УДК 517.935.4 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3
MSC 37C45

О явлении Лиувилля в оценках фрактальных размерностей вынужденных квазипериодических колебаний*

М. М. Аникушин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Аникушин М. М.* О явлении Лиувилля в оценках фрактальных размерностей вынужденных квазипериодических колебаний // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 363–375. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.302

В работе развивается метод для изучения фрактальных размерностей вынужденных почти периодических колебаний в различных дифференциальных уравнениях. Метод основывается на ранее введенном понятии диофантовой размерности почти периодической функции, которое тесно связано с диофантовыми приближениями ее частот. Получены оценки диофантовой размерности для некоторых классов квазипериодических функций. Приложение метода продемонстрировано на примере одного класса систем управления, изученного В. А. Якубовичем. В результате можно наблюдать теоретико-числовое явление (явление Лиувилля), проявляющееся в невозможности управления фрактальной размерностью вынужденных колебаний с хорошо аппроксимируемыми частотами.

Ключевые слова: квазипериодическая функция, теория размерностей, диофантовы приближения, фрактальная размерность.

1. Введение. ***1.1. История вопроса.*** При изучении фрактальных размерностей (например, хаусдорфовой) замыканий квазипериодических траекторий дифференциальных уравнений возникает следующее препятствие. В силу того, что квазипериодическая функция $u(\cdot)$ есть сужение некоторой периодической функции Φ_u нескольких, скажем m, переменных на плотную обмотку ωt плоского m-мерного тора, т. е. $u(t) = \Phi_u(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}^m$, то размерностные свойства замыкания такой траектории, т. е. множества $\mathcal{M}_u = \operatorname{Cl} u(\mathbb{R}) = \Phi_u(\mathbb{T}^m)$, могут зависеть от того, как функция Φ_u влияет на диаметры множеств, т. е. от свойств типа гельдеровости. Но, по всей видимости, в нелинейных задачах невозможно получить какие-либо результаты регулярности для функции Φ_u ввиду того, что исходное дифференциальное уравнение определяет ее регулярность только в направлении обмотки ωt тора $\mathbb{T}^m$ и не предоставляет никакой информации о поведении в трансверсальных направлениях. Поэтому для оценки фрактальных размерностей множества $\mathcal{M}_u$ не следует опираться на регулярность функции Φ_u. Оказывается, что возможен другой подход, если мы знаем, что $u(\cdot)$ — это вынужденное почти периодическое колебание. В свя-

*Работа выполнена при поддержке Немецко-Российского междисциплинарного научного центра (G-RISC), финансируемого через Немецкую службу академических обменов (DAAD) (проекты M-2017a-5 и M-2017b-5) и при поддержке программы Ведущие школы Российской Федерации (грант № 2858.2018.1).

зи с этим было предложено понятие диофантовой размерности (см. [1, 2]), которое позволяет разделить задачу оценивания фрактальных размерностей на две части (см. теорему 1 ниже): результаты регулярности для самого решения $u(\cdot)$ и оценка его диофантовой размерности через соответствующую величину для возмущения (см. теорему 2). После этого можно исследовать диофантову размерность для тех или иных классов возмущений с помощью диофантовых приближений (см. [3–5]). Подобный подход впервые появился в работах К. Наито (например, в [4]), а после был развит автором в [1, 2, 6]. Здесь, по всей видимости, обнаруживается теоретико-числовое явление (см. [7] и раздел 5), аналогичное тому, которое возникает в теории Колмогорова — Арнольда — Мозера (КАМ). В нашем случае его эффект заключается в том, что невозможно контролировать (через свойства возмущения) фрактальные размерности вынужденных квазипериодических колебаний в том случае, когда их частоты хорошо аппроксимируемые. Таким образом, теоретико-числовые свойства возникают здесь не случайно.

Прежде чем сформулировать основные результаты — теоремы 1 и 3, запишем некоторые понятия.

1.2. Диофантова размерность почти периодической функции. Пусть $\mathcal{X}$ есть метрическое пространство с метрикой $\varrho_{\mathcal{X}}$, и пусть $u\colon \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ — непрерывная функция. Для заданного $\varepsilon > 0$ определим $\mathcal{T}_\varepsilon(u)$ как множество всех $\tau \in \mathbb{R}$ таких, что

$$\rho_\infty(u(\cdot+\tau), u(\cdot)) := \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho_{\mathcal{X}}(u(t+\tau), u(t)) \leq \varepsilon. \tag{1.1}$$

Такое число τ называется *ε-почти периодом* функции $u(\cdot)$. Напомним, что подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется *относительно плотным*, если найдется число $L > 0$ такое, что пересечение $A \cap [a, a+L]$ не пусто при всех $a \in \mathbb{R}$. Непрерывная функция $u(\cdot)$ называется *$\mathcal{X}$-почти периодической* (или просто, почти периодической), если множество $\mathcal{T}_\varepsilon(u)$ относительно плотно с некоторым числом $L = L(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon > 0$ (см. [10]). Пусть $l_u(\varepsilon)$ есть минимум среди всех таких чисел $L(\varepsilon)$. Пределы

$$\mathfrak{Di}(u) := \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\ln l_u(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon} \quad \text{и} \quad \mathfrak{di}(u) := \liminf_{\varepsilon\to 0+} \frac{\ln l_u(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon} \tag{1.2}$$

соответственно называются *диофантовой размерностью*[1] и *нижней диофантовой размерностью* функции $u(\cdot)$.

1.3. Основная теорема о диофантовой размерности. Пусть $\mathcal{X}$ — метрическое пространство и $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ — относительно компактное подмножество. Пусть $N_\varepsilon(\mathcal{A})$ есть наименьшее число открытых шаров радиуса ε, необходимое для покрытия $\mathcal{A}$. Величины

$$\underline{\dim}_B \mathcal{A} = \liminf_{\varepsilon\to 0+} \frac{\ln N_\varepsilon(\mathcal{A})}{\ln 1/\varepsilon} \quad \text{и} \quad \overline{\dim}_B \mathcal{A} = \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\ln N_\varepsilon(\mathcal{A})}{\ln 1/\varepsilon} \tag{1.3}$$

соответственно называются *нижней коробочной размерностью* и *верхней коробочной размерностью*[2] (или *фрактальной размерностью*) множества $\mathcal{A}$ (см. [8]).

