УДК 519.85 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2019. Т. 15. Вып. 2
MSC 90C90

Обобщенная лемма Гиббса и равновесие по Вардропу

В. Н. Малозёмов, Н. А. Соловьева

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Малозёмов В. Н., Соловьева Н. А.* Обобщенная лемма Гиббса и равновесие по Вардропу // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 2. С. 199–211.
https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.204

В статье сформулирована и доказана обобщенная лемма Гиббса. Ее заключение согласовано с определением равновесия по Вардропу в транспортных сетях. Данное обстоятельство позволяет наиболее естественным путем построить известную задачу выпуклого программирования с линейными ограничениями, решением которой является вектор равновесия по Вардропу. Детально анализируется (с характерными примерами) непростое определение равновесия по Вардропу. Указывается причина появления парадокса Брэсса. Приводится также пример, который демонстрирует, как может меняться вектор равновесия по Вардропу при введении в транспортную сеть дороги с временем проезда, равным нулю.

Ключевые слова: обобщенная лемма Гиббса, равновесие по Вардропу, парадокс Брэсса, выпуклое программирование.

1. Обобщенная лемма Гиббса. Напомним формулировку леммы Гиббса так, как она представлена в книге Дж. М. Данскина [1].

Лемма Гиббса. *Предположим, что вектор* $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ *максимизирует функцию*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

при дополнительных условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = X, \qquad x_i \geqslant 0, \quad i \in 1:n.$$

Предположим также, что функции f_i *дифференцируемы. Тогда существует число* λ *такое, что*

$$\begin{aligned} f_i'(x_i^0) &= \lambda, \quad \text{если } x_i^0 > 0, \\ f_i'(x_i^0) &\leqslant \lambda, \quad \text{если } x_i^0 = 0. \end{aligned}$$

Эта лемма допускает следующее обобщение. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} F(x_1, \dots, x_n) \to \max, \\ \sum_{\beta \in B_\gamma} x_\beta = \chi_\gamma, \quad \gamma \in 1:\ell, \\ x_\beta \geqslant 0, \quad \beta \in 1:n. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь индексные множества B_γ попарно не пересекаются и их объединение равно $1:n$, все числа χ_γ положительны, функция F дифференцируема на множестве $\mathbb{R}^n_+$ векторов $x=(x_1,\ldots,x_n)$ с неотрицательными компонентами.

Обобщенная лемма Гиббса. *Для того чтобы план $x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ задачи (1) был оптимальным, необходимо, а в случае вогнутости функции F на $\mathbb{R}^n_+$ и достаточно, чтобы нашлись числа λ_γ, $\gamma\in 1:\ell$, такие, что*

$$F'_{x_\beta}(x^*)=\lambda_\gamma \quad \text{при} \ \ \beta\in B_\gamma,\ \ x_\beta^*>0, \tag{2}$$

$$F'_{x_\beta}(x^*)\leqslant\lambda_\gamma \quad \text{при} \ \ \beta\in B_\gamma,\ \ x_\beta^*=0. \tag{3}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ — оптимальный план. Возьмем индекс $\beta\in B_\gamma$ такой, что $x_\beta^*>0$. При $\mu\in B_\gamma$, $\mu\neq\beta$ введем функцию

$$\varphi(\varepsilon)=F\bigl(x_1^*,\ldots,x_\beta^*-\varepsilon,\ldots,x_\mu^*+\varepsilon,\ldots,x_n^*\bigr), \qquad \varepsilon\in\bigl[0,x_\beta^*\bigr].$$

Очевидно, что ее максимум достигается при $\varepsilon=0$, поэтому $\varphi'(0)\leqslant 0$. Отсюда следует, что

$$F'_{x_\mu}(x^*)\leqslant F'_{x_\beta}(x^*) \quad \forall\mu\in B_\gamma,\ \ \mu\neq\beta. \tag{4}$$

Если при этом и $x_\mu^*>0$, то справедливо и обратное неравенство. Значит, все производные $F'_{x_\beta}(x^*)$ при $\beta\in B_\gamma$, $x_\beta^*>0$ равны между собой. Обозначив их общее значение через λ_γ, получим формулу (2).

