УДК 519.8 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2019. Т. 15. Вып. 2
MSC 05C70

Моделирование влияния среди участников образовательного коллектива*

В. В. Мазалов[1,2], *Ю. А. Дорофеева*[2,3], *Е. Н. Коновальчикова*[4]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Институт прикладных математических исследований, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук», Российская Федерация,
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
[3] Петрозаводский государственный университет, Российская Федерация,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
[4] Забайкальский государственный университет, Российская Федерация,
672039, Чита, ул. Александро-Заводская, 30

Для цитирования: *Мазалов В. В., Дорофеева Ю. А., Коновальчикова Е. Н.* Моделирование влияния среди участников образовательного коллектива // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 2. С. 259–273. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.209

В статье рассматривается задача определения рейтинга среди участников образовательных коллективов различного уровня: общеобразовательных школ, колледжей, университетов. Описаны модели рейтингов преподавателей и учащихся (студентов). В основе метода лежит модель Де Гроота с использованием матрицы влияния, вычисленной для разных типов образовательных коллективов, представленных принципалами и учащимися. В процессе обучения участники образовательного коллектива влияют друг на друга путем обсуждения вопросов, обмена мнениями и т. д. Для принципала важна обратная связь от обучаемых, которая является степенью влияния, на ней сфокусировано внимание в данной работе. К важным аспектам относится вес участников в коллективе. Он определяется предельным вектором для матрицы. Представлены к рассмотрению несколько сценариев, а именно: учебный коллектив с одним и двумя принципалами, а также с различными подгруппами учащихся по уровню подготовки. Влияние принципала в сценариях также варьируется. Он может влиять одинаково на всех участников либо по-разному, в зависимости от рейтингов учащихся. Предложена интерпретация полученных значений рейтингов, приведены результаты численного моделирования для различных матриц влияния.

Ключевые слова: рейтинг, образовательный коллектив, модель репутаций, матрица влияния.

Введение. В данной работе предложена математическая модель ранжирования участников учебного процесса в образовательном коллективе, который состоит из преподавателей, называемых принципалами, и учеников. Каждый ученик в образовательном коллективе имеет определенный рейтинг, в зависимости от которого все ученики объединяются в подгруппы, причем в одной подгруппе рейтинги участников одинаковые. В моделях рассматриваемого типа принцип Де Гроота является основным при определении уровня доверия участников друг другу. При этом применяется стохастическая матрица доверия вида $A \in [0,1]^{n\times n}$, в которой a_{ij} — уровень доверия участника i к участнику j. Предполагается, что доверие каждого участника коллектива распределяется между всеми n членами коллектива, в том числе и к самому себе,

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01079).

т. е. $\forall i \ \ a_{ij} \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. Модель Де Гроота используется в задачах моделирования переговоров. Предположим, что в начальный момент времени участники переговоров $N = \{1, 2, ..., n\}$ имели некое мнение $x_i(0), \ i = 1, ..., n$. Тогда, если в момент времени t мнение коллектива было $x_i(t), \ i = 1, ..., n$, то в следующий момент времени оно меняется с учетом доверия участников друг к другу, т. е. $\forall i \ x_i(t+1) = \sum\limits_{j}^{n} a_{ij} x_j(t)$. В матричной форме данное условие имеет вид $x(t+1) = Ax(t)$, $t = 0, 1, \ldots, x(0) = x_0$. Итерируя t раз, получается, что мнение коллектива в момент времени t вычисляется по формуле $x(t) = A^t x(0)$ [1]. Поскольку матрица доверия A стохастическая, то в случае выполнения условия эргодичности [2] матрица A^t при больших t сходится к предельной матрице A^*, у которой все строчки одинаковы и представляют некий вектор $S = (s_1, s_2, ..., s_n)$, его компоненты называются репутациями участников из N. Тогда результатом переговоров будет решение $x^* = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i x_i(0)$, которое называется консенсусом [1–4]. В работе [5] коллектив представлен в виде ориентированного графа, вершины которого — это члены коллектива, а дуги показывают взаимосвязи между ними. В ней в качестве центра выступает руководитель, рассмотренная модель описывает взаимоотношения в коллективе между сотрудниками и руководителем. В работе [6] изложены основы теории рефлексивных игр. Целью этой теории является предсказание индивидуального выбора каждого участника группы. Координация связей интересов всего коллектива с интересами отдельного его субъекта происходит согласно принципу запрета эгоизма, т. е. любой из участников не наносит ущерб коллективу, придерживаясь своих целей. В исследовании [7] участники сети объединяются в подгруппы для получения обобщенных совокупных показателей. Таким образом, динамика мнений базируется на агрегатных функциях, затем устанавливается сходимость мнений. Существуют также динамические постановки задач достижения консенсуса [8], в том числе и с отличающимся от полученным Де Гроотом видом уравнений [3, 9]. Стоит отметить значимые результаты в этой области, приведенные в работах [10, 11]. Авторами [12] была исследована модель динамики мнений в социальной сети с двумя центрами влияния (принципалами), основой которой служит модель Де Гроота. Были найдены условия существования консенсуса в моделях с зависимыми и независимыми центрами влияния, а также введено понятие консенсуса большинства.