[1]Эти величины не являются размерностями в классическом смысле, так же как и, например, размерность по Ляпунову (см., например, [8, 9]). Диофантовой размерностью данная характеристика названа (см. [1, 2]) по причине ее тесной связи с диофантовыми приближениями частот (см. раздел 3).

[2]От англ. box-counting dimension. В русскоязычной литературе встречаются также названия: емкость, энтропийная размерность, размерность Минковского, грубая размерность.

Пусть $u\colon \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ — непостоянная почти периодическая функция. В частности, $u(\cdot)$ равномерно непрерывна. Пусть число $\delta(\varepsilon) > 0$ таково, что $\varrho_{\mathcal{X}}(u(t_1), u(t_2)) \leq \varepsilon$, как только $|t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon)$. Пусть $\delta^*(\varepsilon)$ есть наибольшее среди всех таких чисел $\delta(\varepsilon)$. Рассмотрим величину

$$\overline{\Delta}(u) := \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\ln \delta^*(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \tag{1.4}$$

Ясно, что в случае, когда $u(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Гельдера[3] с некоторым показателем $\alpha \in (0, 1]$, мы имеем $\overline{\Delta}(u) \leq \frac{1}{\alpha}$.

Оболочкой $\mathcal{H}(u)$ почти периодической функции $u(\cdot)$ называется замыкание множества ее сдвигов $\{u(\cdot + s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ в топологии равномерной сходимости. По теореме Бохнера (см. теорему 1.2 в [10]) множество $\mathcal{H}(u)$ компактно. Доказательство следующей теоремы приведено в разделе 2.

Теорема 1. *Для оболочки $\mathcal{H}(u)$ почти периодической функции $u(\cdot)$ имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} &\overline{\dim}_B \mathcal{H}(u) \leq \mathfrak{Di}(u) + \overline{\Delta}(u), \\ &\underline{\dim}_B \mathcal{H}(u) \leq \mathfrak{di}(u) + \overline{\Delta}(u). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Рассмотрим замыкание траектории $u(\cdot)$ в $\mathcal{X}$, т.е. множество $\mathcal{M}_u = \overline{u(\mathbb{R})}$. Идейно похожая версия теоремы 1 уже появлялась в работе [4] К. Наито с $\mathcal{M}_u$ вместо $\mathcal{H}(u)$. В работе [2] она была переоткрыта автором. В силу того, что отображение $i\colon \mathcal{H}(u) \to \mathcal{M}_u$, $v \mapsto v(0)$, сюръективно и липшицево, мы сразу получаем (1.5) с $\mathcal{M}_u$ вместо $\mathcal{H}(u)$. Также текущая версия теоремы более удобна для наших дальнейших исследований (см. следствие 1 ниже).

1.4. Частотные условия для оценки диофантовой размерности. Рассмотрим следующий класс систем управления в $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} &\dot{u} = Au + b\varphi(\sigma) + f(t), \\ &\sigma = c^* u, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где A есть $(n \times n)$-матрица; b, c суть n-векторы; $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая скалярная функция[4]; $f(\cdot)$ есть $\mathbb{R}^n$-почти периодическая функция. Рассмотрим *передаточную функцию* линейной части системы (1.6), т.е. $W(p) := c^*(A - pI)^{-1} b$, $p \in \mathbb{C}$ и $\det(A - pI) \neq 0$. Следующая теорема может быть получена из результатов работы [11].

Теорема 2. *Пусть $0 \leq \varphi'(\sigma) \leq \varkappa_0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, для некоторого $\varkappa_0 \leq +\infty$ и найдется $\beta \geq 0$ такое, что выполнены условия:*

---

[3] То есть найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\sup\limits_{0 < |t_1 - t_2| \leq \varepsilon_0} \frac{\varrho_{\mathcal{X}}(u(t_1), u(t_2))}{|t_1 - t_2|^\alpha} < +\infty$.

[4] В работах [11] и [12] рассмотрен более общий случай нескольких, вообще говоря, разрывных нелинейностей. Оценка (1.7), записанное ниже, может быть аналогично получена и в этих случаях. Однако, ввиду того, что для систем с разрывными нелинейностями общая теория гарантирует лишь абсолютную непрерывность решения, здесь требуются результаты регулярности для того, чтобы применить нашу теорему 1. Мы приводим упрощенные версии этих результатов (теорему 2) как одну из мотиваций нашего исследования, а также, чтобы сделать возникающие здесь явления более прозрачными. Заметим, что результаты работ [11] и [12] тесно связаны с методом сильно монотонных операторов (см. [1, 10]) и необходимые оценки могут быть получены также для некоторых классов уравнений в частных производных. Несколько иной подход, все также использующий частотные методы, см. в [6].

1) *матрица* $A+\beta I$ *гурвицева;*

2) *неравенство* $1/\varkappa_0 + \operatorname{Re} W(-\beta + i\vartheta) > 0$ *выполнено при всех* $\vartheta \geq 0$, *и если* $\varkappa_0 = +\infty$, *то также выполнено*

$$\lim_{\vartheta \to \infty} \omega^2 \operatorname{Re} W(-\beta + i\vartheta) > 0.$$

Тогда система (1.6) *имеет единственное ограниченное решение* $u(\cdot)$, *которое почти периодическое и экспоненциально устойчивое, а также выполнено*

$$\mathfrak{Di}(u) \leq \mathfrak{Di}(f). \tag{1.7}$$

Неравенство (1.7) есть следствие априорных оценок, полученных в доказательстве теоремы 1 из [11].

В силу теоремы 1 и неравенства (1.7) мы имеем $\overline{\dim}_B \mathcal{M}_u \leq \mathfrak{Di}(f) + 1$. Отсюда можно задаться следующими вопросами, ответы на которые мы дадим в разделах 3 и 4:

а) Как оценить $\mathfrak{Di}(f)$ для заданной функции f?

б) Каковы значения или оценки диофантовой размерности для f из заданного класса?

1.5. Размерности типичных квазипериодических функций. Пусть $\mathbb{E}$ — банахово пространство. Борелевская мера μ на $\mathbb{E}$ называется *трансверсальной* к борелевскому множеству $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}$, если выполнены следующие условия (см. [13]):

(i) существует компактное подмножество $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$ такое, что $0 < \mu(\mathcal{K}) < \infty$;

(ii) $\mu(\mathcal{S} + v) = 0$ для всех $v \in \mathbb{E}$.