Перепишем неравенство (4) в виде

$$F'_{x_\mu}(x^*)\leqslant\lambda_\gamma \quad \forall\mu\in B_\gamma,\ \ \mu\neq\beta.$$

Очевидно, что последнее неравенство выполняется для всех $\mu\in B_\gamma$, $x_\mu^*=0$. Это соответствует формуле (3) при замене индекса μ на β.

Достаточность. В силу вогнутости функции F на $\mathbb{R}^n_+$, для любого плана x задачи (1) имеем выражение

$$F(x)-F(x^*)\leqslant\langle F'(x^*),x-x^*\rangle=\sum_{\gamma\in 1:\ell}\sum_{\beta\in B_\gamma}F'_{x_\beta}(x^*)\bigl(x_\beta-x_\beta^*\bigr). \tag{5}$$

В силу (2), при всех $\gamma\in 1:\ell$ получаем, что

$$\sum_{\beta\in B_\gamma}F'_{x_\beta}(x^*)\,x_\beta^*=\sum_{\beta\in B_\gamma,\,x_\beta^*>0}F'_{x_\beta}(x^*)\,x_\beta^*=\lambda_\gamma\chi_\gamma.$$

Учитывая (2), (3) и то, что x — план задачи (1), приходим к неравенству

$$\sum_{\beta\in B_\gamma}F'_{x_\beta}(x^*)\bigl(x_\beta-x_\beta^*\bigr)=\sum_{\beta\in B_\gamma}F'_{x_\beta}(x^*)\,x_\beta-\lambda_\gamma\chi_\gamma\leqslant 0.$$

Отсюда и из (5) следует, что $F(x)-F(x^*)\leqslant 0$, т. е. x^* — оптимальный план. $\square$

Отметим, что обобщенная лемма Гиббса по существу является элементарной.

В дальнейшем нам потребуется вариант леммы Гиббса для экстремальной задачи вида

$$\begin{gathered} F(x_1,\ldots,x_n)\to\min,\\ \sum_{\beta\in B_\gamma}x_\beta=\chi_\gamma, \quad \gamma\in 1:\ell,\\ x_\beta\geqslant 0, \quad \beta\in 1:n, \end{gathered} \tag{6}$$

в которой, в отличие от задачи (1), целевая функция F не максимизируется, а минимизируется. Предположение о дифференцируемости функции F сохраняется. В этом случае обобщенная лемма Гиббса формулируется следующим образом:

для того чтобы план $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ задачи (5) был оптимальным, необходимо, а в случае выпуклости функции F на $\mathbb{R}_+^n$ и достаточно, чтобы нашлись числа λ_γ, $\gamma \in 1 : \ell$, такие, что

$$F'_{x_\beta}(x^0) = \lambda_\gamma \quad \text{при} \;\; \beta \in B_\gamma, \;\; x_\beta^0 > 0, \tag{7}$$

$$F'_{x_\beta}(x^0) \geqslant \lambda_\gamma \quad \text{при} \;\; \beta \in B_\gamma, \;\; x_\beta^0 = 0. \tag{8}$$

2. Транспортные сети. Транспортную сеть удобно представлять как ориентированный граф G без петель. Дуги графа — это дороги, вершины графа — перекрестки дорог.

Выделим ℓ пар вершин графа (O_γ, D_γ), $\gamma \in 1 : \ell$. Будем называть элемент O_γ пунктом отправления, а элемент D_γ — пунктом назначения. Предположим, что при каждом $\gamma \in 1 : \ell$ в графе G существует хотя бы один путь из O_γ в D_γ. *Маршрутом* из пункта O_γ в пункт D_γ будем называть путь без циклов, ведущий из вершины O_γ в вершину D_γ.

Пусть из O_γ в D_γ ведут n_γ маршрутов. Обозначим общее число маршрутов в транспортной сети через n, так что $n = n_1 + \cdots + n_\ell$. Сами маршруты упорядочим произвольным образом. Получим общее множество маршрутов $U_1, \ldots, U_n$. Можно считать, что множество индексов $1 : n$ разбито на ℓ подмножеств $B_1, \ldots, B_\ell$ таким образом, что маршруты U_β с номерами β из B_γ ведут из O_γ в D_γ (при каждом γ из $1 : \ell$).