В отличие от работы [12] нас будут интересовать не консенсус и условия его достижения, а изменение рейтингов участников образовательного коллектива в зависимости от параметров модели: количество групп с разными рейтингами, степень влияния принципалов на членов большинства и т. д. Будем использовать модель Де Гроота для моделирования влияния в образовательном коллективе, состоящем из одного или двух преподавателей-принципалов, и некоторого числа учащихся. В процессе обучения участники образовательного коллектива для усвоения предмета влияют друг на друга путем обсуждения вопросов, обмена мнениями и т. д. Для принципала важна обратная связь от обучаемых, которую он распределяет в соответствии с их уровнем знаний. Ее можно назвать степенью влияния, она и будет центром внимания в данной работе. Так же, как в модели переговоров, степень влияния участников образовательного коллектива друг на друга описывается квадратной матрицей $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$, где элемент матрицы a_{ij} — степень влияния участника j на участника i в образовательном коллективе, n — количество участников коллектива. Матрицу A

будем называть матрицей влияния, основным требованием к которой является стохастичность, т. е. $\forall i \in N \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. Здесь нас будет интересовать не динамика мнений, а вес участников в коллективе, который определяется предельным вектором для матрицы $A^t,\ t \to \infty$. Поскольку в любом образовательном коллективе учащиеся различаются уровнем подготовки, то их можно проранжировать от лучшего к худшему. В соответствии со своим рейтингом учащиеся могут быть разбиты на группы, в которые входят участники с одинаковым рейтингом. Таким образом, множество учащихся может быть разделено на m групп с $k_1, \dots, k_m$ участниками ($m > 1$). Для достижения консенсуса в таком коллективе необходимо, чтобы консенсус был достигнут во всех группах учащихся, т. е. предельное влияние участника j на всех участников должно быть одинаково. Будем считать, что участники 1 или 1 и 2 образовательного коллектива — принципалы, не влияющие напрямую друга на друга. Они являются центрами образовательного коллектива. Можно представлять принципалов преподавателями различных дисциплин или интеграцией преподавателей разного профиля, например естественно-научных и гуманитарных предметов. Остальные участники коллектива образуют множество учащихся $N = \{3, \dots, n\}$, которое называется большинством. Предположим, что мнение любого учащегося не может влиять на других участников большинства. Принципалы влияют на членов большинства, и те, в свою очередь, оказывают влияние на принципалов. Пусть δ и σ являются суммарным влиянием большинства на принципалов 1 и 2 соответственно, при этом $\delta, \sigma \in [0, 1]$. Суммарное влияние принципалов на любого участника из матрицы влияния A составляет $1 - \varepsilon$, где $\varepsilon \in [0, 1)$. В случае, если большинство разделено на m групп, то суммарное влияние принципалов на любого участника i-й группы будет равно $1 - \varepsilon_i$, где $i = 1, \dots, m$. Примем, что суммарное влияние принципалов распределяется между центрами в соотношении λ и $1 - \lambda$, где $\lambda \in (0, 1)$. Далее найдем явные выражения для рейтингов в образовательном коллективе, в котором большинство разбито на несколько групп, согласно рейтингу учащихся.

Модель с одним принципалом и несколькими подгруппами участников. Пусть образовательный коллектив состоит из $n+1$ участников, в котором участник 1 является принципалом, а большинство $N = \{1, \dots, n\}$ — учениками. Предположим, что большинство N, согласно некоторому рейтингу, разбилось на две группы: N_1 — множество учеников, имеющих первый рейтинг, N_2 — множество учеников, имеющих второй рейтинг. Пусть k_1 — количество учеников в группе N_1, тогда $n - k_1$ — количество учащихся в группе N_2. Учитывая ранее введенные обозначения, матрица влияния имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1-\delta & \dfrac{\delta}{n} & \dots & \dfrac{\delta}{n} & \dfrac{\delta}{n} & \dots & \dfrac{\delta}{n} \\ 1-\varepsilon_1 & \varepsilon_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-\varepsilon_1 & 0 & \dots & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1-\varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-\varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Поскольку множество учащихся разбито на две группы, то вектор предельного влияния $S = (s_0, \underbrace{s_1, \dots, s_1}_{k_1}, \underbrace{s_2, \dots, s_2}_{n-k_1})$, где s_0 — предельное влияние принципала; s_1 — предельное влияние учащихся группы N_1; s_2 — предельное влияние учащихся группы N_2. Кратко вектор предельного влияния можно записать как $S = (S_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, здесь элемент S_j определяется по правилу

$$S_j = \begin{cases} s_0, \ j = 0, \\ s_1, \ j = 1, \ldots, k_1, \\ s_2, \ j = k_1 + 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Вектор предельного влияния является решением матричного уравнения $S \cdot A = S$ или системы уравнений

$$\begin{cases} s_0(1-\delta) + s_1 k_1 (1-\varepsilon_1) + s_2 (n - k_1)(1-\varepsilon_2) = s_0, \\ s_0 \cdot \dfrac{\delta}{n} + s_1 \varepsilon_1 = s_1, \\ s_0 \cdot \dfrac{\delta}{n} + s_2 \varepsilon_2 = s_2. \end{cases} \tag{2}$$

Решая систему уравнений (2), получаем предельное влияние участника j, равное

$$S_j = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \frac{\delta}{n}\left(\frac{k_1}{1-\varepsilon_1} + \frac{n-k_1}{1-\varepsilon_2}\right)}, & j = 0, \\ \dfrac{\frac{\delta}{n} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon_1}}{1 + \frac{\delta}{n}\left(\frac{k_1}{1-\varepsilon_1} + \frac{n-k_1}{1-\varepsilon_2}\right)}, & j = 1, \ldots, k_1, \\ \dfrac{\frac{\delta}{n} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon_2}}{1 + \frac{\delta}{n}\left(\frac{k_1}{1-\varepsilon_1} + \frac{n-k_1}{1-\varepsilon_2}\right)}, & j = k_1 + 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{3}$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда множество учащихся, согласно их рейтингу, разбито на группы $N_1, N_2, \ldots, N_m$, которые содержат $k_1, \ldots, k_m$ учащихся соответственно, причем $k_1 + \ldots + k_m = n$. В этом случае матрица влияния имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1-\delta & \dfrac{\delta}{n} & \ldots & \dfrac{\delta}{n} & \dfrac{\delta}{n} & \ldots & \dfrac{\delta}{n} \\ 1-\varepsilon_1 & \varepsilon_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-\varepsilon_1 & 0 & \ldots & \varepsilon_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-\varepsilon_m & 0 & \ldots & 0 & \varepsilon_m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-\varepsilon_m & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_m \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Аналогично для получения вектора предельного влияния необходимо решить матричное уравнение $S \cdot A = S$ с матрицей (4) или систему уравнений

$$\begin{cases} s_0(1-\delta) + \sum\limits_{j=1}^{m} s_j (1-\varepsilon_j) k_j = s_0, \quad j = 0, \\ s_0 \cdot \dfrac{\delta}{n} + s_j \varepsilon_j = s_j, \quad j = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{5}$$

