УДК 519.612 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3
MSC 65F10

Доказательство корректности одного из алгоритмов, улучшающего оценку скорости сходимости метода Зейделя

А. Н. Борзых

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Борзых А. Н.* Доказательство корректности одного из алгоритмов, улучшающего оценку скорости сходимости метода Зейделя // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 399–410. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.305

Статья посвящается методу Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений $x = Ax + f$. Статья продолжает прошлую работу автора, в которой был предложен один из алгоритмов для получения оценки скорости сходимости метода Зейделя. Представляется более развернутое доказательство корректности предложенного алгоритма. Получаемая алгоритмом оценка несколько лучше оценки, известной из монографии Фаддеева Д. К., Фаддеевой В. Н. «Вычислительные методы линейной алгебры», однако для ее получения требуется отдельный итерационный процесс. Показывается, что предлагаемый итерационный процесс имеет как минимум линейную скорость сходимости, в которой один шаг процесса требует порядка $O(n)$ операций, а скорость сходимости может быть оценена неравенством $|\mu(A_{k+1}) - \mu^*| < C|\mu(A_k) - \mu^*|$, где $C = 1 - \frac{m^5}{12}$, m — наименьший по модулю элемент матрицы A, μ^* — предельное значение итерационного процесса (наилучшая оценка скорости сходимости метода Зейделя), $\mu(A_k)$ и $\mu(A_{k+1})$ — оценки, получаемые соответственно на шагах k и $k+1$ в данном итерационном процессе.

Ключевые слова: метод Зейделя, одношаговый циклический процесс, СЛАУ, система линейных алгебраических уравнений, итерационные методы решения, сходимость метода Зейделя, оценка скорости сходимости метода Зейделя.

1. Введение. В работе [1] был предложен алгоритм, позволяющий получать более хорошую оценку скорости сходимости, чем оценка, описанная в [2]. Доказательство сходимости предложенного алгоритма было представлено «схематично». В данной работе представим более подробное доказательство. Используем обозначения, терминологию и нумерацию утверждений из [1].

2. Доказательство сходимости.

Лемма 1 (о собственных векторах матрицы с неотрицательными элементами). *Пусть A — матрица с неотрицательными элементами (используем обозначение $A \rhd 0$) и она неразложима (для этого достаточно отсутствия нулевых элементов). Если λ — наибольшее по модулю собственное число, то оно вещественное, имеет кратность 1 и ему соответствует собственный вектор, элементы которого имеют одинаковые знаки; если λ — иное собственное значение, то* *ему соответствует собственный вектор, элементы которого имеют различные знаки.*

Доказательство. Первая часть леммы 1 является теоремой Перрона — Фробениуса (см., например, [3]). Докажем, что если λ не является наибольшим по модулю собственным числом, то у соответствующего собственного вектора имеются различные по знаку элементы. Предположим противное: λ — не наибольшее по модулю собственное число и у соответствующего собственного вектора x все элементы имеют одинаковый знак, например, все элементы положительные.

Из [3] известно, для максимального по модулю собственного числа $\lambda_{\max}$ матрицы с неотрицательными элементами справедлива оценка

$$\min_{1\le i\le n}\frac{1}{d_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}d_j\le\lambda_{\max}\le\max_{1\le i\le n}\frac{1}{d_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}d_j,$$

где $d=(d_1,\ldots,d_n)$, $d_i>0$, — любой вектор с положительными элементами.

Возьмем в качестве d вектор x. Поскольку это собственный вектор, то

$$\forall i\quad\sum_{j=1}^{n}a_{ij}d_j=\lambda d_i.$$

Тогда $\min\limits_{1\le i\le n}\frac{1}{d_i}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}d_j=\max\limits_{1\le i\le n}\frac{1}{d_i}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}d_j=\lambda$ и получаем оценку $\lambda\le\lambda_{\max}\le\lambda$, что дает $\lambda=\lambda_{\max}$. Это противоречит предположению о том, что λ — не наибольшее по модулю собственное число. *Доказано.* □

Лемма 2 (об увеличении наибольшего собственного числа матрицы с неотрицательными элементами). *Если $A\rhd 0$, $B\rhd 0$, то $\lambda_{\max}(A+B)>\lambda_{\max}(A)$.*

Лемма известна из [3].