Для примера рассмотрим транспортную сеть, изображенную на рис. 1. В ней выделим две пары вершин (O_1, D_1) и (O_2, D_2). Пункт отправления O_1 с пунктом назначения D_1 соединяют два маршрута $(O_1 A D_1)$ и $(O_1 B C D_1)$, $n_1 = 2$; пункт отправления O_2 с пунктом назначения D_2 — три маршрута $(O_2 O_1 B C D_2)$, $(O_2 B C D_2)$ и $(O_2 E D_2)$, $n_2 = 3$. Общее количество n маршрутов в сети равно 5.

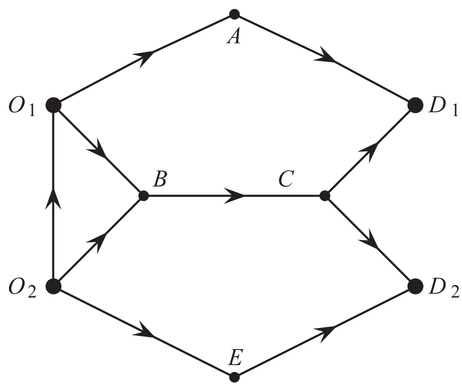

Рис. 1. Транспортная сеть с 8 вершинами

Перенумеруем все маршруты, к примеру, так:

$$U_1 = (O_1 A D_1), \quad U_2 = (O_1 B C D_1), \quad U_3 = (O_2 O_1 B C D_2),$$
$$U_4 = (O_2 B C D_2), \quad U_5 = (O_2 E D_2).$$

В данном случае $B_1 = 1 : 2$, $B_2 = 3 : 5$.

3. Транспортные потоки. Введем количественную характеристику транспортного потока. Будем говорить, что поток транспортных средств имеет плотность p, если в течение единицы времени мимо наблюдателя проходит p транспортных средств. Плотность потока считается постоянной во времени.

Для каждого номера γ из $1 : \ell$ зафиксируем общую плотность χ_γ потока, который следует из пункта отправления O_γ в пункт назначения D_γ. Наша задача состоит в том, чтобы распределить этот общий поток по маршрутам в каком-то смысле наилучшим образом.

Допустим, что по маршруту U_β с номером $\beta \in 1 : n$ идет поток с плотностью $x_\beta \geqslant 0$. *Вектором потока* (или просто *потоком*) в транспортной сети будем называть вектор-столбец

$$x = \big(x_1, \ldots, x_n\big)^{\mathrm{T}}.$$

На вектор потока x накладываются естественные ограничения:

$$\sum_{\beta \in B_\gamma} x_\beta = \chi_\gamma \quad \text{при каждом } \gamma \in 1 : \ell, \qquad x_\beta \geqslant 0 \quad \text{при всех } \beta \in 1 : n. \tag{9}$$

Поток x, удовлетворяющий условиям (9), называется *допустимым*.

Дальнейшая формализация связана с рассмотрением дуг графа G (дорог) $u_1, \ldots, u_N$, входящих хотя бы в один маршрут U_β, $\beta \in 1 : n$. Через p_α будем обозначать плотность потока, идущего по дороге u_α. Зададим матрицу $C = (c_{\alpha\beta})_{\alpha \in 1:N,\, \beta \in 1:n}$ следующим образом:

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } u_\alpha \text{ входит в маршрут } U_\beta, \\ 0, & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Поток p_α по дороге u_α вычисляется по формуле

$$p_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\, x_\beta. \tag{10}$$

Каждой дороге u_α сопоставим время t_α прохождения по ней транспортного средства. Это время зависит от плотности p потока автомашин, идущих по дороге. Будем предполагать, что при $p \geqslant 0$ функция $t_\alpha(p)$ неотрицательна, непрерывна и не убывает.

Определим время $T_\beta(x)$ прохождения одного транспортного средства по маршруту U_β:

$$T_\beta(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} c_{\alpha\beta}\, t_\alpha(p_\alpha), \tag{11}$$

где поток p_α вычисляется по формуле (10). Подробнее,

$$T_\beta(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} c_{\alpha\beta}\, t_\alpha\left(\sum_{\beta'=1}^{n} c_{\alpha\beta'} x_{\beta'}\right).$$

Здесь x — допустимый поток.