Решая систему уравнений (5), получаем, что вектор предельного влияния состоит из элементов, которые находятся по правилу

$$S_j = \begin{cases} s_0, \quad j=0, \\ \dfrac{\delta}{n(1-\varepsilon_l)} \cdot s_0, \quad j = \sum\limits_{r=1}^{l-1} k_r + 1, \ldots, \sum\limits_{r=0}^{l} k_r, \quad l = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{6}$$

где $s_0 = \dfrac{1}{1 + \frac{\delta}{n} \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{k_j}{1-\varepsilon_j}}$.

Пример 1. Предположим, что учебная группа состоит из 15 учащихся, которые ранжированы согласно среднему баллу по всем предметам. Естественно считать, что для успешных учеников значение ε выше, чем у других учеников, и успешные ученики будут иметь более высокий рейтинг. Пусть в соответствии с рейтингом группа учащихся разделена на две подгруппы: первая включает 10 учеников с высоким рейтингом, а вторая — 5 учеников с низким рейтингом. Данную учебную группу обучает один преподаватель (принципал), который одинаково относится ко всем учащимся. Допустим, что суммарная оценка преподавателем способностей учеников составляет $\delta = 0.6$, а влияние преподавателя на учеников первой и второй подгрупп соответственно равно $1 - \varepsilon_1 = 0.2$, $1 - \varepsilon_2 = 0.8$. В этом случае матрицу влияния с учетом рейтинга учеников можно представить следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.04 & 0.04 & \ldots & 0.04 & \ldots & 0.04 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.8 & 0 & 0 & \ldots & 0.2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.8 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Для данного образовательного коллектива вектор предельного влияния участников $S = (0.31, \underbrace{0.061, \ldots, 0.061}_{10}, \underbrace{0.015, \ldots, 0.015}_{5})$. С увеличением суммарного влияния $\delta \in [0, 1]$ учеников такой учебной группы на преподавателя степень влияния преподавателя уменьшается, а предельное влияние учеников увеличивается (табл. 1). Если в учебной группе, состоящей из 15 учеников, разбиение на подгруппы, согласно рейтингу, таково, что 5 учеников имеют высокий рейтинг, а 10 — низкий, то вектор предельного влияния участников образовательного коллектива с одним преподавателем при различных значениях $\delta \in [0, 1]$ изменится, как показано в табл. 2.

Таблица 1. **Влияние δ на вектор S в модели с одним принципалом ($n = 15$, $k = 10$)**

Параметр	Значение δ										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
s_0	1	0.73	0.57	0.47	0.4	0.35	0.31	0.28	0.25	0.23	0.21
s_1	0	0.024	0.038	0.047	0.053	0.058	0.061	0.064	0.067	0.069	0.07
s_2	0	0.006	0.01	0.012	0.013	0.014	0.015	0.016	0.017	0.017	0.018

Таблица 2. **Влияние δ на вектор S в модели с одним принципалом ($n = 15$, $k = 5$)**

Параметр	Значение δ										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
s_0	1	0.8	0.67	0.57	0.5	0.44	0.4	0.36	0.33	0.31	0.29
s_1	0	0.027	0.044	0.057	0.067	0.074	0.08	0.084	0.089	0.092	0.1
s_2	0	0.007	0.011	0.014	0.017	0.019	0.02	0.021	0.022	0.023	0.024

Численные расчеты показывают, что предельное влияние принципала на коллектив зависит от количества учащихся с высоким рейтингом: чем больше в образовательном коллективе учащихся с высоким рейтингом, тем ниже степень влияния принципала на него.

Влияние отношения к участникам в модели с одним принципалом и несколькими подгруппами участников. Рассмотрим образовательный коллектив, в котором множество учащихся разбито, согласно рейтингу, на группы $N_1, N_2, \ldots, N_m$, состоящих из $k_1, k_2, \ldots, k_m$ учеников, где $k_1 + \ldots + k_m = n$. Предположим, что отношение преподавателя к учащимся зависит от их рейтинга. Поскольку отношение принципала к учащимся разное, то и влияние учеников на принципала будет различным. Пусть δ_i — суммарная оценка преподавателем способностей учащихся группы N_i $(i = 1, \ldots, m)$, тогда матрица влияния участников образовательного коллектива имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1-\delta_1-\ldots-\delta_m & \frac{\delta_1}{k_1} & \ldots & \frac{\delta_1}{k_1} & \ldots & \frac{\delta_m}{k_m} & \ldots & \frac{\delta_m}{k_m} \\ 1-\varepsilon_1 & \varepsilon_1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1-\varepsilon_1 & 0 & \ldots & \varepsilon_1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-\varepsilon_m & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \varepsilon_m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1-\varepsilon_m & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \varepsilon_m \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Вектор предельного влияния $S = (s_0, \underbrace{s_1, \ldots, s_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{s_m, \ldots, s_m}_{k_m})$, здесь степень влияния S_j определяется по формуле

$$S_j = \begin{cases} s_0, \quad j = 0, \\ \dfrac{\delta_j \cdot s_0}{k_j(1-\varepsilon_j)}, \quad j = \sum\limits_{r=1}^{l-1} k_r + 1, \ldots, \sum\limits_{r=0}^{l} k_r, \quad l = 1, \ldots, m, \quad k_0 = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $s_0 = \dfrac{1}{1 + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\delta_j}{1-\varepsilon_j}}$.