В этом случае множество $\mathcal{S}$ называется *пренебрежимым*, а его дополнение — *превалентным* множеством. Если некоторое свойство выполняется для всех элементов из некоторого превалентного множества в $\mathbb{E}$, то будем говорить, что этим свойством обладают *почти все* (или типичные) элементы из $\mathbb{E}$. Если условие (ii) выполняется лишь для элементов $v \in \mathcal{P}$ некоторого превалентного множества $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}$, то будем говорить, что мера μ *существенно трансверсальна* к $\mathcal{S}$.

Для заданного банахового пространства $\mathbb{E}$ рассмотрим векторное пространство $\mathcal{QP}^1_m(\mathbb{E}) := C^1(\mathbb{T}^m; \mathbb{E}) \times \mathbb{R}^m$ и для $\alpha \in (0,1]$ рассмотрим $\mathcal{QP}^{0,\alpha}_m(\mathbb{E}) := C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^m; \mathbb{E}) \times \mathbb{R}^m$, где $C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^m; \mathbb{E})$ есть пространство всех непрерывных по Гельдеру (с показателем α) функций из $\mathbb{T}^m$ в $\mathbb{E}$.

Теорема 3. *Для почти всех (относительно некоторой борелевской меры*[5]*) элементов* $(\Phi(\cdot), \omega)$ *из* $\mathcal{QP}^1_m(\mathbb{R}^n)$, $m \leq n$, *выполняется*[6]

$$\dim_T \mathcal{M}_u = \dim_B \mathcal{M}_u = \mathfrak{Di}(u) + 1 = m, \tag{1.8}$$

где $u(t) = \Phi(\omega t)$. *Более того, для почти всех* $(\Phi(\cdot), \omega) \in \mathcal{QP}^{0,\alpha}_m(\mathbb{E})$ *выполняется*

$$\mathfrak{Di}(u) \leq \frac{m-1}{\alpha}. \tag{1.9}$$

[5] Детали построения меры указаны в доказательстве.

[6] Далее через $\dim_T \mathcal{X}$ мы обозначаем топологическую размерность по Лебегу метрического пространства $\mathcal{X}$. Читателю необходимо лишь знать, что $\dim_T \mathcal{X} \leq \underline{\dim}_B \mathcal{X}$ (см., например, [8]). Использование $\dim_B \mathcal{M}_u$ указывает на то, что нижняя и верхняя коробочные размерности $\mathcal{M}_u$ совпадают.

Доказательство теоремы 3 состоит из двух ингредиентов: нижняя оценка величины $\mathfrak{di}(u)$, получающаяся из (1.5) с использованием теоремы Картрайт (см. теорему 4 ниже), и верхней оценки $\mathfrak{Di}(u)$ в духе теорем переноса Хинчина (см. [3]) и после с использованием метрических свойств диофантовых чисел (см. [3, 5]).

2. Доказательство теоремы 1 и следствий из нее.

Доказательство теоремы 1. Пусть число $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Покажем, что для всех $t \in \mathbb{R}$ найдется $\bar{t} \in [0, l_u(\varepsilon)]$ такое, что

$$\varrho_\infty(u(\cdot + t), u(\cdot + \bar{t})) \leq \varepsilon. \tag{2.1}$$

Действительно, имеется ε-почти период $\tau \in [-t, -t + l_u(\varepsilon)]$ для $u(\cdot)$. Тогда число $\bar{t} := t + \tau$ является искомым. Теперь для всех $v \in \mathcal{H}(u)$ найдется $t \in \mathbb{R}$ такое, что $\varrho_\infty(v(\cdot), u(\cdot + t)) \leq \varepsilon$ и, следовательно,

$$\varrho_\infty\left(v(\cdot), u(\cdot + \bar{t})\right) \leq \varrho_\infty\left(v(\cdot), u(\cdot + t)\right) + \varrho_\infty\left(u(\cdot + t), u(\cdot + \bar{t})\right) \leq 2\varepsilon. \tag{2.2}$$

Для удобства введем обозначение $\mathcal{Q}_u := \{u(\cdot + t) \mid t \in \mathcal{Q}\} \subset \mathcal{H}(u)$, где $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}$. Из (2.2) следует, что для покрытия открытыми шарами множества $\mathcal{H}(u)$ достаточно предъявить покрытие множества $[0, l_u(\varepsilon)]_u$. Пусть $\mathcal{B}_\varepsilon(u(\cdot + t))$ — открытый шар с центром в $u(\cdot + t)$ и радиусом ε. Ясно, что для $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\mathcal{B}_\varepsilon(u(\cdot + t)) \supset \left[t - \frac{\delta^*(\varepsilon)}{2}, t + \frac{\delta^*(\varepsilon)}{2}\right]_u. \tag{2.3}$$

Таким образом, множество $[0, l_u(\varepsilon)]_u$ может быть покрыто $\frac{l_u(\varepsilon)}{\delta^*(\varepsilon)} + 1$ шарами радиуса ε, и, как следствие, множество $\mathcal{H}(u)$ может быть покрыто таким же количеством шаров, но радиуса 3ε. Имеем неравенство $N_{3\varepsilon}(\mathcal{H}(u)) \leq \frac{l_u(\varepsilon)}{\delta^*(\varepsilon)} + 1 \leq 2 \cdot \frac{l_u(\varepsilon)}{\delta^*(\varepsilon)}$ и

$$\frac{\ln N_{3\varepsilon}(\mathcal{H}(u))}{\ln 1/\varepsilon} \leq \frac{\ln\left(2 \cdot \frac{l_u(\varepsilon)}{\delta^*(\varepsilon)}\right)}{\ln 1/\varepsilon}. \tag{2.4}$$

Для всех $\delta > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\frac{\ln \delta^*(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \leq \overline{\Delta}(u) + \delta$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Из (2.4) получаем

$$\frac{\ln N_{3\varepsilon}(\mathcal{H}(u))}{\ln 3 + \ln 1/(3\varepsilon)} \leq \frac{\ln 2}{\ln 1/\varepsilon} + \frac{\ln l_u(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon} + \overline{\Delta}(u) + \delta. \tag{2.5}$$