Отметим, что величина $T_\beta(x)$ может быть положительной, даже если поток x_β по маршруту U_β нулевой. Дело в том, что в маршруте U_β может встретиться дорога u_α, которая используется другим маршрутом $U_{\beta'}$ с положительным потоком $x_{\beta'}$.

В таком случае поток

$$p_\alpha = \sum_{\beta'=1}^{n} c_{\alpha\beta'}\, x_{\beta'}$$

по указанной дороге положителен. Если функция t_α этой дороги не является тождественным нулем, то в правой части формулы (11) появится положительное слагаемое $t_\alpha(p_\alpha)$. Положительной будет и величина $T_\beta(x)$.

Данная особенность определения $T_\beta(x)$ служит причиной появления парадокса Брэсса [2]. Более подробно об этом пойдет речь в п. 7.

Общее время прохождения потока из пункта отправления O_γ в пункт назначения D_γ по транспортной сети вычисляется следующим образом:

$$\widehat{T}_\gamma(x) = \max\{T_\beta(x) \mid \beta \in B_\gamma,\ x_\beta > 0\}. \tag{12}$$

За это время все транспортные средства доберутся из O_γ в D_γ. В случае, когда задана одна пара «пункт отправления—пункт назначения», формула (12) принимает вид

$$\widehat{T}(x) = \max\{T_\beta(x) \mid \beta \in 1:n,\ x_\beta > 0\}. \tag{13}$$

4. Пример, в котором используются все введенные выше понятия.

Пример 1. Рассмотрим транспортную сеть, изображенную на рис. 2. Здесь O — пункт отправления, D — пункт назначения, $\ell = 1$. Рядом с каждой дугой u_α указано время $t_\alpha(p)$ проезда по ней (в зависимости от плотности потока p).

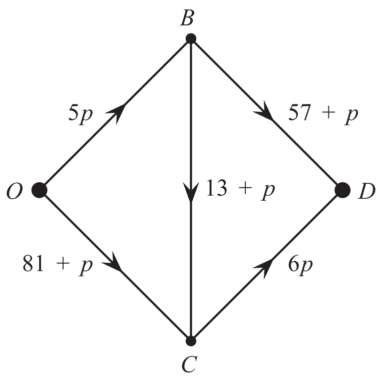

Рис. 2. Транспортная сеть с 4 вершинами

Упорядочим дуги графа. Пусть

$$\begin{aligned}
u_1 &= OB, & t_1(p) &= 5p;\\
u_2 &= OC, & t_2(p) &= 81 + p;\\
u_3 &= BD, & t_3(p) &= 57 + p;\\
u_4 &= CD, & t_4(p) &= 6p;\\
u_5 &= BC, & t_5(p) &= 13 + p.
\end{aligned} \tag{14}$$

Пункты O и D соединяют три маршрута: $U_1 = (OBD)$, $U_2 = (OCD)$ и $U_3 = (OBCD)$. Матрица $C = (c_{\alpha\beta})_{\alpha\in 1:5,\, \beta\in 1:3}$ принимает вид (формируется по столбцам)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим общий поток χ из O в D равным 12 транспортным средствам в единицу времени. Распределим его по трем маршрутам произвольным образом. Например, по маршруту U_1 идет поток x_1, равный 4 транспортным средствам в единицу времени, по маршруту U_2 — поток x_2, равный 2 транспортным средствам, по маршруту U_3 — поток x_3, равный 6 транспортным средствам. Вектор потока имеет вид

$$x = (4, 2, 6)^{\mathrm{T}}. \tag{15}$$

По формуле (10) вычислим поток по каждой дороге (дуге):

$$p_1 = x_1 + x_3 = 10, \quad p_2 = x_2 = 2, \quad p_3 = x_1 = 4,$$
$$p_4 = x_2 + x_3 = 8, \quad p_5 = x_3 = 6.$$

Найдем время прохождения транспортного потока по каждому из маршрутов U_1, U_2, U_3. Согласно (11) и (14),

$$\begin{aligned} T_1(x) &= t_1(p_1) + t_3(p_3) = 111, \\ T_2(x) &= t_2(p_2) + t_4(p_4) = 131, \\ T_3(x) &= t_1(p_1) + t_4(p_4) + t_5(p_5) = 117. \end{aligned}$$