Пример 2. Рассмотрим два образовательных коллектива из примера 1. Допустим, что отношение принципала к учащимся с высоким рейтингом выражается показателем $\delta_1 = 0.2$, а к учащимся с низким рейтингом — $\delta_2 = 0.4$. Тогда в первом образовательном коллективе, в котором учащихся с высоким рейтингом больше, чем с низким, матрицу влияния запишем следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.02 & \dots & 0.02 & \dots & 0.04 & \dots & 0.04 \\ 0.2 & 0.8 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0.2 & 0 & \dots & 0.8 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.8 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0.2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.8 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0.2 \end{pmatrix},$$

а вектор предельного влияния $S = (0.4, \underbrace{0.04, \dots, 0.04}_{10}, \underbrace{0.04, \dots, 0.04}_{5})$.

Во втором коллективе, в котором количество учащихся с высоким рейтингом меньше, чем с низким, матрица влияния участников равна

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.04 & \dots & 0.04 & \dots & 0.08 & \dots & 0.08 \\ 0.2 & 0.8 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0.2 & 0 & \dots & 0.8 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.8 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0.2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.8 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0.2 \end{pmatrix},$$

а вектор предельного влияния $S = (0.4, \underbrace{0.08, \dots, 0.08}_{5}, \underbrace{0.02, \dots, 0.02}_{10})$.

Таким образом, увеличение количества учащихся с одинаковым рейтингом ведет к уменьшению их значимости в коллективе.

Модель с двумя принципалами и несколькими подгруппами участников. Пусть в образовательном коллективе с учащимися работают два принципала, которые преподают разные дисциплины, например естественно-научного и гуманитарного характера. Для определенности допустим, что участники 1 и 2 коллектива являются принципалами, а остальные — учениками, множество которых обозначим $N = \{1, \dots, n\}$. Аналогично предыдущему случаю предположим, что множество учащихся разбито, согласно некоторому рейтингу, на две группы N_1 и N_2. В группу N_1 входят k_1 учеников с первым рейтингом, а группа N_2 состоит из k_2 учеников, имеющих второй рейтинг, причем $k_1 + k_2 = n$. Независимо от рейтинга учащихся в коллективе отношение обоих принципалов ко всем учащимся одинаково, поэтому суммарное влияние учащихся на первого и второго принципалов соответственно равно δ и σ, $\delta, \sigma \in [0, 1]$.

Матрица влияния в модели с двумя принципалами и несколькими подгруппами участников имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 1-\delta & 0 & \frac{\delta}{n} & \dots & \frac{\delta}{n} & \frac{\delta}{n} & \dots & \frac{\delta}{n} \\ 0 & 1-\sigma & \frac{\sigma}{n} & \dots & \frac{\sigma}{n} & \frac{\sigma}{n} & \dots & \frac{\sigma}{n} \\ \lambda(1-\varepsilon_1) & (1-\lambda)(1-\varepsilon_1) & \varepsilon_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda(1-\varepsilon_1) & (1-\lambda)(1-\varepsilon_1) & 0 & \dots & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda(1-\varepsilon_2) & (1-\lambda)(1-\varepsilon_2) & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda(1-\varepsilon_2) & (1-\lambda)(1-\varepsilon_2) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

в котором λ — параметр распределения суммарного влияния на учащихся между принципалами.

Вектор предельного влияния участников образовательного коллектива с двумя принципалами $S=(s_0,s_1,\underbrace{s_2,\dots,s_2}_{k_1},\underbrace{s_3,\dots,s_3}_{k_2})$, где s_0 и s_1 — предельное влияние первого и второго принципалов соответственно, а s_2 и s_3 — предельное влияние учащихся групп N_1 и N_2. Вектор предельного влияния, который можно записать как

$$S_j=\begin{cases} s_0, & j=0,\\ s_1, & j=1,\\ s_2, & j=2,\dots,k_1,\\ s_3, & j=k_1+1,\dots,n,\end{cases}$$

является решением матричного уравнения $S\cdot A=S$ или системы уравнений вида

$$\begin{cases} s_0(1-\delta)+s_2\lambda(1-\varepsilon_1)k_1+s_3\lambda(1-\varepsilon_2)k_2=s_0,\\ s_1(1-\sigma)+s_2(1-\lambda)(1-\varepsilon_1)k_1+s_3(1-\lambda)(1-\varepsilon_2)k_2=s_1,\\ \dfrac{s_0\cdot\delta}{n}+\dfrac{s_1\cdot\sigma}{n}+s_2\varepsilon_1=s_2,\\ \dfrac{s_0\cdot\delta}{n}+\dfrac{s_1\cdot\sigma}{n}+s_3\varepsilon_2=s_3,\\ s_0+s_1+s_2k_1+s_3k_2=1.\end{cases} \tag{10}$$

Решая систему уравнений (10), получаем, что предельное влияние участника j вычисляется по правилу

$$s_j=\begin{cases} s_0, & j=0,\\ s_1, & j=1,\\ \dfrac{\delta s_0+\sigma s_1}{n\cdot(1-\varepsilon_1)}, & j=2,\\ \dfrac{\delta s_0+\sigma s_1}{n\cdot(1-\varepsilon_2)}, & j=3,\end{cases} \tag{11}$$

в котором $s_0=\dfrac{1}{1+\frac{(1-\lambda)\delta}{\lambda\sigma}+\frac{\delta}{\lambda n}\left(\frac{k_1}{1-\varepsilon_1}+\frac{k_2}{1-\varepsilon_2}\right)}$ и $s_1=\dfrac{1}{1+\frac{\sigma\lambda}{\delta(1-\lambda)}+\frac{\sigma}{(1-\lambda)n}\left(\frac{k_1}{1-\varepsilon_1}+\frac{k_2}{1-\varepsilon_2}\right)}$.