Переходя к верхнему/нижнему пределу в (2.5) и используя произвольность выбора числа δ, мы завершаем доказательство. $\square$

Теперь пусть $\mathbb{E}$ — банахово пространство и $u(\cdot)$ есть $\mathbb{E}$-почти периодическая функция. Тогда ей можно сопоставить формальный *ряд Фурье*:

$$u(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} U_k e^{i\lambda_k t}, \tag{2.6}$$

где $\lambda_k \in \mathbb{R}$ и $U_k \in \mathbb{E}^{\mathbb{C}}$. Множество $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}(u) = \{a_1\lambda_1 + \ldots + a_n\lambda_n \mid a_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ называется $\mathbb{Q}$-модулем функции $u(\cdot)$, а множество $\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}(u) = \{a_1\lambda_1 + \ldots + a_n\lambda_n \mid a_k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ называется $\mathbb{Z}$-модулем $u(\cdot)$. На оболочке $\mathcal{H}(u)$ можно ввести структуру компактной связной абелевой группы (см. [16] или [15]). По следствию из двойственности Понтрягина (см. теорему 47 в [14]) мы имеем $\dim_T \mathcal{H}(u) = \operatorname{rank} \widehat{\mathcal{H}(u)}$, где через $\widehat{\mathcal{H}(u)}$ обозначена группа характеров $\mathcal{H}(u)$. В работе [15] показано, что эта группа характеров изоморфна (но, вообще говоря, не топологически изоморфна) $\mathbb{Z}$-модулю $\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}(u)$. Таким образом, в силу цепочки[7] $\dim_T \mathcal{H}(u) = \operatorname{rank} \widehat{\mathcal{H}(u)} = \operatorname{rank} \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}(u) = \dim \mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}(u)$ справедлива следующая теорема Картрайт (оригинальную версию см. в [16]).

Теорема 4. *Для всякой $\mathbb{E}$-почти периодической функции $u(\cdot)$ имеет место*

$$\dim_T \mathcal{H}(u) = \dim \mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}(u). \tag{2.7}$$

В силу того, что $\dim_T \mathcal{H}(u) \leq \underline{\dim}_B \mathcal{H}(u)$ из теорем 1 и 4 мы имеем следующее следствие.

Следствие 1. *Предположим, что $\mathbb{E}$-почти периодическая функция $u(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$. Тогда*

$$\mathfrak{di}(u) \geq \dim \mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}(u) - \frac{1}{\alpha}. \tag{2.8}$$

Почти периодическая функция $u(\cdot)$ называется *квазипериодической*, если найдутся вещественные числа $\omega_1, \ldots, \omega_m$ такие, что для всех λ_k из (2.6) имеет место единственное разложение

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(k)} \omega_j \tag{2.9}$$

с целыми коэффициентами $a_j^{(k)}$. Числа $\omega_1, \ldots, \omega_m$ в этом случае называются *интегральной базой* (или 2π-*частотами*) функции $u(\cdot)$. Если не существует другой интегральной базы из меньшего, чем m, количества элементов, то интегральная база $\omega_1, \ldots, \omega_m$ называется *базой истинного размера m*. Оказывается, что оболочка $\mathcal{H}(u)$ квазипериодической функции с базой истинного размера m гомеоморфна $\mathbb{T}^m$ (см., например, теорему 3 на стр. 83 в [17]). Таким образом, $\dim \mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}(u) = m$.

3. Оценки диофантовой размерности. Для $\theta \in \mathbb{R}^m$ обозначим через $|\theta|_m$ расстояние от θ до $\mathbb{Z}^m$. Ясно, что $|\cdot|_m$ определяет метрику на m-мерном плоском торе $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$.

Эквивалентное определение $\mathbb{E}$-квазипериодической функции $u(\cdot)$ состоит в том, что найдется непрерывная функция $\Phi_u \colon \mathbb{T}^m \to \mathbb{E}$ и вектор рационально независимых чисел $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ (который в этом случае мы называем 1-*частотами*) такой, что $u(t) = \Phi_u(\omega t)$. Будем называть функцию Φ_u *параметризацией* $u(\cdot)$ (так как $\Phi_u(\mathbb{T}^m) = \mathcal{M}_u$) заданной 1-частотами[8] $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$. Заметим, что 1-частоты нужно умножить на 2π, чтобы они стали частотами, определенными в разделе 2.

Будем говорить, что m-вектор $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ удовлетворяет *диофантовому условию* порядка $\nu \geq 0$, если для некоторого $C > 0$ и всех натуральных q выполнено неравенство

$$|\omega q|_m \geq C \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1+\nu}{m}}. \tag{3.1}$$

[7]Напомним, что у изоморфных абелевых групп ранги совпадают, а ранг абелевой группы без кручения равен размерности наименьшего векторного пространства над $\mathbb{Q}$, в которое эту группу можно вложить.

[8]Ввиду того, что движение $t \mapsto \omega t$ всюду плотно заполняет тор $\mathbb{T}^m$, функция $\Phi_u(\cdot)$ единственным образом определяется по набору ω.

В разделе 4 мы обсудим метрические свойства диофантовых чисел. Для дальнейшего нам понадобится один результат из геометрии чисел.

Решеткой $\mathbb{L}$ в $\mathbb{R}^n$ называется аддитивная подгруппа, порожденная n линейно независимыми векторами. Для примера, решетка $\mathbb{L} = \mathbb{Z}^n$ порождается стандартным базисом $e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим замкнутое выпуклое центрально-симметричное тело $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^n$ с внутренней точкой 0. Для $k = 1, \ldots, n$ определим $\mathfrak{s}_k$ как наименьшее число $\mathfrak{s}$ такое, что множество $\mathfrak{s} \cdot \mathcal{K}$ содержит k линейно независимых векторов решетки $\mathbb{L}$. Числа $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n$ называются *последовательными минимумами* тела $\mathcal{K}$ относительно решетки $\mathbb{L}$. Ясно, что $\mathfrak{s}_1 \leq \mathfrak{s}_2 \leq \ldots \leq \mathfrak{s}_n$. Справедлива следующая теорема Минковского (см. [5]).