На основании (13) заключаем, что время прохождения потока x фиксированной величины 12 из пункта O в пункт D равно

$$\widehat{T}(x) = \max\{T_1(x), T_2(x), T_3(x)\} = 131.$$

Посмотрим, как изменяется время прохождения из O в D потока фиксированной величины 12, если распределить его по маршрутам так:

$$x = (5, 1, 6)^{\mathrm{T}}. \tag{16}$$

(Мы перевели часть потока с маршрута U_2 на маршрут U_1.) Вычислим поток p_α по каждой дуге u_α:

$$p_1 = x_1 + x_3 = 11, \quad p_2 = x_2 = 1, \quad p_3 = x_1 = 5,$$
$$p_4 = x_2 + x_3 = 7, \quad p_5 = x_3 = 6.$$

Найдем время прохождения транспортного потока по каждому из маршрутов U_1, U_2, U_3. Согласно (11) и (14),

$$\begin{aligned} T_1(x) &= t_1(p_1) + t_3(p_3) = 117, \\ T_2(x) &= t_2(p_2) + t_4(p_4) = 124, \\ T_3(x) &= t_1(p_1) + t_4(p_4) + t_5(p_5) = 116. \end{aligned}$$

Время прохождения потока из пункта отправления в пункт назначения равно

$$\widehat{T}(x) = \max\{T_1(x), T_2(x), T_3(x)\} = 124.$$

Отметим, что при переходе от допустимого потока (15) к допустимому потоку (16) общее время прохождения потока $\widehat{T}(x)$ снизилось с 131 до 124 единиц. Обратим также внимание на величины $T_\beta(x)$. Разность по времени между «самым долгим» и «самым быстрым» маршрутами уменьшилась с 20 до 8 единиц.

Представляет интерес так выбрать вектор потока, чтобы время проезда по всем используемым маршрутам было одинаковым (чтобы все транспортные средства прибывали из пункта O в пункт D одновременно). Перейдем к изучению таких потоков в общем случае.

5. Равновесие по Вардропу. Рассмотрим транспортную сеть, описанную в пп. 2 и 3. Напомним определение, приведенное в [3–5].

Определение. *Допустимый вектор потока $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ называется вектором равновесия по Вардропу, если найдутся числа λ_γ, $\gamma \in 1 : \ell$, такие, что*

$$T_\beta(x^0) = \lambda_\gamma \quad \textit{при} \;\; \beta \in B_\gamma, \;\; x_\beta^0 > 0, \tag{17}$$

$$T_\beta(x^0) \geqslant \lambda_\gamma \quad \textit{при} \;\; \beta \in B_\gamma, \;\; x_\beta^0 = 0. \tag{18}$$

Соотношение (17) означает, что время проезда по всем маршрутам из O_γ в D_γ с положительным потоком одинаково (оно обозначается λ_γ). А из соотношения (18) следует, что время проезда по маршрутам с потоком, равным нулю, не меньше, чем время проезда по маршрутам с положительным потоком.

Вернемся к примеру 1 и покажем, что допустимый поток $x^0 = (5, 0, 7)^{\mathrm{T}}$ является вектором равновесия по Вардропу.

Согласно (10) и (11), имеем $p_1^0 = 12$, $p_2^0 = 0$, $p_3^0 = 5$, $p_4^0 = 7$, $p_5^0 = 7$,

$$\begin{aligned} T_1(x^0) &= t_1(p_1^0) + t_3(p_3^0) = 122, \\ T_2(x^0) &= t_2(p_2^0) + t_4(p_4^0) = 123, \\ T_3(x^0) &= t_1(p_1^0) + t_4(p_4^0) + t_5(x_5^0) = 122. \end{aligned}$$

Видим, что условия (17), (18) выполнены с $\lambda = 122$.

6. Переход к экстремальной задаче. Обратим внимание на то, что условия (17), (18) аналогичны условиям (6), (7) обобщенной леммы Гиббса. Это открывает путь к нахождению вектора равновесия по Вардропу. Действительно, если построим функцию $F(x_1, \ldots, x_n)$ со свойством

$$F'_{x_\beta}(x) = T_\beta(x), \qquad \beta \in 1 : n, \tag{19}$$

и решим задачу вида (5), то ее решение x^0 будет допустимым потоком, образующим вектор равновесия по Вардропу.