В общем случае, когда множество учащихся N, согласно некоторому рейтингу, разбито на m групп, содержащих $k_1,\dots,k_m$ учащихся ($k_1+\dots+k_m=n$), матрицу влияния запишем так:

$$A=\begin{pmatrix} 1-\delta & 0 & \frac{\delta}{n} & \dots & \frac{\delta}{n} & \dots & \frac{\delta}{n} & \dots & \frac{\delta}{n}\\ 0 & 1-\sigma & \frac{\sigma}{n} & \dots & \frac{\sigma}{n} & \dots & \frac{\sigma}{n} & \dots & \frac{\sigma}{n}\\ \lambda(1-\varepsilon_1) & (1-\lambda)(1-\varepsilon_1) & \varepsilon_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda(1-\varepsilon_1) & (1-\lambda)(1-\varepsilon_1) & 0 & \dots & \varepsilon_1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda(1-\varepsilon_m) & (1-\lambda)(1-\varepsilon_m) & 0 & \dots & 0 & \dots & \varepsilon_m & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \lambda(1-\varepsilon_m) & (1-\lambda)(1-\varepsilon_m) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \varepsilon_m \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Вектор предельного влияния $S=(s_0,s_1,\underbrace{s_2,\dots,s_2}_{k_1},\dots,\underbrace{s_{m+1},\dots,s_{m+1}}_{k_m})$, здесь степень влияния S_j определяется по формуле

$$S_j=\begin{cases} s_0, \quad j=0,\\ s_1, \quad j=1,\\ \dfrac{\delta s_0+\sigma s_1}{n\cdot(1-\varepsilon_j)}, \quad j=\sum\limits_{r=1}^{l-1}k_r+1,\dots,\sum\limits_{r=0}^{l}k_r, \quad l=1,\dots,m, \quad k_0=0, \end{cases} \tag{13}$$

где компоненты предельного влияния принципалов вычисляются следующим образом:

$$s_0=\frac{1}{1+\frac{(1-\lambda)\delta}{\lambda\sigma}+\frac{\delta}{\lambda n}\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{k_j}{1-\varepsilon_j}}, \qquad s_1=\frac{1}{1+\frac{\sigma\lambda}{\delta(1-\lambda)}+\frac{\sigma}{(1-\lambda)n}\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{k_j}{1-\varepsilon_j}}.$$

Пример 3. Рассмотрим образовательный коллектив с двумя преподавателями, в котором множество учащихся разбито, согласно некоторому рейтингу, на две подгруппы. Допустим, что первая подгруппа состоит из 10 учеников с высоким рейтингом, а вторая — из 5 учеников со средним рейтингом. Суммарное влияние учащихся на первого принципала описывается параметром $\delta=0.2$, а на второго принципала — $\sigma=0.4$. Влияние преподавателей на учеников первой и второй подгрупп соответственно равно $1-\varepsilon_1=0.8$, $1-\varepsilon_2=0.2$. Если влияние учеников на преподавателей распределено одинаково (т. е. $\lambda=0.5$), то матрица влияния участников данного образовательного коллектива имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.013 & \dots & 0.013 & \dots & 0.013 & \dots & 0.013\\ 0 & 0.6 & 0.03 & \dots & 0.03 & \dots & 0.03 & \dots & 0.03\\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0.4 & 0.4 & 0 & \dots & 0.2 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0.1 & 0.1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0.8 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0.1 & 0.1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0.8 \end{pmatrix},$$

вектор предельного влияния $S=(0.4,0.2,\underbrace{0.013,\dots,0.013}_{10},\underbrace{0.053,\dots,0.053}_{5})$.

При $\lambda = 0.4$ матрица влияния для этого коллектива будет равна

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.013 & \dots & 0.013 & \dots & 0.013 & \dots & 0.013 \\ 0 & 0.6 & 0.03 & \dots & 0.03 & \dots & 0.03 & \dots & 0.03 \\ 0.32 & 0.48 & 0.2 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.32 & 0.48 & 0 & \dots & 0.2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.08 & 0.24 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0.8 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0.08 & 0.24 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0.8 \end{pmatrix},$$

а вектор предельного влияния его участников

$$S = (0.33, 0.25, \underbrace{0.014, \dots, 0.014}_{10}, \underbrace{0.056, \dots, 0.056}_{5}).$$

Допустим, что в первой подгруппе 5 учеников, а во второй — 10 учеников. Тогда при тех же параметрах вектор предельного влияния участников для $\lambda = 0.5$ равен

$$S = (0.33, 0.17, \underbrace{0.011, \dots, 0.011}_{5}, \underbrace{0.044, \dots, 0.044}_{10}),$$

а для $\lambda = 0.4$ —

$$S = (0.276, 0.207, \underbrace{0.0115, \dots, 0.0115}_{5}, \underbrace{0.046, \dots, 0.046}_{10}).$$

Влияние отношения к участникам в модели с двумя принципалами и несколькими подгруппами участников. Рассмотрим образовательный коллектив, в котором множество учащихся разбито, согласно рейтингу, на две группы N_1 и N_2, состоящих из k_1 и k_2 учеников, где $k_1 + k_2 = n$. Предположим, что отношение обоих преподавателей к учащимся зависит от их рейтинга. Обозначим δ_i и σ_i — суммарные оценки соответственно первого и второго преподавателя способностей учащихся групп N_i $(i = 1, 2)$. Матрица влияния участников образовательного коллектива в этом случае имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1-\delta_1-\delta_2 & 0 & \frac{\delta_1}{k_1} & \dots & \frac{\delta_1}{k_1} & \frac{\delta_2}{k_2} & \dots & \frac{\delta_2}{k_2} \\ 0 & 1-\sigma_1-\sigma_2 & \frac{\sigma_1}{k_1} & \dots & \frac{\sigma_1}{k_1} & \frac{\sigma_2}{k_2} & \dots & \frac{\sigma_2}{k_2} \\ \lambda(1-\varepsilon_1) & (1-\lambda)(1-\varepsilon_1) & \varepsilon_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda(1-\varepsilon_1) & (1-\lambda)(1-\varepsilon_1) & 0 & \dots & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda(1-\varepsilon_2) & (1-\lambda)(1-\varepsilon_2) & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda(1-\varepsilon_2) & (1-\lambda)(1-\varepsilon_2) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_2 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Элементы вектора предельного влияния в данном случае вычисляются по правилу

$$s_j = \begin{cases} s_0, & j=0, \\ s_1, & j=1, \\ \dfrac{s_0\delta_1 + s_1\sigma_1}{k_1(1-\varepsilon_1)}, & j=2, \\ \dfrac{s_0\delta_2 + s_1\sigma_2}{k_2(1-\varepsilon_2)}, & j=3, \end{cases} \tag{15}$$