Теорема 5. *В вышеуказанных построениях мы имеем*

$$\frac{2^n}{n!} \operatorname{vol}(\mathbb{R}^n/\mathbb{L}) \leq \mathfrak{s}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{s}_n \cdot \operatorname{vol}(\mathcal{K}) \leq 2^n \operatorname{vol}(\mathbb{R}^n/\mathbb{L}). \tag{3.2}$$

Множество $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ называется *фундаментальной областью* решетки $\mathbb{L}$, если естественная проекция $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{L}$ биективна на $\mathcal{D}$. Из теоремы 5 мы выведем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_m$ удовлетворяют диофантовому условию порядка $\nu \geq 0$, причем $\nu(m-1) < 1$. Тогда найдется число $C_\omega > 0$ такое, что для всех $\varepsilon > 0$ система неравенств*

$$|\omega_1 \tau|_1 \leq \varepsilon, \ \ldots, \ |\omega_m \tau|_1 \leq \varepsilon \tag{3.3}$$

имеет целочисленное решение $\tau \in \mathbb{R}$ в каждом интервале длины $L(\varepsilon)$, где $L(\varepsilon) = C_\omega \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$ и $d = \frac{(1+\nu)m}{1-\nu(m-1)}$.

Доказательство. Для удобства положим $\gamma := \frac{1+\nu}{m}$. Для $T \geq 1$ рассмотрим параллелепипед

$$\Pi_T := \left\{ (x, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \ : \ \max_{1 \leq j \leq m} |\omega_j x - y_j| \leq \frac{C_1}{T^\gamma}, |x| \leq T \right\} \tag{3.4}$$

при некотором фиксированном $C_1 < C$, где C из (3.1). Рассмотрим последовательные минимумы $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{m+1}$ параллелепипеда Π_T относительно решетки $\mathbb{L} = \mathbb{Z}^{m+1}$. Из определения следует, что Π_T не содержит ненулевых целочисленных точек и, как следствие, $\mathfrak{s}_1 \geq 1$. В силу того, что $(m+1)$-мерный объем Π_T пропорционален величине $T^{m\gamma-1}$, то для некоторой константы $C_2 > 0$ имеет место

$$\mathfrak{s}_{m+1} \leq \mathfrak{s}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{s}_{m+1} \leq C_2 T^{m\gamma-1}. \tag{3.5}$$

Таким образом, множество $(m+1)C_2T^{m\gamma-1} \cdot \Pi_T$ содержит фундаментальную область решетки $\mathbb{Z}^{m+1}$ и, как следствие, любой его сдвиг содержит целочисленную точку. Отсюда следует, что для некоторых констант $C_3 > 0$ и $C_4 > 0$ система неравенств

$$|\omega x - \theta|_m \leq C_3 T^{(m-1)\gamma-1} \tag{3.6}$$

имеет целочисленное решение x, где $A \leq x \leq A + C_4 T^{m\gamma}$, при любом A и произвольной точки $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$. Заметим, что $(m-1)\gamma - 1 = \frac{1}{m}(\nu(m-1)-1) < 0$. Теперь для достаточно малого $\varepsilon > 0$ выберем T так, что $\varepsilon = C_3 T^{\gamma(m-1)-1}$, и положим $\theta = 0$ в (3.6). Так как $T^{m\gamma} = C_5 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$, где $d = \frac{m\gamma}{1-\gamma(m-1)} = \frac{(1+\nu)m}{1-\nu(m-1)}$ и $C_5 > 0$ —

некоторая подходящая константа, мы имеем целочисленное решение τ системы (3.3) в каждом интервале длины $L(\varepsilon) = K\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$ при некоторой константе $C_\omega > 0$ и, таким образом, доказательство завершено. $\square$

Из леммы 1 получается следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* $u(t) = \Phi_u(\omega_0 t, \omega_1, \dots, \omega_m t)$ *есть* $\mathbb{E}$*-квазипериодическая функция с частотами* $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m)$, $m \geq 1$. *Предположим, что* Φ_u *удовлетворяет локальному условию Гельдера с показателем* $\alpha \in (0, 1]$ *и* m*-вектор* $\omega' = (\frac{\omega_1}{\omega_0}, \dots, \frac{\omega_m}{\omega_0})$ *удовлетворяет диофантовому условию порядка* $\nu \geq 0$ *и* $\nu(m-1) < 1$. *Тогда имеет место оценка*

$$\mathfrak{Di}(u) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{(1+\nu)m}{1-\nu(m-1)}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Положим $v(t) := \omega t \in \mathbb{T}^{m+1}$. Из предложения 2.2 в [1] мы имеем $\mathfrak{Di}(u) = \mathfrak{Di}(\Phi_u \circ v) \leq \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Di}(v)$. Таким образом, наша задача свелась к оценке диофантовой размерности линейного потока на торе. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\omega_0 = 1$. Тогда всякий ε-почти период для $v(\cdot)$ есть решение системы неравенств

$$|\tau|_1 \leq \varepsilon, \ |\omega_1 \tau|_1 \leq \varepsilon, \ \dots, \ |\omega_m \tau|_1 \leq \varepsilon. \tag{3.8}$$

Избавимся от первого условия, считая, что τ — целое число. Тогда лемма 1 гарантирует существование целочисленного решения τ системы (3.8) во всяком интервале длины $L(\varepsilon) = C'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$, где $d = \frac{(1+\nu)m}{1-\nu(m-1)}$ и $C' > 0$ — некоторая константа. Отсюда мы сразу же получаем (3.7).

Случай 2: $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_m)$ не имеет 1 в качестве частоты. Тогда для $\varepsilon > 0$ всякий ε-почти период для $v(\cdot)$ есть решение системы неравенств

$$|\omega_0 \tau|_1 \leq \varepsilon, \ \dots, \ |\omega_m \tau|_1 < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Положим $\zeta := \omega_0 \tau$. Тогда система (3.9) принимает вид

$$|\zeta|_1 \leq \varepsilon, \ |\omega_1' \zeta|_1 \leq \varepsilon, \ \dots, \ |\omega_m' \zeta|_1 \leq \varepsilon, \tag{3.10}$$

где $\omega_j' = \frac{\omega_j}{\omega_0}$, $j = 1, \dots, m$. Обозначим $v'(t) := (1, \omega_1' t, \dots, \omega_m' t)$. Тогда ясно, что $\mathfrak{Di}(v) = \mathfrak{Di}(v')$ в силу того, что их почти периоды пропорциональны, и, как следствие, этот случай сводится к случаю 1. $\square$