Утверждение 3 (необходимое условие оптимальной матрицы $\tilde{A}$). *Если $\mu(\tilde{A})$ минимально (т. е. $\tilde{A}$ оптимальная), то $\forall i,j$ $\mu_i(\tilde{A})=\mu_j(\tilde{A})$.*

Доказательство. Пусть матрица $\tilde{A}$ оптимальная. Предположим, что $\exists i,j:$ $\mu_i<\mu_j$. Тогда первый же шаг предложенного алгоритма, выполняющий преобразование строки i, увеличит μ_i и уменьшит все остальные μ_j, что уменьшит $\mu(\tilde{A})$. Следовательно, $\tilde{A}$ не оптимальная. *Доказано.* □

Утверждение 4 (существование и единственность оптимальной матрицы $\tilde{A}$). *Матрица $\tilde{A}$ существует и является единственной с точностью до знаков элементов.*

Доказательство. Пусть матрица $\tilde{A}$ оптимальная, а $D=\operatorname{diag}(d_1,\ldots,d_n):\tilde{A}=DAD^{-1}$. Далее считаем, что $\forall i$ $d_i\ge 0$. Ведь если поменять знак какого-либо d_i, то будет получена $\tilde{\tilde{A}}$, которая отлична $\tilde{A}$ знаками элементов в строке и столбце i, а все μ_i совпадают. В этом смысле под единственностью $\tilde{A}$ понимаем единственность с точностью до знаков элементов и ищем d_i: $d_i\ge 0$.

По утверждению 3 имеем $\forall i,j$ $\mu_i(\tilde{A})=\mu_j(\tilde{A})$. Или так: $\exists\mu^*:\forall i$ $\mu_i(\tilde{A})=\mu^*$.

Выразим элементы $\tilde{A}$ через элементы A: $\tilde{A}_{ij}=\frac{d_i}{d_j}a_{ij}$.

Тогда уравнения $\forall i \ \mu_i(\tilde{A}) = \mu^*$ имеют вид

$$\forall i \quad \frac{|a_{ii}| + \sum_{j=i+1}^{n} \dfrac{d_i}{d_j}|a_{ij}|}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{d_i}{d_j}|a_{ij}|} = \mu^*;$$

$$\forall i \quad |a_{ii}| + d_i \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{d_j}|a_{ij}| = \mu^* \cdot \left(1 - d_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{d_j}|a_{ij}|\right).$$

Разделим на d_i:

$$\forall i \quad \frac{1}{d_i}|a_{ii}| + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{d_j}|a_{ij}| - \frac{1}{d_i}\mu^* + \mu^* \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{d_j}|a_{ij}| = 0.$$

Обозначим $x_i = \frac{1}{d_i}$. Тогда получим

$$\forall i \quad x_i(|a_{ii}| - \mu^*) + \sum_{j=i+1}^{n} x_j|a_{ij}| + \mu^* \sum_{j=1}^{i-1} x_j|a_{ij}| = 0.$$

То есть имеем однородную систему линейных алгебраических уравнений $Zx = 0$, где

$$Z = \begin{pmatrix} (|a_{11}| - \mu^*) & |a_{12}| & \dots & |a_{1,n-1}| & |a_{1n}| \\ \mu^*|a_{21}| & (|a_{22}| - \mu^*) & & |a_{2,n-1}| & |a_{2n}| \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mu^*|a_{n-1,1}| & \mu^*|a_{n-1,2}| & & (|a_{n-1,n-1}| - \mu^*) & |a_{n-1,n}| \\ \mu^*|a_{n1}| & \mu^*|a_{n2}| & \dots & \mu^*|a_{n,n-1}| & (|a_{nn}| - \mu^*) \end{pmatrix},$$

или в более компактной форме записи:

$$Z = \mu^* L + D + R - \mu^* E, \quad A = L + D + R,$$

где L, D, R — нижнетреугольная, диагональная и верхнетреугольная матрицы соответственно, E — единичная матрица.

Чтобы система $Zx = 0$ имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы Z была вырожденной. Кроме того, требуем, чтобы решение x было только из положительных элементов (поскольку утвердили, что ищем $d_i > 0$).

Матрица Z является вырожденной, когда имеет собственное число 0. Определим матрицу S: $S = Z + \mu^* e = \mu^* L + D + R$. Ее собственные числа отличны от собственных чисел Z на величину μ^*, собственные векторы совпадают с собственными векторами Z. Поэтому от матрицы S требуем, чтобы она имела собственным числом μ^* и соответствующий собственный вектор состоял из положительных элементов, так как он и является решением СЛАУ $Zx = 0$.

Про матрицу S отмечаем, что все ее элементы являются положительными (в отличие от Z, у которой на диагонали могут быть отрицательные). Из леммы 1 знаем, что собственный вектор с положительными элементами соответствует исключительно наибольшему по модулю собственному числу. Следовательно, μ^* должно быть не только собственным числом S (чтобы 0 был собственным числом Z), но и обязательно наибольшим по модулю собственным числом (чтобы вектор x был из положительных элементов).

Существует ли такое μ^*, определяющее матрицу $S = \mu^* L + D + R$, у которой наибольшее по модулю собственное число равно μ^*?

Рассмотрим наибольшее по модулю собственное число матрицы S как функцию от параметра μ. При $\mu = 0$ матрица S является верхнетреугольной: $S(0) = 0 \cdot L + D + R = L + R$. Ее наибольшее по модулю собственное число — это наибольший по модулю диагональный элемент: $\lambda_{\max}(S(0)) = \max_i |a_{ii}|$. То есть при $\mu = 0$ имеем $\max_i |a_{ii}| = \lambda_{\max}(S(\mu)) > \mu = 0$. Или так: $\lambda_{\max}(S(\mu)) - \mu > 0$.