где степень влияния первого принципала находится по формуле

$$s_0 = \frac{1}{\frac{(1-\lambda)(\delta_1+\delta_2)}{\lambda(\sigma_1+\sigma_2)}\left(1+\frac{\sigma_1}{1-\varepsilon_1}+\frac{\sigma_2}{1-\varepsilon_2}\right)+\left(1+\frac{\delta_1}{1-\varepsilon_1}+\frac{\delta_2}{1-\varepsilon_2}\right)},$$

а степень влияния второго принципала — по

$$s_1 = \frac{1}{\frac{\lambda(\sigma_1+\sigma_2)}{(1-\lambda)(\delta_1+\delta_2)}\left(1+\frac{\delta_1}{1-\varepsilon_1}+\frac{\delta_2}{1-\varepsilon_2}\right)+\left(1+\frac{\sigma_1}{1-\varepsilon_1}+\frac{\sigma_2}{1-\varepsilon_2}\right)}.$$

Замечание 1. Сравнивая выражения (1)–(15), видно, что в данном случае предельное влияние принципалов s_0 и s_1 на участников коллектива не зависит от размера групп.

Замечание 2. Отношение $\frac{s_0}{s_1}$ может служить характеристикой всего образовательного коллектива. Если принципалы представляют собой разные интегрированные группы преподавателей гуманитарного и естественно-научного циклов и отношение $\frac{s_0}{s_1} > 1$, то данный коллектив имеет интерес к гуманитарным наукам, если $\frac{s_0}{s_1} < 1$ — к предметам естественно-научного цикла. Функциями от λ являются s_0 и s_1, вид которых изображен на рисунке. Несложно определить, что эти кривые пересекаются в точке $\lambda^* = \frac{\delta_1+\delta_2}{\delta_1+\delta_2+\sigma_1+\sigma_2}$. Независимо от рейтингов учащихся предельное влияние первого принципала выше второго, если $\lambda > \lambda^*$, и, наоборот, ниже, если $\lambda < \lambda^*$.

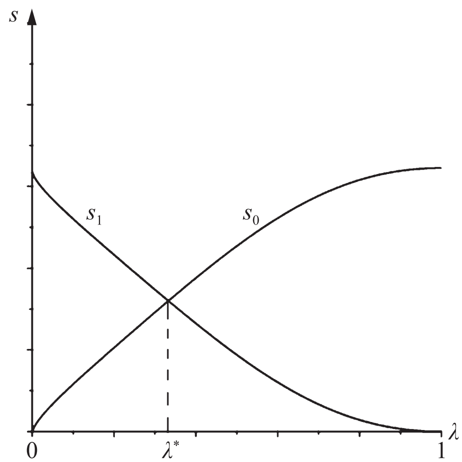

Рисунок. Общий вид s_0 и s_1

Влияние отношения участников к принципалам в модели с двумя принципалами и несколькими подгруппами участников. Рассмотрим образовательный коллектив с двумя принципалами, в котором множество учащихся

$N = \{1, \ldots, n\}$ на основании некоторого рейтинга разбито на две группы N_1 и N_2 по k_1 и k_2 учеников соответственно. Допустим, что отношение учащихся к принципалам отличается в зависимости от принадлежности учеников к группам N_1 и N_2. Суммарное влияние, оказываемое на преподавателя учащимися, тесно связано с отношением учащихся к нему, поэтому влияние учащихся разных групп отличается друг от друга. Пусть δ_1 и δ_2 — суммарное влияние учащихся группы N_1 соответственно на первого и второго принципалов, которое распределяется между принципалами в соотношении λ_1 и $1 - \lambda_1$. Аналогично, показатели σ_1 и σ_2 описывают суммарное влияние учащихся группы N_2 на принципалов, которое распределяется между ними в соотношении λ_2 и $1 - \lambda_2$. Заметим, что $\delta_i, \sigma_i \in [0, 1]$.

В этом случае матрица влияния участников образовательного коллектива имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1-\delta_1-\delta_2 & 0 & \frac{\delta_1}{k_1} & \ldots & \frac{\delta_1}{k_1} & \frac{\delta_2}{k_2} & \ldots & \frac{\delta_2}{k_2} \\ 0 & 1-\sigma_1-\sigma_2 & \frac{\sigma_1}{k_1} & \ldots & \frac{\sigma_1}{k_1} & \frac{\sigma_2}{k_2} & \ldots & \frac{\sigma_2}{k_2} \\ \lambda_1(1-\varepsilon_1) & (1-\lambda_1)(1-\varepsilon_1) & \varepsilon_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1(1-\varepsilon_1) & (1-\lambda_1)(1-\varepsilon_1) & 0 & \ldots & \varepsilon_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_2(1-\varepsilon_2) & (1-\lambda_2)(1-\varepsilon_2) & 0 & \ldots & 0 & \varepsilon_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_2(1-\varepsilon_2) & (1-\lambda_2)(1-\varepsilon_2) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

где ε_1 и ε_2 — суммарное влияние принципалов на учащихся из первой и второй групп соответственно.

