m выборок $\{X_j\}$ и $\{Y_j\}$, как средние арифметические векторов в евклидовых пространствах. За исключением случая $\sum \mathbf{u}_j = 0$, маловероятного в задаче поиска семейства тел с близкими орбитами, уравнение

$$f_\omega(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{u}_i, |\mathbf{v}_i|) \tag{13}$$

имеет единственное решение $X = X_m$.

Аналогичное уравнение в пространстве $\mathbb{H}/(\Omega,\omega)$

$$f_{\Omega,\omega}(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(u_i^3, \sqrt{(u_i^1)^2+(u_i^2)^2}, |\mathbf{v}_i|\right) \tag{14}$$

имеет решение $Y = Y_m$, если проекция одного из векторов $\mathbf{u}_i$ на базовую плоскость ненулевая, либо $\sum u_i^3 \neq 0$.

Используя равенства (3), выразим кеплеровские элементы p_m, e_m, i_m, Ω_m орбит класса X_m через элементы орбит членов семейства:

$$p_m = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j + 2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \sqrt{p_j p_k}\cos I_{jk}\right), \tag{15}$$

$$e_m = \frac{1}{n\sqrt{p_m}} \sum_{j=i}^{n} e_i \sqrt{p_i}, \tag{16}$$

$$\cos i_m = \frac{1}{n\sqrt{p_m}} \sum_{j=i}^{n} \sqrt{p_i} \cos i_j, \tag{17}$$

$$(\sin\Omega_m,\, \cos\Omega_m) = \frac{1}{n\sqrt{p_m}\sin i_m} \sum_{j=i}^{n} \sqrt{p_i} \sin i_j \left(\sin\Omega_j,\, \cos\Omega_j\right), \tag{18}$$

где I_{jk} — взаимный наклон ориентированных орбит:

$$\cos I_{jk} = \cos i_j \cos i_k + \sin i_j \sin i_k \cos\left(\Omega_j - \Omega_k\right). \tag{19}$$

В случае $\sin i_m = 0$ долгота восходящего узла Ω_m не определена.

Решение $Y_m \in \mathbb{H}/(\Omega,\omega)$ уравнения (14) вычисляется по тем же формулам (15)–(17), но с другим значением I_{jk}:

$$I_{jk} = i_j - i_k. \tag{20}$$

Характеристическое свойство класса орбит, элементы которого находятся по формулам (15)–(18), состоит в минимальности квадратичного отклонения этого класса от классов орбит членов семейства в метриках ϱ_ω и $\varrho_{\Omega,\omega}$.

Величины

$$R_\omega = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \varrho_\omega^2(X_i, X_m) \quad \text{и} \quad R_{\Omega,\omega} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \varrho_{\Omega,\omega}^2(Y_i, Y_m) \tag{21}$$

дают удобные численные характеристики рассеяния орбит семейства. R_ω и $R_{\Omega,\omega}$ представляют собой оценки следов матриц ковариаций образов орбит при отображениях f_ω и $f_{\Omega,\omega}$. В кеплеровских элементах R_ω и $R_{\Omega,\omega}$ выражаются одинаково:

$$R = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} p_i(1+e_i^2) - \frac{n}{n-1} p_m(1+e_m^2), \tag{22}$$

но значения их различны, поскольку элементы p_m и e_m по-разному вычисляются в $\mathbb{H}/\omega$ и $\mathbb{H}/(\Omega,\omega)$.

Пространство $\mathbb{H}/\Omega$. Ниже мы доказываем, что в отличие от пространств, рассмотренных в предыдущем параграфе, $\mathbb{H}/\Omega$ не может быть вложено в $\mathbb{R}^4$. Метрика ϱ_Ω, как и метрика ϱ_2, не является внутренней, следовательно $\mathbb{H}/\Omega$ локально не изометрично нормированному пространству. А поскольку это пространство — топологическое многообразие размерности 4 (см. теорему 3 ниже), не существует и изометрии на подмножество $\mathbb{R}^4$.