При $\mu = 1$ матрица S равна матрице A: $S(1) = 1 \cdot L + D + R = A$. Ее наибольшее собственное число гарантированно меньше 1 (поскольку $\|A\|_\infty < 1$). То есть при $\mu = 1$ имеем $\lambda_{\max}(A) = \lambda_{\max}(S(\mu)) < \mu = 1$. Или так: $\lambda_{\max}(S(\mu)) - \mu < 0$.

Таким образом, при $\mu = 0$ имеем $\lambda_{\max}(S(\mu)) - \mu > 0$, а при $\mu = 1$ — $\lambda_{\max}(S(\mu)) - \mu < 0$. В силу того, что $\lambda_{\max}(S(\mu)) - \mu$ является непрерывной функцией от μ, по теореме о промежуточном значении существует $\mu^* \in (0, 1) : \lambda_{\max}(S(\mu^*)) - \mu^* = 0$. Значит, $\lambda_{\max}(S(\mu^*)) = \mu^*$, что и требовалось. Существование матрицы $\tilde{A}$ доказано.

Докажем единственность. Предположим противное: $\exists \mu^{**} > \mu^* : \lambda_{\max}(S(\mu^*)) = \mu^*$, $\lambda_{\max}(S(\mu^{**})) = \mu^{**}$, т. е. $\exists x^*, x^{**} : S(\mu^*)x^* = \mu^* x^*$, $S(\mu^{**})x^{**} = \mu^{**}x^{**}$, причем элементы векторов x^*, x^{**} положительные.

Домножим первое уравнение на $\frac{\mu^{**}}{\mu^*}$: $\frac{\mu^{**}}{\mu^*} S(\mu^*)x^* = \mu^{**}x^*$.

Тогда матрица с неотрицательными элементами $\frac{\mu^{**}}{\mu^*} S(\mu^*)$ имеет наибольшим по модулю собственным числом μ^{**} и матрица с неотрицательными элементами $S(\mu^{**})$ имеет наибольшим по модулю собственным числом μ^{**}. Выпишем разность этих матриц:

$$\frac{\mu^{**}}{\mu^*} S(\mu^*) - S(\mu^{**}) = \left(\mu^{**}L + \frac{\mu^{**}}{\mu^*}(D + R)\right) - \left(\mu^{**}L + (D+R)\right) = \left(\frac{\mu^{**}}{\mu^*} - 1\right)(D+R) \rhd 0.$$

Разность этих матриц оказалась матрицей с неотрицательными элементами. То есть каждый элемент первой матрицы больше или равен соответствующего элемента второй матрицы. По лемме 2 получаем, что наибольшее по модулю собственное число первой матрицы должно быть больше наибольшего по модулю собственного числа второй, но до этого мы утверждали, что они одинаковые, что дает противоречие. Таким образом, единственность μ^* доказана. Единственность x^* (с точностью до множителя) следует из того, что x^* — собственный вектор, соответствующий собственному числу μ^*, кратность которого 1 (лемма 1). Единственность $\tilde{A}$ доказана. □

Утверждение 5 (необходимое и достаточное условие оптимальной матрицы $\tilde{A}$). *Матрица $\tilde{A}$ оптимальная тогда и только тогда, когда $\forall i, j$ $\mu_i(\tilde{A}) = \mu_j(\tilde{A})$.*

Доказательство. По утверждению 3 следует, что если $\tilde{A}$ оптимальная, то $\forall i, j$ $\mu_i(\tilde{A}) = \mu_j(\tilde{A})$. По утверждению 4 следует, что $\tilde{A}$ существует и единственна, причем доказательство единственности матрицы основывалось на единственности A, для которой все μ_i одинаковые. Тогда из $\forall i, j$ $\mu_i(\tilde{A}) = \mu_j(\tilde{A})$ следует, что $\tilde{A}$ оптимальная. *Доказано.* □

Утверждение 6 (о двухсторонней оценке оптимального «мю»). *Пусть $\mu(\tilde{A}) = \mu^*$, $\tilde{A}$ — оптимальная матрица. Тогда справедлива оценка* $\min\limits_i \mu_i(A) \le \mu^* \le \max\limits_i \mu_i(A)$, *где A — начальная или любая другая матрица, получаемая алгоритмом.*

Доказательство. Предположим противное: $\mu^* > \max\limits_i \mu_i(A)$ (случай $\mu^* < \min\limits_i \mu_i(A)$ доказывается аналогично). По определению имеем

$$\mu_i = \frac{|a_{ii}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|}.$$

Запишем это равенство как

$$|a_{ii}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| - \mu_i + \mu_i \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| = 0.$$