Вектор предельного влияния $S = (s_0, s_1, \underbrace{s_2, \ldots, s_2}_{k_1}, \underbrace{s_3, \ldots, s_3}_{k_2})$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} s_0(1-\delta_1-\delta_2) + s_2\lambda_1(1-\varepsilon_1)k_1 + s_3\lambda_2(1-\varepsilon_2)k_2 = s_0, \\ s_1(1-\sigma_1-\sigma_2) + s_2(1-\lambda_1)(1-\varepsilon_1)k_1 + s_3(1-\lambda_2)(1-\varepsilon_2)k_2 = s_1, \\ \dfrac{s_0\delta_1}{k_1} + \dfrac{s_1\sigma_1}{k_1} + s_2\varepsilon_1 = s_2, \\ \dfrac{s_0\delta_1}{k_2} + \dfrac{s_1\sigma_1}{k_2} + s_3\varepsilon_2 = s_3, \\ s_0 + s_1 + s_2k_1 + s_3k_2 = 1. \end{cases}$$

Для решения системы уравнений (16) степень предельного влияния каждого участника образовательного коллектива определяем следующим образом:

$$s_j = \begin{cases} s_0, & j = 0, \\ s_1, & j = 1, \\ \dfrac{\delta_1 s_0 + \delta_1 s_1}{k_1(1-\varepsilon_1)}, & j = 3, \\ \dfrac{\sigma_2 s_0 + \sigma_2 s_1}{k_2(1-\varepsilon_2)}, & j = 4, \end{cases}$$

здесь степень предельного влияния первого принципала вычисляется по формуле

$$s_0 = \frac{1}{1 + \frac{\delta_1(1-\lambda_1)+\delta_2(1-\lambda_2)}{\lambda_1\sigma_1+\lambda_2+\delta_2} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_1}{1-\varepsilon_1} + \frac{\delta_2}{1-\varepsilon_2}\right) + \frac{\delta_1}{1-\varepsilon_1} + \frac{\delta_2}{1-\varepsilon_2}},$$

степень предельного влияния второго принципала — по

$$s_1 = \frac{1}{\frac{\lambda_1\sigma_1+\lambda_2\sigma_2}{\delta_1(1-\lambda_1)+\delta_2(1-\lambda_2)} + \left(1+\frac{\sigma_1}{1-\varepsilon_1}+\frac{\delta_2}{1-\varepsilon_2}\right) + \left(\frac{\delta_1}{1-\varepsilon_1}+\frac{\delta_2}{1-\varepsilon_2}\right)\frac{\lambda_1\sigma_1+\lambda_2\sigma_2}{\delta_1(1-\lambda_1)+\delta_2(1-\lambda_2)}}.$$

Моделирование влияния в образовательном коллективе. В качестве примера рассмотрим образовательный коллектив, состоящий из двух принципалов, представляющих собой группы преподавателей естественно-научной и гуманитарной направленности, и двух групп студентов Института математики Петрозаводского государственного университета. Рейтинг преподавателей оценивается в соответствии с наличием ученой степени. Рейтинг студентов определяется успеваемостью по дисциплинам, преподаваемым принципалами. Важно отметить, что для достоверности получаемых данных о степени влияния принципалов на учебную группу разница их рейтингов должна быть небольшой. В качестве первого принципала рассматривалась группа преподавателей гуманитарной направленности (дисциплины: история, философия, английский язык), второго принципала — группа преподавателей естественно-научной направленности (дисциплины: математический анализ, дифференциальные уравнения, аналитическая геометрия). В соответствии с выбранным критерием оценки рейтинга по наличию ученой степени общий рейтинг первого принципала равен 0.23, а второго — 0.2. Степень влияния группы преподавателей гуманитарной направленности на студентов оценивается как 0.77, а группы естественно-научной направленности — 0.8. С целью оценить влияние участников образовательного коллектива были построены матрицы рейтингов отдельно для двух групп студентов с одними и теми же принципалами. Для нахождения диагональных элементов матриц влияния студентам было предложено определить степень понимания учебного материала по дисциплинам, преподаваемым принципалами, в данном случае это будет их рейтингом, а также оценить их работу. В результате численных расчетов получили, что в первой группе студентов, где успеваемость достаточно низкая, предельная степень влияния первого и второго принципалов на студентов этой группы равна $s_0 = 0.16$ и $s_1 = 0.22$ соответственно. Во второй группе, где успеваемость студентов выше, предельная степень влияния первого принципала равна $s_0 = 0.13$, а второго — $s_1 = 0.17$. Степень влияния принципалов на участников второй группы ниже, чем первой, это объясняется тем, что во второй группе больше студентов с высокими баллами по дисциплинам обоих циклов. Рассмотренную модель можно использовать для установления профессиональной ориентации учебной группы, а также для расчета веса принципалов в коллективе.

Заключение. В исследуемой модели учебного коллектива с одним или двумя преподавателями были рассмотрены различные сценарии отношения участников между собой. В самом коллективе ученики делились на подгруппы по уровню рейтинга. Был найден вектор предельного влияния для каждого такого сценария, компоненты которого являются степенью влияния каждого участника коллектива друг на друга. В качестве иллюстрации полученных результатов осуществлено моделирование влияния в образовательной учебной группе студентов и интегрированных групп преподавателей по различным дисциплинам. Представленную модель можно использовать для определения профессиональной ориентации любой учебной группы на различных ступенях обучения — школа, колледж, университет, а также для вычисления степени предельного влияния принципалов на коллектив.