Лемма 3. *Для любых $X, Y \in \mathbb{H}/\Omega$ и $y_0 \in Y$*

$$\varrho_\Omega(X,Y) = \min_{x\in X} \varrho_2(x, y_0).$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$. Все члены класса X получаются поворотами x_0 вокруг оси z. То же верно для Y и y_0. По определению метрики ϱ_2 поворот вокруг оси аппликат есть изометрия $\mathbb{H}$ на себя. Следовательно,

$$\varrho_\Omega(X,Y) = \min_{x\in X, y\in Y} \varrho_2(x,y) = \min_{\phi,\psi} \varrho_2(R_\phi x_0, R_\psi y_0) =$$

$$= \min_{\phi,\psi} \varrho_2(R_\psi^{-1} R_\phi x_0, y_0) = \min_{x\in X} \varrho_2(x, y_0),$$

где R_ϕ и R_ψ обозначают повороты на углы $\phi, \psi \in [0, 2\pi)$. ■

Лемма 4. *В любом открытом множестве $U \subset \mathbb{H}/\Omega$ найдется пара точек X и Y таких, что*

$$\varrho_\Omega(X,Y) \neq \varrho_\Omega(X,Z) + \varrho_\Omega(Z,Y)$$

при любом $Z \in \mathbb{H}/\Omega$, отличном от X и Y.

Доказательство. Пусть $X \in U$. Рассмотрим ортогональные векторы $(\mathbf{u}_x, \mathbf{v}_x) \in \mathbb{R}^6$, соответствующие некоторой точке $x \in X$. Аппликаты u_x^3 и v_x^3 векторов $\mathbf{u}_x$ и $\mathbf{v}_x$ не зависят от выбора представителя x. Пользуясь открытостью множества U, подкорректируем, в случае необходимости, выбор X так, чтобы u_x^3 и v_x^3 были отличны от нуля.

Фиксируем некоторое $0 < \delta < |u_x^3|$ и определим отображение $f : X \to \mathbb{H}$. Для $x = (\mathbf{u}_x, \mathbf{v}_x) \in X$ зададим $y = (\mathbf{u}_y, \mathbf{v}_y) = f(x)$:

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_\delta, \quad \mathbf{v}_y = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_\delta,$$

где

$$\mathbf{u}_\delta = (0,0,\delta), \quad \mathbf{v}_\delta = (0,0,\delta_1), \quad \delta_1 = -\frac{v_x^3\delta}{u_x^3+\delta}.$$

Несложно проверить, что $\mathbf{u}_y\mathbf{v}_y = 0$, т. е. векторы $\mathbf{u}_y, \mathbf{v}_y$ определяют орбиту $y \in \mathbb{H}$.

Положим $Y = f(X)$. Y — элемент $\mathbb{H}/\Omega$, поскольку любые $y_1, y_2 \in Y$ можно совместить тем же вращением, которое совмещает $f^{-1}(y_1)$ с $f^{-1}(y_2)$.

Для $x \in X$ и $y \in Y$ равенство $\varrho_\Omega(X,Y) = \varrho_2(x,y)$ выполняется тогда и только тогда, когда $y = f(x)$. Действительно, обозначая через P оператор проекции на базовую плоскость, запишем

$$\varrho_\Omega^2(X,Y) = \min_{x,y} \varrho_2^2(x,y) = \min_{x,y} \left\{\delta^2 + \delta_1^2 + (P\mathbf{u}_x - P\mathbf{u}_y)^2 + (P\mathbf{v}_x - P\mathbf{v}_y)^2\right\} = \delta^2 + \delta_1^2.$$

Минимум достигается лишь при равенстве проекций, то есть при $y = f(x)$.