Домножим на $\frac{\mu^*}{\mu_i}$:

$$\left(\frac{\mu^*}{\mu_i}|a_{ii}| - \mu^*\right) + \frac{\mu^*}{\mu_i} \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| + \mu^* \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| = 0.$$

Запишем в матрично-векторном виде: $\hat{Z}e = 0$, где

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\mu^*}{\mu_1}|a_{11}| - \mu^*\right) & \frac{\mu^*}{\mu_1}|a_{12}| & \dots & \frac{\mu^*}{\mu_1}|a_{1,n-1}| & \frac{\mu^*}{\mu_1}|a_{1n}| \\ \mu^*|a_{21}| & \left(\frac{\mu^*}{\mu_2}|a_{22}| - \mu^*\right) & & \frac{\mu^*}{\mu_2}|a_{2,n-1}| & \frac{\mu^*}{\mu_2}|a_{2n}| \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mu^*|a_{n-1,1}| & \mu^*|a_{n-1,2}| & & \left(\frac{\mu^*}{\mu_{n-1}} a_{n-1,n-1}| - \mu^*\right) & \frac{\mu^*}{\mu_{n-1}}|a_{n-1,n}| \\ \mu^*|a_{n1}| & \mu^*|a_{n2}| & \dots & \mu^*|a_{n,n-1}| & \left(\frac{\mu^*}{\mu_n}|a_{nn}| - \mu^*\right) \end{pmatrix}.$$

$$e = (1, 1, \dots, 1)^T.$$

Поскольку $\hat{Z}e = 0$, матрица $\hat{Z}$ является вырожденной, имеет нулевое собственное число, вектор e — соответствующий собственный вектор. Определим $\hat{S} = \hat{Z} + \mu^* E$, где E — единичная матрица. Тогда $\hat{S}$ имеет собственным числом μ^*, соответствующим собственным вектором e. Кроме того, $\hat{S}$ является матрицей с неотрицательными элементами, что означает по лемме 1, что μ^* есть ее наибольшее собственное число.

Сравним матрицы $\hat{S}$ и S:

$$S = \begin{pmatrix} |a_{11}| & |a_{12}| & \dots & |a_{1,n-1}| & |a_{1n}| \\ \mu^*|a_{21}| & |a_{22}| & & |a_{2,n-1}| & |a_{2n}| \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mu^*|a_{n-1,1}| & \mu^*|a_{n-1,2}| & & |a_{n-1,n-1}| & |a_{n-1,n}| \\ \mu^*|a_{n1}| & \mu^*|a_{n2}| & \dots & \mu^*|a_{n,n-1}| & |a_{nn}| \end{pmatrix},$$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \frac{\mu^*}{\mu_1}|a_{11}| & \frac{\mu^*}{\mu_1}|a_{12}| & \dots & \frac{\mu^*}{\mu_1}|a_{1,n-1}| & \frac{\mu^*}{\mu_1}|a_{1n}| \\ \mu^*|a_{21}| & \frac{\mu^*}{\mu_2}|a_{11}| & & \frac{\mu^*}{\mu_2}|a_{2,n-1}| & \frac{\mu^*}{\mu_2}|a_{2n}| \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mu^*|a_{n-1,1}| & \mu^*|a_{n-1,2}| & & \frac{\mu^*}{\mu_{n-1}}|a_{n-1,n-1}| & \frac{\mu^*}{\mu_{n-1}}|a_{n-1,n}| \\ \mu^*|a_{n1}| & \mu^*|a_{n2}| & \dots & \mu^*|a_{n,n-1}| & \frac{\mu^*}{\mu_n}|a_{nn}| \end{pmatrix}.$$

Обе матрицы являются матрицами с неотрицательными элементами и μ^* является их наибольшим по модулю собственным значением. Поскольку $\forall i$ $\frac{\mu^*}{\mu_i} > 1$, все элементы $\hat{S}$ больше или равны соответствующих элементов S. Тогда по лемме 2 наибольшее собственное число $\hat{S}$ должно быть больше наибольшего собственного числа S, а это не так. Противоречие. □

Утверждение 7 (**о двухсторонней оценке элементов матрицы** A_k)**.** *Пусть A_k получена на шаге k предложенным алгоритмом: $A_k = DAD^{-1}$, $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$, A — начальная матрица, a_{ps} — ее элементы, a_{ij}^k — элементы A_k. Справедлива оценка*

$$\forall i, j \quad m^2 \le |a_{ij}^k| \le 1, \quad \text{где} \quad m = \min_{p,s} |a_{ps}|.$$

Доказательство. Предположим противное: $|a_{ij}^k| > 1$. По определению μ имеем

$$\mu = \max_i \mu_i, \quad \mu_i = \frac{\gamma_i}{1 - \beta_i}, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|, \quad \gamma_i = \sum_{j=i}^{n} |a_{ij}|.$$

Рассмотрим два случая:

1) если $j < i$ и $|a_{ij}^k| > 1$, то получаем $\beta_i > 1$ и $\mu_i < 0$, чего быть не может в силу того, что никакой шаг алгоритма не «породит» отрицательное μ_i;

2) если $j \ge i$ и $|a_{ij}^k| > 1$, то получаем $\gamma_i > 1$ и $\mu_i > 1$, чего быть не может, так как $\mu(A_k) < \mu(A) < 1$.