Построить функцию F, удовлетворяющую условию (19), несложно. Положим, что

$$F(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} f_\alpha\left(\sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\, x_\beta\right), \tag{20}$$

где

$$f_\alpha(y) = \int\limits_0^y t_\alpha(p)\, dp.$$

Лемма. *Функция* $F(x)$ *вида* (20) *выпукла на множестве* $\mathbb{R}^n_+$. *Кроме того, она дифференцируема на* $\mathbb{R}^n_+$ *и выполняется соотношение* (19).

Доказательство. Напомним, что функции $t_\alpha(p)$ при $p \geqslant 0$ непрерывны, неотрицательны и не убывают. Значит, функции $f_\alpha(y)$ при $y \geqslant 0$ непрерывны и выпуклы (в силу того, что $f'_\alpha(y) = t_\alpha(y)$). Такими же свойствами обладает и функция $F(x)$ на $\mathbb{R}^n_+$.

Далее, с помощью формул (10) и (11) получаем, что

$$F'_{x_\beta}(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} f'_\alpha\left(\sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\, x_\beta\right) c_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{N} c_{\alpha\beta}\, t_\alpha\left(\sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\, x_\beta\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} c_{\alpha\beta}\, t_\alpha(p_\alpha) = T_\beta(x).$$

Лемма доказана. □

Теперь рассмотрим задачу выпуклого программирования с линейными ограничениями

$$\begin{gathered} F(x) := \sum_{\alpha=1}^{N} f_\alpha\left(\sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\, x_\beta\right) \to \min, \\ \sum_{\beta\in B_\gamma} x_\beta = \chi_\gamma, \quad \gamma \in 1:\ell, \\ x_\beta \geqslant 0, \quad \beta \in 1:n. \end{gathered} \tag{21}$$

Такая задача появляется, в частности, в работе [2] из других соображений.

Теорема. *Решение задачи* (21) *и только оно является вектором равновесия по Вардропу.*

Доказательство. Пусть x^0 — решение задачи (21). Очевидно, что x^0 — допустимый вектор потока. В силу обобщенной леммы Гиббса, найдутся числа λ_γ, $\gamma \in 1:\ell$, такие, что

$$F'_{x_\beta}(x^0) = \lambda_\gamma, \quad \beta \in B_\gamma, \quad x^0_\beta > 0, \tag{22}$$

$$F'_{x_\beta}(x^0) \geqslant \lambda_\gamma, \quad \beta \in B_\gamma, \quad x^0_\beta = 0. \tag{23}$$

Принимая во внимание формулу (19), заключаем, что x^0 — вектор равновесия по Вардропу.

Наоборот, пусть x^0 — вектор равновесия по Вардропу. Поскольку вектор x^0 определяет допустимый поток, то он является планом задачи (21). Соотношения (17), (18), в силу (19), можно переписать в виде (22), (23). Наконец, по лемме целевая функция $F(x)$ задачи (21) выпукла на $\mathbb{R}^n_+$. Мы находимся в условиях обобщенной леммы Гиббса, согласно которой x^0 — решение задачи (21).

Теорема доказана. □

7. Более сложный пример на построение вектора равновесия по Вардропу.

Пример 2. Рассмотрим транспортную сеть, изображенную на рис. 3. Рядом с каждой дугой указано время проезда по ней (переменная p соответствует плотности потока, идущего по дуге). Зададим три пары «пункт отправления—пункт назначения»: (A, F), (G, D), (A, H).