Вычислив левую часть (6),

$$\mathbf{u}_x\mathbf{v}_y + \mathbf{u}_y\mathbf{v}_x = \frac{v_x^3\delta^2}{u_x^3+\delta} \neq 0,$$

можно убедиться, что ни одна точка $z \in \mathbb{H}$ не лежит между x и $y = f(x)$:

$$\varrho_2(x,y) \neq \varrho_2(x,z) + \varrho_2(z,y). \tag{23}$$

Для завершения построения Y выберем δ настолько малым, чтобы $Y \in U$.

Пусть $Z \in \mathbb{H}/\Omega$, $Z \neq X, Y$. В силу (23) имеем

$$\varrho_\Omega(X,Y) \neq \varrho_2(x,z) + \varrho_2(z,y)$$

при любых $x \in X$, $y \in Y$ и $z \in Z$. Следовательно, учитывая лемму 3,

$$\varrho_\Omega(X,Y) \neq \min_{x\in X} \varrho_2(x,z) + \min_{y\in Y} \varrho_2(z,y) = \varrho_\Omega(X,Z) + \varrho_\Omega(Z,Y).$$

■

Аналогично теореме 1 выводится следующая теорема.

Теорема 2. *Пространство* $\mathbb{H}/\Omega$ *с метрикой* ϱ_Ω *локально не изометрично пространству с нормой ни в одной точке.*

Дополним отрицательный результат теоремы 2 описанием $\mathbb{H}/\Omega$ с точностью до топологических преобразований: пространство $\mathbb{H}/\Omega$ эквивалентно $\mathbb{R}^4$, из которого удалена замкнутая двумерная полуплоскость. «Разрез» $\mathbb{R}^4$ обусловлен требованием $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Теорема 3. *Пространство* $\mathbb{H}/\Omega$ *гомеоморфно* $\mathbb{R}^4 \setminus ([0,+\infty) \times \mathbb{R})$.

Доказательство. Определим отображение $f : \mathbb{H}/\Omega \to \mathbb{R}^4$. Пусть $X \in \mathbb{H}/\Omega$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ — векторы, соответствующие некоторому представителю X, $\mathbf{a} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$, $\mathbf{b} = \mathbf{v}-\mathbf{u}$. Положим

$$f(X) = |\mathbf{a}| \begin{pmatrix} \sin\Theta_\mathbf{a} \sin\Theta_\mathbf{b} \sin\Delta\varphi \\ \sin\Theta_\mathbf{a} \sin\Theta_\mathbf{b} \cos\Delta\varphi \\ \cos\Theta_\mathbf{a} \sin\Theta_\mathbf{b} \\ \cos\Theta_\mathbf{b} \end{pmatrix},$$

где $\Theta_\mathbf{a}$ и $\Theta_\mathbf{b}$ — зенитные углы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а $\Delta\varphi$ — разность их азимутов $\varphi_\mathbf{a}$ и $\varphi_\mathbf{b}$, измеренная следующим образом:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \varphi_\mathbf{a} - \varphi_\mathbf{b}, & \varphi_\mathbf{a} \geqslant \varphi_\mathbf{b} \\ 2\pi + \varphi_\mathbf{a} - \varphi_\mathbf{b}, & \varphi_\mathbf{a} < \varphi_\mathbf{b}. \end{cases}$$

Отображение f определено корректно, поскольку величины $|\mathbf{a}|, \Theta_\mathbf{a}, \Theta_\mathbf{b}$ и $\Delta\varphi$ совпадают у всех элементов класса $X \in \mathbb{H}/\Omega$.

Условие $\mathbf{uv} = 0$ эквивалентно равенству абсолютных величин $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Учитывая, что гиперсферические координаты определены однозначно, с точностью до значения $\Delta\varphi$ на полюсах, заключаем, что f обратимо.