В обоих случаях получаем противоречие. Следовательно, $|a_{ij}^k| \le 1$.

Докажем, что $m^2 \le |a_{ij}^k|$. Выразим элементы A_k через элементы A: $|a_{ij}^k| = \frac{d_i}{d_j}|a_{ij}| < 1$. Или так: $\frac{d_i}{d_j} < \frac{1}{|a_{ij}|}$. А поскольку $|a_{ij}| \ge m = \min_{p,s} |a_{ps}|$, то $\frac{d_i}{d_j} < \frac{1}{m}$. Тогда $\frac{d_j}{d_i} > m$, что справедливо $\forall i, j$.

Рассмотрим произвольный элемент a_{ps}^k: $|a_{ps}^k| = \dfrac{d_p}{d_s} \cdot |a_{ps}| > m \cdot m = m^2$. *Доказано.* □

Утверждение 8 (**о двухсторонней оценке «альфа»**)**.** *Рассмотрим один шаг алгоритма:*

$$A_{k+1} = D_k A_k D_k^{-1}, \quad D_k(i, \alpha) = \mathrm{diag}(1, \dots, \underset{i}{\alpha}, \dots, 1), \quad i = \operatorname*{argmin}_s \mu_s(A_k), \quad \alpha = \max_j \alpha_j,$$

α_j — решения уравнений $\mu_j(A_{k+1}) = \mu_i(A_{k+1})$. Справедлива оценка для «альфа»:

$$1 + \frac{m^2}{3}\left(\max_s \mu_s(A_k) - \min_s \mu_s(A_k)\right) \le \alpha \le \frac{1}{m^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\mu_p(A_{k+1}) = \mu_i(A_{k+1})$, где $p = \operatorname*{argmax}_s \mu_s(A_k)$. μ_i и μ_p матрицы A_{k+1} выражаются через элементы A_k:

$$\mu_i(A_{k+1}) = \frac{|a_{ii}| + \alpha\hat{\gamma}_i}{1-\alpha\beta_i}, \quad \mu_p(A_{k+1}) = \begin{cases} \dfrac{|a_{pp}| + (\hat{\gamma}_p + (\frac{1}{\alpha}-1)|a_{pi}|)}{1-\beta_p}, & p < i, \\ \dfrac{|a_{pp}| + \hat{\gamma}_p}{1-(\beta_p + (\frac{1}{\alpha}-1)|a_{pi}|)}, & p > i. \end{cases}$$

На всех шагах алгоритма имеем $\mu_i < 1$, в том числе

$$\mu_i(A_{k+1}) < 1, \quad \frac{|a_{ii}| + \alpha\hat{\gamma}_i}{1-\alpha\beta_i} < 1, \quad 1-\alpha\beta_i > |a_{ii}| + \alpha\hat{\gamma}_i.$$

И поскольку $|a_{ii}| \geq m$ и $\alpha\hat{\gamma}_i > 0$, где m — минимальный элемент исходной матрицы A_0, получаем $1-\alpha\beta_i > m$. Аналогично из $\mu_p(A_k) < 1$ имеем $1-\beta_p > m$.

Вычислим и оценим производную $\mu_i(\alpha)$:

$$\mu_i'(\alpha) = \frac{\hat{\gamma}_i(1-\alpha\beta_i) - (|a_{ii}| + \alpha\hat{\gamma}_i)(-\beta_i)}{(1-\alpha\beta_i)^2} = \frac{\hat{\gamma}_i + \beta_i|a_{ii}|}{(1-\alpha\beta_i)^2}.$$

Так как $\hat{\gamma}_i < 1$, $\beta_i < 1$, $|a_{ii}| < 1$, $1-\alpha\beta_i > m$, имеем

$$\mu_i'(\alpha) < \frac{1+1\cdot 1}{m^2} = \frac{2}{m^2}.$$

Вычислим и оценим производную $\mu_p(\alpha)$.