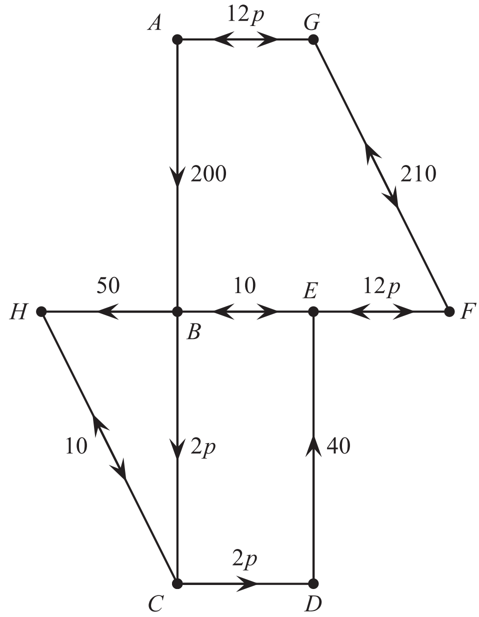

Рис. 3. Еще одна транспортная сеть с 8 вершинами

Упорядочим дуги графа произвольным образом. Пусть

$u_1 = AB,$	$t_1(p) = 200;$	$u_6 = GA,$	$t_6(p) = 12p;$	$u_{11} = BE,$	$t_{11}(p) = 10;$
$u_2 = BC,$	$t_2(p) = 2p;$	$u_7 = GF,$	$t_7(p) = 210;$	$u_{12} = EB,$	$t_{12}(p) = 10;$
$u_3 = CD,$	$t_3(p) = 2p;$	$u_8 = FG,$	$t_8(p) = 210;$	$u_{13} = BH,$	$t_{13}(p) = 50;$
$u_4 = DE,$	$t_4(p) = 40;$	$u_9 = EF,$	$t_9(p) = 12p;$	$u_{14} = HC,$	$t_{14}(p) = 10;$
$u_5 = AG,$	$t_5(p) = 12p;$	$u_{10} = FE,$	$t_{10}(p) = 12p;$	$u_{15} = CH,$	$t_{15}(p) = 10.$

Пункты A и F соединяют маршруты

$$U_1 = (AGF),\ U_2 = (ABEF),\ U_3 = (ABCDEF),\ U_4 = (ABHCDEF);$$

пункты G и D — маршруты

$$U_5 = (GABCD),\ U_6 = (GFEBCD),\ U_7 = (GABHCD),\ U_8 = (GFEBHCD);$$

пункты A и H — маршруты

$$U_9 = (ABH),\ U_{10} = (ABCH),\ U_{11} = (AGFEBH),\ U_{12} = (AGFEBCH).$$

Вектор потока имеет вид $x = (x_1, \ldots, x_{12})^{\mathrm{T}}$.

В данном примере $n = 12$, $N = 15$, $\ell = 3$; $B_1 = 1 : 4$, $B_2 = 5 : 8$, $B_3 = 9 : 12$.

Согласно теореме, вектор равновесия по Вардропу является решением экстремальной задачи (21), в которой

$$f_\alpha(y) = \int_0^y t_\alpha(p)\,dp$$

и

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } u_\alpha \text{ входит в маршрут } U_\beta, \\ 0, & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Целевую функцию задачи (21) можно записать следующим образом:

$$F(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} f_\alpha(p_\alpha),$$

где

$$p_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\, x_\beta.$$

В табл. 1 приведена вспомогательная информация, необходимая для формирования функции $F(x)$.

Таблица 1. **Параметры формирования функции $\boldsymbol{F(x)}$**

α	u_α	$t_\alpha(p)$	p_α	$f_\alpha(p_\alpha)$
1	AB	200	$x_2+x_3+x_4+x_5+x_7+x_9+x_{10}$	$200(x_2+x_3+x_4+x_5+x_7+x_9+x_{10})$
2	BC	$2p$	$x_3+x_5+x_6+x_{10}+x_{12}$	$(x_3+x_5+x_6+x_{10}+x_{12})^2$
3	CD	$2p$	$x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$	$(x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)^2$
4	DE	40	x_3+x_4	$40(x_3+x_4)$
5	AG	$12p$	$x_1+x_{11}+x_{12}$	$6(x_1+x_{11}+x_{12})^2$
6	GA	$12p$	x_5+x_7	$6(x_5+x_7)^2$
7	GF	210	$x_1+x_6+x_8+x_{11}+x_{12}$	$210(x_1+x_6+x_8+x_{11}+x_{12})$
8	FG	210	0	0
9	EF	$12p$	$x_2+x_3+x_4$	$6(x_2+x_3+x_4)^2$
10	FE	$12p$	$x_6+x_8+x_{11}+x_{12}$	$6(x_6+x_8+x_{11}+x_{12})^2$
11	BE	10	x_2	$10x_2$
12	EB	10	$x_6+x_8+x_{11}+x_{12}$	$10(x_6+x_8+x_{11}+x_{12})$
13	BH	50	$x_4+x_7+x_8+x_9+x_{11}$	$50(x_4+x_7+x_8+x_9+x_{11})$
14	HC	10	$x_4+x_7+x_8$	$10(x_4+x_7+x_8)$
15	CH	10	$x_{10}+x_{12}$	$10(x_{10}+x_{12})$