4. Доказательство теоремы 3. Обозначим множество всех m-векторов, удовлетворяющих диофантовому условию заданного порядка $\nu \geq 0$, через $\mathcal{D}_m(\nu)$. Положим $\mathcal{D}_m(\cap) := \bigcap_{\nu > 0} \mathcal{D}_m(\nu) \cup \mathcal{D}_m(0)$. Из теоремы Хинчина (см. [3], глава VII, теорема 1) вытекает, что множество $\mathcal{D}_m(\nu)$ имеет полную меру (т. е. его дополнение имеет лебегову меру нуль) при всех $\nu > 0$, и, таким образом, из того, что $\mathcal{D}_n(\nu_1) \subset \mathcal{D}_m(\nu_2)$ для $\nu_1 < \nu_2$, и непрерывности меры сверху вытекает, что $\mathcal{D}_m(\cap)$ — множество полной меры. Определим $\mathring{\mathcal{D}}_m$ как множество всех m-векторов в $\mathcal{D}_m(\cap)$, которые рационально независимы. Заметим, что множество $\mathring{\mathcal{D}}_m$ также имеет полную меру.

Наконец, для $1 \leq j \leq m$ определим $\mathring{\mathcal{D}}_m^j$ как множество всех рационально независимых m-векторов $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, для которых $(\omega_1, \dots, \hat{\omega}_j, \dots, \omega_m) \in \omega_j \mathring{\mathcal{D}}_{m-1}$.

Лемма 2. *Множество $\mathring{\mathcal{D}}^j_m$ имеет полную меру.*

Доказательство. Положим $\mathcal{C}_m := \mathbb{R}^m \setminus \mathring{\mathcal{D}}^j_m$. Для $\xi \in \mathbb{R}$ рассмотрим сечения множества C_m вдоль $(m-1)$-мерной плоскости $\{\omega_j = \xi\}$. По принципу Кавальери получаем

$$\mu_L^{(m)}(\mathcal{C}_m) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu_L^{(m-1)}\left(\{\omega_j = \xi\} \cap \mathcal{C}_m\right) d\xi, \tag{4.1}$$

где через $\mu_L^{(k)}$ обозначена k-мерная мера Лебега. Ясно, что для $\xi \neq 0$ мы имеем равенство $\mu_L^{(m-1)}\left(\{\omega_j = \xi\} \cap \mathcal{C}_m\right) = \mu_L^{(m-1)}\left(\mathbb{R}^{m-1} \setminus \xi\mathring{\mathcal{D}}_{m-1}\right) = 0$, так как множество $\xi\mathring{\mathcal{D}}_{m-1}$ имеет полную меру. Отсюда и из (4.1) получаем, что $\mu_L^{(m)}(\mathcal{C}_m) = 0$. $\square$

Будем говорить, что функция $\Phi \in C^1(\mathbb{T}^m; \mathbb{R}^n)$ *невырожденная*, если найдется точка $\theta_0 \in \mathbb{T}^m$, в которой дифференциал Φ имеет максимальный ранг.

Лемма 3. *Пусть $\Phi \in C^1(\mathbb{T}^m; \mathbb{R}^n)$ невырождена и $m \leq n$. Тогда для всякого m-вектора $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathbb{R}^m$, компоненты которого рационально независимы, соответствующая квазипериодическая функция $u(t) := \Phi(\omega t)$ имеет $2\pi\omega$ в качестве интегральной базы истинного размера m.*

Доказательство. Предположим, что $u(\cdot)$ имеет 1-частоты $\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_k$ с $k < m \leq n$ и $u(t) = \widetilde{\Phi}(\widetilde{\omega}_1 t, \ldots, \widetilde{\omega}_k t)$. Из того, что $\Phi \in C^1(\mathbb{T}^m; \mathbb{R}^n)$, а также леммы 1 на стр. 71 в [17] следует, что $\widetilde{\Phi} \in C^1(\mathbb{T}^k; \mathbb{R}^n)$. Так как $\mathcal{M}_u = \Phi(\mathbb{T}^m)$ и Φ невырождена, то имеет место $\dim_T \mathcal{M}_u = m$. Из $\mathcal{M}_u = \widetilde{\Phi}(\mathbb{T}^k)$ получаем, что $\dim_T \mathcal{M}_u \leq \dim_B \mathcal{M}_u \leq \dim_B \widetilde{\Phi}(\mathbb{T}^k) \leq k$. Таким образом, $m \leq k$, что приводит к противоречию. $\square$

Нам также потребуется следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{L}_2(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ есть двумерное подпространство в пространстве всех линейных операторов между конечномерными пространствами $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$. Предположим также, что в $\mathcal{L}_2(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ имеется $k+2$ попарно непропорциональных*[9] *операторов $A_1, \ldots, A_{k+2}$ с рангом, не превосходящим k; тогда всякий оператор из $\mathcal{L}_2(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ имеет ранг, не превосходящий k.*

Теперь мы переходим к доказательству теоремы 3.

Доказательство теоремы 3. Пусть $C^1_+(\mathbb{T}^m; \mathbb{R}^n)$ и $C^1_-(\mathbb{T}^m; \mathbb{R}^n)$ соответственно обозначают множества всех невырожденных и вырожденных функций из $C^1(\mathbb{T}^m; \mathbb{R}^n)$. Рассмотрим множество $\mathcal{P} := C^1_+(\mathbb{T}^m; \mathbb{R}^n) \times \mathring{\mathcal{D}}^j_m$ для произвольного $1 \leq j \leq m$. Мы покажем, что его дополнение $\mathcal{S}$ — пренебрежимое множество. Проделаем это в несколько шагов.

1. Рассмотрим множество $\widetilde{\mathcal{S}} = C^1_-(\mathbb{T}^m; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m$ и докажем, что $\widetilde{\mathcal{S}}$ — пренебрежимое. Зафиксируем произвольную невырожденную функцию Φ_0 и обозначим любую из ее невырожденных точек через θ_0. Рассмотрим одномерное подпространство $\mathcal{V}_1 := \{(x\Phi_0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ в $\mathcal{QP}^1_m$ с одномерной мерой Лебега. Сумма заданного $(\Phi, \omega) \in \mathcal{QP}^1_m$ и произвольного $(\widetilde{\Phi}, \widetilde{\omega}) \in \widetilde{\mathcal{S}}$ принадлежит $\mathcal{V}_1$ тогда и только тогда, когда выполнено $\widetilde{\omega} = -\omega$ и $\Phi + \widetilde{\Phi} = x\Phi_0$, т. е. функция $-\Phi + x\Phi_0$ вырождена для

[9] То есть любые два из них образуют базис для $\mathcal{L}_2(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

некоторого $x \in \mathbb{R}$. По лемме 4 существует не более чем $m+1$ таких чисел x. В частности, пересечение $\widetilde{\mathcal{S}} + (\Phi, \omega) \cap \mathcal{V}_1$ имеет меру нуль, и, таким образом, множество $\widetilde{S}$ — пренебрежимое.