Литература

1. *DeGroot M. H.* Reaching a consensus // Journal of the American Statistical Association. 1974. Vol. 69, N 345. P. 118–121.
2. *Buechel B., Hellmann T., Klobner S.* Opinion dynamics and wisdom under conformity // Journal of Economic Dynamics & Control. 2015. Vol. 52. P. 240–257.
3. *Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Физматлит, 2010. 228 с.
4. *Чеботарев П. Ю., Агаев Р. П.* Об асимптотике в моделях консенсуса // Управление большими системами. 2013. Т. 43. С. 55–77.
5. *Буре В. М., Екимов А. В., Свиркин М. В.* Имитационная модель формирования профиля мнений внутри коллектива // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 3. С. 93–98.
6. *Лефевр В. А.* Теория рефлексивных игр. М.: Наука, 2009. 218 с.
7. *Grabisch M., Rusinowska A.* A model of influence based on aggregation functions // Mathematical Social Sciences. 2013. Vol. 66. P. 316–330.
8. *Bauso D., Cannon M.* Consensus in opinion dynamics as repeated game // Automatica. 2018. Vol. 90. P. 204–211.
9. *Golub B., Jackson M. O.* Naive learning in social networks and the wisdom of crowds // American Economic Journal. Microeconomics. 2010. Vol. 2, N 1. P. 112–149.
10. *Hegselmann R., Krause U.* Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2002. Vol. 5, N 3. P. 1–33.
11. *Parilina E., Sedakov A.* Stable cooperation in graph-restricted games // Contributions to Game Theory and Management. 2014. Vol. 7. P. 271–281.
12. *Bure V. M., Parilina E. M., Sedakov A. A.* Consensus in a Social Network with two principals // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78, N 8. P. 1489–1499.

Статья поступила в редакцию 14 января 2019 г.
Статья принята к печати 15 марта 2019 г.

Контактная информация:

Мазалов Владимир Викторович — д-р физ.-мат. наук, проф.; vmazalov@krc.karelia.ru

Дорофеева Юлия Александровна — ст. преп., аспирант; julana2008@yandex.ru

Коновальчикова Елена Николаевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; konovalchikova_en@mail.ru

Modeling of influence among the members of the educational team *

V. V. Mazalov[1,2], *J. A. Dorofeeva*[2,3], *E. N. Konovalchikova*[4]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

[2] Institute of Applied Mathematical Research, Federal Research Center “Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences”, 11, Pushkinskaya ul., Petrozavodsk, 185910, Russian Federation

[3] Petrozavodsk State University, 33, pr. Lenina, Petrozavodsk, 185910, Russian Federation

[4] Zabaikalsky State University, 30, Alexandro-Zavodskaya ul., Chita, 672039, Russian Federation

For citation: Mazalov V. V., Dorofeeva J. A., Konovalchikova E. N. Modeling of influence among the members of the educational team. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 2, pp. 259–273.
https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.209 (In Russian)

We study the problem of determining the rating among members of educational groups of different levels: secondary schools, colleges, universities. Models of ratings of teachers and

* This work is supported by Russian Science Foundation (project N 17-11-01079).

students are described. The method is based on the DeGroot model using an influence matrix calculated for different types of educational groups are represented by principals and students. In the process of training, the participants of the educational team influence each other by discussing issues, exchanging views, etc. For the principal, feedback from students is important, which is the degree of influence. It is focused on in this work. Another important aspect is the weight of the participants in the team. It is determined by the limit vector for the matrix. Submitted to the consideration of several scenarios, namely: the training team with one or two principals and various subgrops students according to level of training. The influence of the principal in different scenarios also varies. It can affect all participants in the same way or in different ways. It depends on the rating of students. The interpretation of the obtained values of ratings is offered, the results of numerical modeling for various matrices of influence are given. The presented model can be used to determine the professional orientation of any educational group at different levels of education — school, college, university.

Keywords: rating, educational team, reputation model, influence matrix.

References

1. DeGroot M. H. Reaching a consensus. *Journal of the American Statistical Association*, 1974, vol. 69, no. 345, pp. 118–121.

2. Buechel B., Hellmann T., Klobner S. Opinion dynamics and wisdom under conformity. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 2015, vol. 52, pp. 240–257.

3. Gubanov D. A., Novikov D. A., Chhartrshvili A. G. *Social'nie seti: modeli informatsionnogo vliyania, upravlenia i protivoborstva* [*Social networks: models of information influence, management and confrontation*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 228 p. (In Russian)

4. Chebotarev P. Yu., Agaev R. P. Ob asimptotike v modeliyah konsensusa [On asymptotics in consensus models]. *Upravlenie bol'shimi sistemami* [*Management of large systems*], 2013, vol. 43, pp. 55–77. (In Russian)

5. Bure V. M., Ekimov A. V., Svirkin M. V. Imitatsionnaya model' formirovania profilya mneniy vnutri kollektiva [Imitation model of formation of a profile of opinions in collective]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2014, iss. 3, pp. 93–98. (In Russian)

6. Lefevr V. A. *Teoria refleksivnyh igr* [*Theory of reflexive games*]. Moscow, Nauka Publ., 2009, 218 p. (In Russian)

7. Grabisch M., Rusinowska A. A model of influence based on aggregation functions. *Mathematical Social Sciences*, 2013, vol. 66, pp. 316–330.

8. Bauso D., Cannon M. Consensus in opinion dynamics as repeated game. *Automatica*, 2018, vol. 90, pp. 204–211.

9. Golub B., Jackson M. O. Naive learning in social networks and the wisdom of crowds. *American Economic Journal. Microeconomics*, 2010, vol. 2, no. 1, pp. 112–149.

10. Hegselmann R., Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 2002, vol. 5, no. 3, pp. 1–33.

11. Parilina E., Sedakov A. Stable cooperation in graph-restricted games. *Contributions to Game Theory and Management*, 2014, vol. 7, pp. 271–281.

12. Bure V. M., Parilina E. M., Sedakov A. A. Consensus in a Social Network with two principals. *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 8, pp. 1489–1499.

Received: January 14, 2019.
Accepted: March 15, 2019.

Author's information:

Vladimir V. Mazalov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; vmazalov@krc.karelia.ru

Julia A. Dorofeeva — Chief Lecturer, Postgraduate Student; julana2008@yandex.ru

Elena N. Konovalchikova — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; konovalchikova_en@mail.ru