Сходимость в метрике ϱ_Ω равносильна покоординатной сходимости векторов $(|\mathbf{a}|, \Theta_\mathbf{a}, \Theta_\mathbf{b}, \Delta\varphi)$ в случае, когда предельная точка находится внутри области определения координат. На границах $\Theta_\mathbf{a} = 0, \pi$ и $\Theta_\mathbf{b} = 0, \pi$ сходимость в ϱ_Ω эквивалентна сходимости $(|\mathbf{a}|, \Theta_\mathbf{a}, \Theta_\mathbf{b})$. Наконец, если $\Delta\varphi = 0$ в предельной точке, то для сходимости в ϱ_Ω необходима и достаточна сходимость $(|\mathbf{a}|, \Theta_\mathbf{a}, \Theta_\mathbf{b}, \min\{\Delta\varphi, 2\pi - \Delta\varphi\})$.

Таким образом, f — вложение $\mathbb{H}/\Omega$ в $\mathbb{R}^4$, сюръективность которого нарушается лишь условием $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Для сферических координат точки из $\mathbb{R}^4 \setminus f(\mathbb{H}/\Omega)$ будет выполнено одно из двух условий: $|\mathbf{a}| = 0$ или $\Delta\varphi = 0, \Theta_\mathbf{a} = \Theta_\mathbf{b}$. Обозначив через Θ общий полярный угол, вычислим декартовы координаты множества:

$$r \begin{pmatrix} 0 \\ \sin^2\Theta \\ \cos\Theta\sin\Theta \\ \cos\Theta \end{pmatrix},$$

где $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \Theta \leqslant \pi$. Эту поверхность можно перевести в замкнутую полуплоскость преобразованием третьей координаты $z' = z - t \operatorname{sign} y \sqrt{|y|}$, где y и t — вторая и четвертая координаты. ■

Внутренняя метрика на множестве ограниченных орбит. Вернемся к пространству орбит, точнее к его подмножеству, состоящему из ограниченных орбит. На этот раз мы не будем исключать из рассмотрения прямолинейные траектории и обозначим множество всех кеплеровских орбит с отрицательной энергией через $\mathbb{V}_-$.

Опишем конструкцию внутренней метрики на многообразии $\mathbb{V}_-$, приведенную в [2]. Вектор углового момента (1) преобразуем следующим образом:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{K}}{\varkappa\sqrt{a}},$$

где a — величина большой полуоси орбиты.

Введем векторы $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{e} + \mathbf{h}, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{e} - \mathbf{h}.$$

Абсолютные величины $\mathbf{h}$ и $\mathbf{e}$ определяются эксцентриситетом орбиты e:

$$|\mathbf{h}| = \sqrt{1 - e^2}, \quad |\mathbf{e}| = e.$$

Нетрудно проверить, что условие ортогональности $\mathbf{h}$ и $\mathbf{e}$ эквивалентно равенствам

$$\boldsymbol{\eta}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\xi}^2 = 1.$$

Таким образом, в координатах $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}$ множество орбит с фиксированной большой полуосью (и следовательно энергией) принимает вид прямого произведения двух двумерных сфер. Построение завершается введением еще одной координаты, равной значению большой полуоси, отвечающей за радиусы пары сфер:

$$\mathbb{V}_- = \{a\,(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \,|\, a > 0,\, \boldsymbol{\eta}^2 = 1,\, \boldsymbol{\xi}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^6. \tag{24}$$

Равенство (24) отождествляет пространство ограниченных орбит с конусом в $\mathbb{R}^6$, построенным на основании $S^2 \times S^2$. Расстояние между орбитами определяется, как внутренняя метрика конуса, индуцированная евклидовым расстоянием в $\mathbb{R}^6$. Значение метрики d на паре $x = (a_1, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\xi}_1)$, $y = (a_2, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\xi}_2)$ элементов $\mathbb{V}_-$ вычислено в [2] в явном виде:

$$d(x, y) = \sqrt{2(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos\psi)}, \tag{25}$$

где

$$\psi = \sqrt{\frac{\arccos^2 \boldsymbol{\eta}_1\boldsymbol{\eta}_2 + \arccos^2 \boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_2}{2}}.$$

Вложение (24) гладко, поэтому d — риманова метрика на $\mathbb{V}_-$. Покажем, что среди нормированных пространств лишь евклидово может быть локально изометрично многообразию M с римановой метрикой d.