2. Дополнение до $\widetilde{\mathcal{S}}$ — превалентное множество $\widetilde{\mathcal{P}} = C^1_+(\mathbb{T}^m; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m$. Рассмотрим m-мерное подпространство $\mathcal{V}_2 := \{0\} \times \mathbb{R}^m$ в $\mathcal{QP}^1_m$. Сумма $(\widetilde{\Phi}, \widetilde{\omega}) \in \widetilde{\mathcal{P}}$ и $(\Phi, \omega) \in \mathcal{S}$ может принадлежать $\mathcal{V}_2$ только, если $\Phi = -\widetilde{\Phi}$ и Φ невырождена. Отсюда следует, что ω лежит в дополнении к $\mathring{\mathcal{D}}^j_m$, т. е. в множестве нулевой меры (лемма 2). Таким образом, мера Лебега на $\mathcal{V}_2$ существенно трансверсальна к $\mathcal{S}$ и, в силу факта 4 из [13], множество $\mathcal{S}$ — пренебрежимое[10].

3. Теперь рассмотрим $(\Phi, \omega) \in \mathcal{P}$. Так как $\omega \in \mathring{\mathcal{D}}^j_m$, то из теоремы 6, с помощью предельного перехода при $\nu \to 0+$, мы заключаем, что $\mathfrak{Di}(u) \leq m-1$. Из предложения 1 мы также имеем $\mathfrak{di}(u) \geq m-1$. Таким образом, $\mathfrak{di}(u) = \mathfrak{Di}(u) = m-1$. Невырожденность Φ гарантирует, что $\dim_T \mathcal{M}_u = m$. Так как $m = \dim_T \mathcal{M}_u \leq \overline{\dim}_B \mathcal{M}_u \leq \mathfrak{Di}(m) + 1 = m$, то равенство (1.8) доказано.

Вторая часть теоремы следует сразу из леммы 2 и аналогичных построений (можно рассмотреть $\mathcal{L} := \{0\} \times \mathbb{R}^m$ в качестве подходящего подпространства с мерой Лебега). □

5. Обсуждение. Пусть $u(\cdot)$ — почти периодическое решение системы (1.6), полученное в рамках теоремы 2 при почти периодическом возмущении $f(t) = \Phi_f(\omega t)$, где (Φ_f, ω) — типичный элемент $\mathcal{QP}^{0,\alpha}_m$ в смысле теоремы (3), т. е. выполнено (1.9). Из теоремы 1 и (1.7) мы сразу получаем

$$\overline{\dim}_B \mathcal{M}_u \leq \frac{m-1}{\alpha} + 1. \tag{5.1}$$

Как правило, условия, гарантирующие существование почти периодических решений, включают в себя открытое множество допустимых возмущений $f(\cdot)$ или Φ_f (в случае теоремы 2 на возмущение вообще не накладывается никаких условий, кроме, разумеется, непрерывности). Таким образом, оценка (5.1) может быть рассмотрена как типичная оценка в данном классе возмущений.

В более общей ситуации, когда возмущение $f(t) = \Phi_f(\omega t)$ таково, что $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ и $(\omega_1, \ldots, \hat{\omega}_j, \ldots, \omega_m) \in \mathcal{D}_{m-1}(\nu)$, где $\nu(m-2) < 1$, мы получаем

$$\overline{\dim}_B \mathcal{M}_u \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{(1+\nu)(m-1)}{1-\nu(m-2)} + 1. \tag{5.2}$$

Отсюда и из опыта, полученного в теории КАМ [7], можно сделать следующие выводы.

(C1) Несмотря на невозможность управления регулярностью Φ_u, управление (с помощью регулярности Φ_f и диофантовых условий частот) фрактальной размерностью $\mathcal{M}_u = \Phi_u(\mathbb{T}^m)$ возможно во всех, кроме некоторых исключительных, случаях.

(C2) Эти исключительные случаи соответствуют хорошо аппроксимируемым частотам, которые усиливают эффект невозможности управления регулярностью

[10] Воспроизводя доказательство факта 4 из [13], искомая мера получается как свертка мер Лебега $\mu^{(1)}_L * \mu^{(m)}_L$, сосредоточенных на подпространствах $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ соответственно.

Φ_u настолько, что управление фрактальной размерностью становится также невозможным.

6. Заключение. В работе был предложен метод оценивания фрактальных размерностей вынужденных квазипериодических колебаний с использованием свойств диофантовых приближений частот квазипериодической функции. На примере одного класса систем управления с монотонной нелинейностью было показано, что в типичных случаях можно избавиться от диофантового показателя в оценке фрактальной размерности. С другой стороны, исключительные случаи, в которых, по всей видимости, этот показатель сохраняется, демонстрируют проявление теоретико-числового явления — явления Лиувилля, что наводит на мысль о невозможности управления фрактальными размерностями вынужденных колебаний в особо исключительных случаях.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ф. Райтманну, сделавшему множество полезных замечаний, которые во многом определили окончательный вид данной работы. Также автор благодарит Н. Г. Мощевитина за указание на современное доказательство теоремы 6 и А. А. Панкова за полезные обсуждения.

Литература

1. *Anikushin M. M.* Dimension theory approach to the complexity of almost periodic trajectories // International Journal of Evolution Equations. 2017. Vol. 10, no. 3–4. P. 215–232.

2. *Anikushin M. M.* Badly approximable numbers and the growth rate of the inclusion length of an almost periodic function // Proc. of International Student Conference in Saint-Petersburg State University “Science and Progress”. 2016. P. 46–50.

3. *Cassels J. W. S.* An introduction to Diophantine approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957.