1. Если $p < i$, то

$$\mu_p'(\alpha) = \left(\frac{\frac{1}{\alpha}|a_{pi}|}{1-\beta_p}\right)' = -\frac{|a_{pi}|}{(1-\beta_p)\alpha^2}.$$

   И поскольку $|a_{pi}| < 1$, $(1-\beta_p) > m$, $\alpha^2 > 1$, имеем

$$\mu_p'(\alpha) < 0, \quad |\mu_p'(\alpha)| < \frac{1}{m}.$$

2. Если $p > i$, то

$$\mu_p'(\alpha) = -\frac{|a_{pp}| + \hat{\gamma}_p}{\left(1-\left(\beta_p + (\frac{1}{\alpha}-1)|a_{pi}|\right)\right)^2} \cdot \frac{|a_{pi}|}{\alpha^2} = -\frac{|a_{pp}| + \hat{\gamma}_p}{\left(1-\beta_p(A_{k+1})\right)^2} \cdot \frac{|a_{pi}|}{\alpha^2}.$$

   Так как $|a_{pp}| + \hat{\gamma}_p < 1$, $|a_{pi}| < 1$, $1-\beta_p(A_{k+1}) > m$, $\alpha^2 > 1$, получаем

$$\mu_p'(\alpha) < 0, \quad |\mu_p'(\alpha)| < \frac{1}{m^2}.$$

В обоих случаях ($p > i$, $p < i$) справедливо $|\mu_p'(\alpha)| < \frac{1}{m^2}$.

Определим $f(\alpha) = \mu_i(\alpha) - \mu_p(\alpha)$ и разложим в ряд Тейлора:

$$f(\alpha) = f(\alpha_0) + (\alpha-\alpha_0)f'(\xi), \quad \xi \in [\alpha_0, \alpha].$$

Поскольку $\mu_p(\alpha_p) = \mu_i(\alpha_p)$, то

$$f(\alpha_p) = 0, \quad f(\alpha_0) + (\alpha_p - \alpha_0) f'(\xi) = 0, \quad \alpha_p = \alpha_0 - \frac{f(\alpha_0)}{f'(\xi)}.$$

Положим $\alpha_0 = 1$:

$$\alpha_p = 1 - \frac{\mu_i(1) - \mu_p(1)}{\mu_i'(\xi) - \mu_p'(\xi)} = 1 + \frac{\max\limits_s \mu_s - \min\limits_s \mu_s}{\mu_i'(\xi) - \mu_p'(\xi)}.$$

Поскольку $\forall \xi \ 0 < \mu_i' \ (\xi) < \dfrac{2}{m^2}$, то $\mu_p'(\xi) < 0$, $|\mu_p'(\xi)| < \dfrac{1}{m^2}$:

$$\alpha_p > 1 + \frac{\max\limits_s \mu_s - \min\limits_s \mu_s}{\frac{2}{m^2} + \frac{1}{m^2}} = 1 + \frac{m^2}{3}\big(\max_s \mu_s - \min_s \mu_s\big).$$

По определению имеем $\alpha = \max\limits_j \alpha_j$. Тогда

$$\alpha \geq \alpha_p > 1 + \frac{m^2}{3}\big(\max_s \mu_s - \min_s \mu_s\big).$$

Первое неравенство доказано (оценка «альфа» снизу).

Пусть $i < n$. Рассмотрим неравенство

$$1 \geq \mu_i(A_{k+1}) = \frac{|a_{ii}| + \alpha\hat{\gamma}_i}{1 - \alpha\beta_i} \geq |a_{ii}| + \alpha\hat{\gamma}_i \geq \alpha\hat{\gamma}_i.$$

Поскольку $\forall p, s \ |a_{ps}| \geq m^2$ (утверждение 7), то $\hat{\gamma}_i = \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \geq m^2$. Следовательно, $1 \geq \alpha m^2$, откуда

$$\alpha \leq \frac{1}{m^2}.$$

Если $i = n$, то $\hat{\gamma}_i = 0$, но $\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \geq m^2$. Тогда получаем

$$1 \geq \mu_i(A_{k+1}) = \frac{|a_{ii}|}{1 - \alpha\beta_i},$$

откуда

$$1 - \alpha\beta_i \geq |a_{ii}|, \quad \alpha \leq \frac{1 - |a_{ii}|}{\beta_i} \leq \frac{1}{\beta_i} \leq \frac{1}{m^2}.$$

В обоих случаях ($i < n$, $i = n$) справедливо $\alpha \leq \frac{1}{m^2}$. Второе неравенство доказано (оценка «альфа» сверху). *Доказано.* □

Утверждение 9 (алгоритм имеет линейную скорость сходимости). $|\mu(A_{k+1}) - \mu^*| < C \cdot \big|\mu(A_k) - \mu^*\big|$, $C = 1 - \frac{m^5}{12}$, $\mu^* = \mu(\tilde{A})$, $\tilde{A}$ — *оптимальная матрица.*

Доказательство. По утверждению 6 для любой матрицы A имеем

$$\min_i \mu_i(A) \le \mu^* \le \max_i \mu_i(A).$$

Следовательно, $\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr| = \max_i \mu_i(A_k) - \mu^* \le \max_i \mu_i(A_k) - \min_i \mu_i(A_k)$. По утверждению 8 получаем

$$\alpha \ge 1 + \frac{m^2}{3}\bigl(\max_s \mu_s(A_k) - \min_s \mu_s(A_k)\bigr) \ge 1 + \frac{m^2}{3}\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr|.$$