Пусть $p \in M$, и $I : U_p \to X$ — изометрия окрестности U_p точки p в нормированное пространство $(X, ||\cdot||)$ такая, что $I(p) = 0$. Тогда в некоторой окрестности нуля касательного пространства T_pM изометрией будет и отображение $F = I \circ \exp_p : T_pM \to X$, где $\exp_p : T_pM \to M$ — экспоненциальное отображение. Действительно, если $u, v \in T_pM$, то существует $\lambda_0 > 0$ такое, что кривые $\exp_p(\lambda u)$ и $\exp_p(\lambda v)$, $0 < \lambda < \lambda_0$, представляют собой геодезические, параметризованные своими длинами $\lambda|u|$ и $\lambda|v|$. В силу локальной единственности геодезических и изометричности I заключаем, что $F\lambda u = \lambda F u$, $F\lambda v = \lambda F v$, и

$$d(\exp_p \lambda u, \exp_p \lambda v) = ||F\lambda u - F\lambda v|| = \lambda ||Fu - Fv|| = \lambda d(\exp_p u, \exp_p v).$$

Поскольку d — риманова метрика, должно выполняться (см. [8, п. 19.5.1])

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{d(\exp_p \lambda u, \exp_p \lambda v)}{|\lambda u - \lambda v|} = 1,$$

где $|\lambda u - \lambda v|$ — евклидово расстояние между векторами. Следовательно,

$$||Fu - Fv|| = d(\exp_p u, \exp_p v) = |u - v|.$$

Теорему о «ненормируемости» $\mathbb{V}_-$ можно теперь сформулировать в терминах евклидовых пространств.

Теорема 4. *Пространство $\mathbb{V}_-$ с метрикой d локально не изометрично евклидову пространству ни в одной точке.*

Доказательство. Предположим, что найдется шар B с центром в точке $x_0 = (a_0, \boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\xi}_0) \in \mathbb{V}_-$, изометричный шару в $\mathbb{R}^5$. Повороты сфер в основании конуса $K(S^2 \times S^2)$ сохраняют расстояние d, поэтому можно считать, что $1 > \boldsymbol{\eta}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}_0 > 1 - \varepsilon$ для любого заданного $\varepsilon > 0$.

Заметим, что подпространство

$$V = \{(a, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \,|\, a > 0, \boldsymbol{\xi} \in S^2\} \subset \mathbb{V}_-$$

изометрично $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Найдем в V точку $x_1 = (a_1, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1)$, ближайшую к x_0. Из формулы (25) заключаем, что вектор $\boldsymbol{\xi}_1$ будет указывать на середину дуги $(\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\xi}_0)$, а значение a_1 находится из условия прямоугольности треугольника со сторонами a_0, a_1 и углом $\arccos \boldsymbol{\xi}_0 \boldsymbol{\xi}_1$:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\eta}_0}{\sqrt{2(1 + \boldsymbol{\xi}_0 \boldsymbol{\eta}_0)}}, \quad a_1 = a_0 \boldsymbol{\xi}_0 \boldsymbol{\xi}_1 = a_0 \sqrt{\frac{1 + \boldsymbol{\xi}_0 \boldsymbol{\eta}_0}{2}}.$$

Положим $x_2 = (a_0, \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0) \in V$ и вычислим стороны треугольника $\triangle x_0 x_1 x_2$ по формуле (25):

$$d^2(x_0, x_2) = 4a_0^2(1 - \cos\frac{\psi}{\sqrt{2}}), \quad d^2(x_1, x_2) = d^2(x_0, x_1) = a_0^2(1 - \cos\psi),$$

где $\psi = \arccos \boldsymbol{\xi}_0 \boldsymbol{\eta}_0$.