4. *Naito K.* Fractal dimensions of almost periodic attractors // Ergodic Theory Dyn. Syst. 1996. Vol. 16, no. 4. P. 791–803.

5. *Siegel C. L.* Lectures on the geometry of numbers. Springer Science & Business Media, 2013.

6. *Anikushin M. M.* Dimensional aspects of almost periodic dynamics // In book [8].

7. *Moser J.* On commuting circle mappings and simultaneous diophantine approximations // Mathematische Zeitschrift. 1990. Vol. 205, no. 1. P. 105–121.

8. *Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Reitmann V.* Attractor dimension estimates for dynamical systems: theory and computation. Switzerland: Springer International Publishing AG, 2019.

9. *Leonov G. A., Alexeeva T. A.* Estimates of the Lyapunov dimension of attractors for generalized Rössler systems // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2014. Vol. 47, no. 4. P. 154–158. https://doi.org/10.3103/S1063454114040050

10. *Pankov A. A.* Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations. London: Kluwer Academic Publishers, 1990.

11. *Якубович В. А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний // Автоматика и телемеханика. 1964. Вып. 25, № 7. С. 1017–1029.

12. *Якубович В. А.* Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими, вообще говоря, разрывными нелинейностями // Доклады Академии наук. 1966. Вып. 171, № 3. С. 533–536.

13. *Hunt B. R., Sauer T., Yorke J. A.* Prevalence: a translation-invariant “almost every” on infinite-dimensional spaces // Bulletin of the American Mathematical Society. 1992. Vol. 27, no. 2. P. 217–238.

14. *Понтрягин Л. С.* Топологические группы. М.: Наука, 1973.

15. *Зинченко И. Л.* О группе характеров замыкания почти периодической траектории автономной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1988. Вып. 24, № 6. С. 1043–1045.

16. *Cartwright M. L.* Almost periodic flows and solutions of differential equations // Proc. London Math. Soc. 1967. Vol. 3, no. 2. P. 355–380.
17. *Samoilenko A. M.* Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 1991.

Статья поступила в редакцию 5 декабря 2018 г.;
после доработки 10 марта 2019 г.;
рекомендована в печать 21 марта 2019 г.

Контактная информация:

Аникушин Михаил Михайлович — аспирант; demolishka@gmail.com

On the Liouville phenomenon in estimates of fractal dimensions of forced quasi-periodic oscillations*

M. M. Anikushin

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Anikushin M. M. On the Liouville Phenomenon in Estimates of Fractal Dimensions of Forced Quasi-Periodic Oscillations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 3, pp. 363–375.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.302 (In Russian)

We develop a method for studying fractal dimensions of forced almost periodic oscillations in various differential equations. The method is based on the previously introduced notion of the Diophantine dimension of an almost periodic function that is strictly connected with Diophantine approximations of its frequencies. Some estimates of the Diophantine dimension for typical quasi-periodic perturbations are obtained. For a class of control systems we state frequency-domain conditions under which the presented approach can be applied. As a result of our investigations one may observe a number-theoretic phenomenon (the Liouville phenomenon) arising within the mentioned problem. Its effect is in that we can not control fractal dimensions of quasi-periodic oscillations having well-approximable frequencies.

Keywords: quasi-periodic function, dimension theory, diophantine approximation, fractal dimension.

References

1. Anikushin M. M., "Dimension theory approach to the complexity of almost periodic trajectories", *International Journal of Evolution Equations* **10**(3–4), 215–232 (2017).
2. Anikushin M. M., "Badly approximable numbers and the growth rate of the inclusion length of an almost periodic function", *Proc. of International Student Conference in Saint-Petersburg State University "Science and Progress"*, 46–50 (2016).
3. Cassels J. W. S., *An introduction to Diophantine approximation* (Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics No. 45, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1957).
4. Naito K., "Fractal dimensions of almost periodic attractors", *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **16**(4), 791–803 (1996).
5. Siegel C. L., *Lectures on the geometry of numbers* (Springer Science & Business Media, 2013).
6. Anikushin M. M., "Dimensional aspects of almost periodic dynamics", In book: [8].

*This work is supported by the German-Russian Interdisciplinary Science Center (G-RISC) funded by the German Federal Foreign Office via the German Academic Exchange Service (DAAD) (project M-2017a-5, Project M-2017b-9) and the Leading Scientific Schools of Russia (project NSh-2858.2018.1).

7. Moser J., “On commuting circle mappings and simultaneous diophantine approximations”, *Mathematische Zeitschrift* **205**(1), 105–121 (1990).

8. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Reitmann V., *Attractor dimension estimates for dynamical systems: theory and computation* (Springer International Publishing AG, Switzerland, 2019).

9. Leonov G. A., Alexeeva T. A., “Estimates of the Lyapunov dimension of attractors for generalized Rössler systems”. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **47**(4), 154–158 (2014). https://doi.org/10.3103/S1063454114040050

10. Pankov A. A., *Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations* (Kluwer Academic Publishers, London, 1990).

11. Yakubovich V. A., “Method of matrix inequalities in theory of nonlinear control systems stability. I. Forced oscillations absolute stability”, *Avtomat. i Telemekh.* **25**(7), 1017–1029 (1964). (In Russian)

12. Yakubovich V. A., “Periodic and almost periodic limiting states of control systems with several, in general discontinuous, nonlinear terms”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **171**(3), 533–536 (1966). (In Russian)

13. Hunt B. R., Sauer T., Yorke J. A., “Prevalence: a translation-invariant “almost every” on infinite-dimensional spaces”, *Bulletin of the American Mathematical Society* **27**(2), 217–238 (1992).

14. Pontryagin L. S., *Topological groups* (Nauka Publ., Moscow, 1973). (In Russian)

15. Zinchenko I. L., “The group of characters on the closure of the almost periodic trajectory of an autonomous system of differential equations”, *Differentsial'nye Uravneniya* **24**(6), 1043–1045 (1988). (In Russian)

16. Cartwright M. L., “Almost periodic flows and solutions of differential equations”, *Proc. London Math. Soc.* **3**(2), 355–380 (1967).

17. Samoilenko A. M., *Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations* (Springer Science & Business Media, Dordrecht, 1991).

Received: December 5, 2018
Revised: March 10, 2019
Accepted: March 21, 2019

Author's information:

Mikhail M. Anikushin — demolishka@gmail.com