Оценим вспомогательное выражение $1 - \frac{1}{\alpha}$:

$$1 - \frac{1}{\alpha} \ge 1 - \frac{1}{1 + \frac{m^2}{3}\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr|} = \frac{\frac{m^2}{3}\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr|}{1 + \frac{m^2}{3}\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr|}.$$

Поскольку $\frac{m^2}{3} < 1$ и $\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr| < 1$, имеем

$$1 - \frac{1}{\alpha} \ge \frac{\frac{m^2}{3}\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr|}{1 + 1 \cdot 1} = \frac{m^2}{6}\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr|.$$

Выполнение одного шага алгоритма увеличивает μ_i, уменьшает μ_j, $j \ne i$. Оценим величину уменьшения произвольного μ_p:

$$\mu_p(A_k) = \frac{|a_{pp}| + \hat\gamma_p}{1 - \beta_p}, \quad \mu_p(A_{k+1}) = \begin{cases} \dfrac{|a_{pp}| + \bigl(\hat\gamma_p + (\frac{1}{\alpha} - 1)|a_{pi}|\bigr)}{1 - \beta_p}, & p < i, \\ \dfrac{|a_{pp}| + \hat\gamma_p}{1 - \bigl(\beta_p + (\frac{1}{\alpha} - 1)|a_{pi}|\bigr)}, & p > i. \end{cases}$$

Отсюда получаем следующее.

1. Если $p < i$, то

$$\Delta\mu_p = \mu_p(A_k) - \mu_p(A_{k+1}) = \\ = \frac{|a_{pp}| + \hat\gamma_p}{1 - \beta_p} - \frac{|a_{pp}| + \bigl(\hat\gamma_p + (\frac{1}{\alpha} - 1)|a_{pi}|\bigr)}{1 - \beta_p} = \frac{\bigl(1 - \frac{1}{\alpha}\bigr)|a_{pi}|}{1 - \beta_p}.$$

Преобразуем числитель. Поскольку $(1 - \frac{1}{\alpha}) \ge \frac{m^2}{6}\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr|$ и $|a_{pi}| \ge m^2$ (утверждение 7), получаем

$$\Delta\mu_p \ge \frac{\frac{m^2}{6}\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr| \cdot m^2}{1 - \beta_p} = \frac{\frac{m^4}{6}\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr|}{1 - \beta_p}.$$

Преобразуем знаменатель. Поскольку $1 - \beta_p < 1$, то

$$\Delta\mu_p \ge \frac{\frac{m^4}{6}\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr|}{1} = \frac{m^4}{6}\bigl|\mu(A_k) - \mu^*\bigr|.$$

2. Если $p > i$, то

$$\Delta\mu_p = \mu_p(A_k) - \mu_p(A_{k+1}) = \frac{|a_{pp}| + \hat{\gamma}_p}{1 - \beta_p} - \frac{|a_{pp}| + \hat{\gamma}_p}{1 - \left(\beta_p + (\frac{1}{\alpha} - 1)|a_{pi}|\right)} =$$
$$= \frac{(|a_{pp}| + \hat{\gamma}_p)(1 - \frac{1}{\alpha})|a_{pi}|}{(1 - \beta_p)\left((1 - \beta_p) + (1 - \frac{1}{\alpha})|a_{pi}|\right)}.$$

Преобразуем числитель. Поскольку $(|a_{pp}| + \hat{\gamma}_p) \geq m$, $(1 - \frac{1}{\alpha}) \geq \frac{m^2}{6}\left|\mu(A_k) - \mu^*\right|$ и $|a_{pi}| \geq m^2$, имеем

$$\Delta\mu_p \geq \frac{(m) \cdot \left(\frac{m^2}{6}\left|\mu(A_k) - \mu^*\right|\right) \cdot (m^2)}{(1 - \beta_p)\left((1 - \beta_p) + (1 - \frac{1}{\alpha})|a_{pi}|\right)} = \frac{\frac{m^5}{6}\left|\mu(A_k) - \mu^*\right|}{(1 - \beta_p)\left((1 - \beta_p) + (1 - \frac{1}{\alpha})|a_{pi}|\right)}.$$

Преобразуем знаменатель. Поскольку $(1 - \beta_p) < 1$, $(1 - \frac{1}{\alpha}) < 1$ и $|a_{pi}| < 1$, получаем

$$\Delta\mu_p \geq \frac{\frac{m^5}{6}\left|\mu(A_k) - \mu^*\right|}{1 \cdot (1 + 1 \cdot 1)} = \frac{m^5}{12}\left|\mu(A_k) - \mu^*\right|.$$

Для обоих случаев ($p < i$, $p > i$) справедливо

$$\Delta\mu_p \geq \min\left(\frac{m^4}{6}\left|\mu(A_k) - \mu^*\right|, \frac{m^5}{12}\left|\mu(A_k) - \mu^*\right|\right) = \frac{m^5}{12}\left|\mu(A_k) - \mu^*\right|.$$