Зададим ε, введенное выше, настолько малым, чтобы x_1 и x_2 попали в B. Пусть I — изометрия B в $\mathbb{R}^5$. Рассмотрим треугольник T в $\mathbb{R}^5$ с вершинами в образах точек x_0, x_1 и x_2. Угол при вершине $I(x_1)$ прямой, так как $I(x_1)$ — ближайшая к $I(x_0)$ внутренняя точка выпуклого множества $I(V \cap B)$. Теорема Пифагора, записанная для треугольника T, приводит к равенству

$$\cos\frac{\psi}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \cos\psi}{2},$$

неверному для малых положительных значений ψ. ■

Заключение. Мы исследовали вопрос о существовании локальных изометрий пространств кеплеровских орбит в пространство с нормой. Получены следующие результаты.

Для пространства $\mathbb{H}$ криволинейных орбит с метрикой ϱ_2, определяемой равенством (2), получен отрицательный ответ: метрика ϱ_2 не является внутренней ни в одной точке и, следовательно, не может быть порождена нормой (теорема 1).

Для двух факторпространств $\mathbb{H}$, состоящих из классов орбит, отличающихся лишь значением аргумента перицентра ($\mathbb{H}/\omega$) или значениями аргумента перицентра и долготы восходящего узла ($\mathbb{H}/(\Omega, \omega)$), локальные изометрии существуют. Более того, пространства изометрично вкладываются (см. (11), (12)) в $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Вложения дают естественный способ определить среднее семейства орбит, как среднее арифметическое соответствующих векторов евклидова пространства. Вектор, вычисленный таким способом, определяет класс орбит в $\mathbb{H}/\omega$ и $\mathbb{H}/(\Omega, \omega)$, минимизирующий квадратичное отклонение от классов орбит членов семейства в метриках ϱ_ω и $\varrho_{(\Omega,\omega)}$. Кеплеровы элементы средних орбит вычисляются по формулам (15)–(20). Формула (22) дает численную характеристику рассеяния орбит семейства.

Метрика ϱ_Ω в факторпространстве $\mathbb{H}/\Omega$, орбиты классов которого отличаются лишь значением долготы восходящего узла, как и метрика ϱ_2 не является внутренней (теорема 2). Пространство $\mathbb{H}/\Omega$ топологически эквивалентно $\mathbb{R}^4$ без замкнутой полуплоскости (теорема 3).

Внутренняя метрика d, индуцированная евклидовой на многообразии ограниченных орбит (24), не является плоской ни в одной точке (теорема 4).

Благодарности. Мы благодарим профессора К. В. Холшевникова за постановку задачи и ценные замечания.

Литература

1. *Kholshevnikov K. V., Kokhirova G. I., Babadzhanov P. B., Khamroev U. H.* Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2016. Vol. 462. Issue 2. P. 2275–2283.

2. *Maruskin J. M.* Distance in the space of energetically bounded Keplerian orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2010. Vol. 108. Issue 3. P. 265–274. https://doi.org/10.1007/s10569-010-9300-8

3. *Kholshevnikov K. V.* Metric spaces of Keplerian orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2008. Vol. 100. Issue 3. P. 169–179. https://doi.org/10.1007/s10569-007-9110-9

4. *Kholshevnikov K. V., Vassiliev N. N.* Natural metrics in the spaces of elliptic orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2004. Vol. 89. Issue 2. P. 119–125. https://doi.org/10.1023/B:CELE.0000034504.41897.ac

5. *Todorov D. I.* Non-normability of spaces of keplerian orbits // arXiv preprint arXiv:1210.6203. 2012.

6. *Milanov D. V.* Metrics in Keplerian orbits quotient spaces // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2018. Vol. 130. Issue 3. Article no. 27. https://doi.org/10.1007/s10569-018-9820-1

7. *Холшевников К. В., Щепалова А. С.* О расстояниях между орбитами планет и астероидов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5(63). Вып. 3. С. 509–523. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.314.

8. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Введение в риманову геометрию. СПб.: Наука, 1994.

Статья поступила в редакцию 15 февраля 2019 г.;
после доработки 19 марта 2019 г.;
рекомендована в печать 21 марта 2019 г.

Контактная информация:

Миланов Данила Владимирович — аспирант; danila.milanov@gmail.com

On local normability of spaces of Keplerian orbits*

D. V. Milanov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Milanov D. V. On local normability of spaces of Keplerian orbits. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 3, pp. 505–518. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.314 (In Russian)

Geometric properties of spaces of Keplerian orbits are of interest for problems of Celestial Mechanics related with the search of groups of celestial bodies whose orbits are close to each other. Those groups include asteroid families and meteoroid streams. Their study brings an important information about the evolution of the solar system, characteristics of a family members and their parent bodies. The local properties of a distance function between orbits are of main importance for the problems of search of families of genetically related celestial bodies, because orbits of a family members cluster together in a small region of the orbits space. In this article we consider several metrics on the set of Keplerian orbits $\mathbb{H}$ and its quotient spaces. For each of these metrics we solve the question: does there exist a normed space locally isometric to the orbits metric space? In two of considered cases, the answer turns out to be positive: the quotient space of $\mathbb{H}$ by the equivalence relation, neglecting the magnitude of pericentre argument of the orbit, can be isometrically embedded into $\mathbb{R}^4$. The embedding into $\mathbb{R}^3$ also exists for the quotient space by the pair of elements: the longitude of ascending node and the pericentre argument. It is shown in the article, that the answer to the stated question is negative for other metrics we considered. The possibility of an isometric embedding of orbits space or of its part into Euclidean space is useful in application to aforementioned problems of Celestial Mechanics. The isometric map helps to define the mean of orbits family in a natural way: the arithmetic mean of

*The work is supported by Russian Science Foundation (grant N 18-12-00050).

images corresponds to the orbit with the minimal square deviation of distances from orbits of the family.

Keywords: space of Keplerian orbits, orbital similarity criterion, local isometry, normability, asteroid family, meteor stream, mean orbit.

References

1. Kholshevnikov K. V., Kokhirova G. I., Babadzhanov P. B., Khamroev U. H., "Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **462**, issue 2, 2275–2283 (2016).

2. Maruskin J. M., "Distance in the space of energetically bounded Keplerian orbits", *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **108**, issue 3, 265–274 (2010). https://doi.org/10.1007/s10569-010-9300-8

3. Kholshevnikov K. V., "Metric spaces of Keplerian orbits", *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **100**, issue 3, 169–179 (2008). https://doi.org/10.1007/s10569-007-9110-9

4. Kholshevnikov K. V., Vassiliev N. N., "Natural metrics in the spaces of elliptic orbits", *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **89**, issue 2, 119–125 (2004). https://doi.org/10.1023/B:CELE.0000034504.41897.ac

5. Todorov D. I., "Non-normability of spaces of keplerian orbits", arXiv preprint arXiv:1210.6203 (2012).

6. Milanov D. V., "Metrics in Keplerian orbits quotient spaces", *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **130**, issue 3, 27 (2018). https://doi.org/10.1007/s10569-018-9820-1

7. Kholshevnikov K. V., Shchepalova A. S., "On distances between orbits of planets and asteroids", *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **51**, issue 3, 305–316 (2018). https://doi/org/10.3103/S1063454118030044

8. Burago Yu. D., Zalgaller V. A. *Introduction to Riemannian geometry* (Nauka Publ., St. Petersburg, 1994). (In Russian)

Received: February 15, 2019
Revised: March 19, 2019
Accepted: March 21, 2019

Author's information:

Danila V. Milanov — danila.milanov@gmail.com