Данное неравенство справедливо $\forall p \neq i$. Возьмем $p = \underset{j}{\operatorname{argmax}}\, \alpha_j$, где α_j — решения уравнений $\mu_j(A_{k+1}) = \mu_i(A_{k+1})$. Тогда $\mu_p(A_{k+1}) = \mu(A_{k+1})$. Получаем

$$|\mu(A_{k+1}) - \mu^*| = \mu_p(A_{k+1}) - \mu^* = \mu_p(A_k) - \Delta\mu_p - \mu^*.$$

Отмечая, что $\mu_p(A_k) \leq \mu(A_k)$, имеем $|\mu(A_{k+1}) - \mu^*| \leq \mu(A_k) - \Delta\mu_p - \mu^*$. Учитывая, что $\Delta\mu_p \geq \frac{m^5}{12}\left|\mu(A_k) - \mu^*\right|$, получаем

$$|\mu(A_{k+1}) - \mu^*| \leq \mu(A_k) - \frac{m^5}{12}\left|\mu(A_k) - \mu^*\right| - \mu^* = \left(1 - \frac{m^5}{12}\right)\left|\mu(A_k) - \mu^*\right|.$$

Доказано. $\square$

3. Замечания. В представленном доказательстве достаточным условием сходимости предложенного алгоритма являлось отсутствие нулевых элементов. Эксперименты показывают, что сходимость наблюдается и при наличии нулевых элементов. Интересен вопрос о получении более общего доказательства, которое не требовало бы отсутствия нулевых элементов или же указывало ограничения на их количество и расположение.

В доказательстве сходимости использовалось требование о том, что «мю» исходной матрицы должно быть меньше 1. Эксперименты показывают, что данное требование может быть не обязательным. Как показано на рис. 2 в [1], алгоритм уменьшил «мю» с 1.3 до 0.9, т. е. дал информацию о том, что изначально «непригодная» СЛАУ оказывается решаемой. В силу этого актуальна корректировка доказательства, убирающая ограничение $\mu < 1$ для исходной матрицы.

4. Заключение. Считаем доказательство корректности алгоритма, предложенного в [1], завершенным.

Литература

1. *Борзых А. Н.* Улучшение одной из оценок скорости сходимости метода Зейделя // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6(64). Вып. 2. С. 185–195.
2. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Издание 3-е, стереотипное. СПб.: Изд-во Лань, 2002.
3. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

Статья поступила в редакцию 8 сентября 2018 г.;
после доработки 17 января 2019 г.;
рекомендована в печать 21 марта 2019 г.

Контактная информация:

Борзых Алексей Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; alex@borz.ru

Proof of correctness of an algorithm that enhances the estimate of the rate of Seidel method convergence

A. N. Borzykh

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Borzykh A. N. Proof of correctness of an algorithm that enhances the estimate of the rate of Seidel method convergence. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 3, pp. 399–410. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.305 (In Russian)

The article discusses the Seidel method for solving a system of linear algebraic equations $x = Ax + f$. It is a continuation of the previous paper by the author, where an algorithm for obtaining an estimate of the rate of Seidel method convergence was proposed. A more exhaustive proof of correctness of the algorithm is presented. The estimate given by this algorithm is better, than the estimate from the monograph "Computational methods of linear algebra" by Faddeev D. K., Faddeeva V. N. "Computational methods of linear algebra" although one needs an additional iterative process to obtain it. It is shown that this iterative process has at least linear rate of convergence, and its single step needs $O(n)$ operations. The rate of convergence is estimated by the inequality $|\mu(A_{k+1}) - \mu^*| < C|\mu(A_k) - \mu^*|$, where $C = 1 - \frac{m^5}{12}$, m is the smallest by absolute value element of matrix A, μ^* is the limit value of the iterative process (the best estimate of the rate of Seidel method convergence), $\mu(A_k)$ and $\mu(A_{k+1})$ are estimates obtained at k-th and $(k+1)$-th steps of the iterative process, respectively.

Keywords: Seidel method, one-step cyclic process, SLAE, system of linear algebraic equations, iterative solution methods, Seidel method convergence, estimate of the rate of Seidel method convergence.

References

1. Borzykh A. N., "Enhansing an estimate of the rate of the Seidel method convergence", *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6 (64)**, issue 2, 185–195 (2019). (In Russian)

2. Faddeev D. K., Faddeeva V. N., *Computational methods of linear algebra* (Lan' Publ., St. Petersburg, 2002). (In Russian)

3. Voevodin V. V., Kuznetcov Yu. A., *Matrices and calculations* (Nauka Publ., Moscow, 1984). (In Russian)

Received: September 8, 2018
Revised: January 17, 2019
Accepted: March 21, 2019

Author's information:

Alexey N. Borzykh — alex@borz.ru