Положим $\chi_1 = 20$, $\chi_2 = 100$, $\chi_3 = 10$. Ограничения задачи (21) в данном случае будут выглядеть так:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20, \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 100, \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 10, \\ x_\beta \geqslant 0, \quad \beta \in 1:12. \end{gathered}$$

Решим сформированную задачу выпуклого программирования в среде MATLAB. Получим вектор равновесия по Вардропу

$$x^0 \approx \begin{pmatrix} 10, & 10, & 0, & 0, & 0.02, & 29.98, & 50.8134, & 19.1867, & 10, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{24}$$

Для проверки вычислим время проезда по маршрутам

из A в F: $\quad T_1(x^0) = T_2(x^0) = 330, \quad T_3(x^0) = T_4(x^0) = 620;$

из G в D: $\quad T_5(x^0) = T_6(x^0) = T_7(x^0) = T_8(x^0) = 1070;$

из A в H: $\quad T_9(x^0) = 250, \quad T_{10}(x^0) = 270, \quad T_{11}(x^0) = 980, \quad T_{12}(x^0) = 1000.$

Видим, что $\lambda_1 = 330$, $\lambda_2 = 1070$, $\lambda_3 = 250$. Маршруты U_3, U_4, U_{10}, U_{11}, U_{12} не используются ($x^0_\beta = 0$). На них $T_\beta(x^0) > \lambda_\gamma$. По определению, вектор (24) — это вектор равновесия по Вардропу.

Добавим в транспортную сеть, изображенную на рис. 3, «нулевой мост» — дорогу GE с нулевым временем проезда по ней. Получившаяся транспортная сеть изображена на рис. 4. Появились дуга $u_{16} = GE$ с функцией задержки $t_{16}(p) \equiv 0$ и новые маршруты $U_{13} = (AGEF)$, $U_{14} = (GEBCD)$, $U_{15} = (GEBHCD)$, $U_{16} = (AGEBH)$, $U_{17} = (AGEBCH)$. Теперь $B_1 = \{1:4, 13\}$, $B_2 = \{5:8, 14, 15\}$, $B_3 = \{9:12, 16, 17\}$.

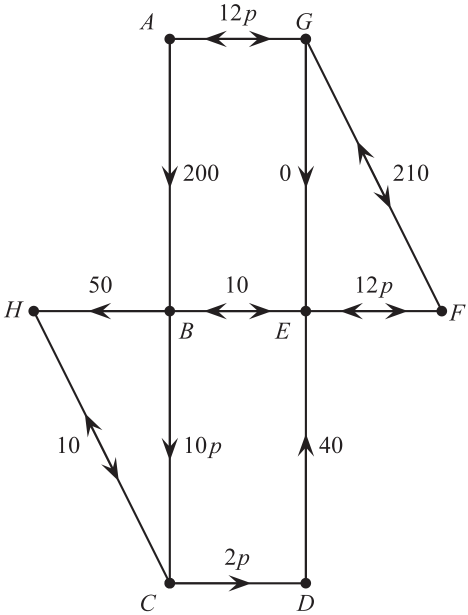

Рис. 4. Транспортная сеть с дополнительной дугой GE

В табл. 2 приведена вспомогательная информация о новой транспортной сети, необходимая для формирования целевой функции $F(x)$ задачи (21). Положим, как и раньше, $\chi_1 = 20$, $\chi_2 = 100$, $\chi_3 = 10$. Ограничения задачи (21) будут выглядеть так:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{13} = 20,$$
$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{14} + x_{15} = 100,$$
$$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{16} + x_{17} = 10,$$
$$x_\beta \geqslant 0, \quad \beta \in 1:17.$$

Решим построенную задачу выпуклого программирования вида (21) в среде MATLAB. Получим вектор равновесия по Вардропу

$$x^0 \approx \big(2.5,\ 2.5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0,\ 0,\ 15,\ 30,\ 70,\ 0,\ 0\big)^{\mathrm{T}}.$$

Видим, что количество неиспользуемых маршрутов (с $x_\beta = 0$) значительно увеличилось (с 5 до 11). Проверим, что вектор x^0 удовлетворяет условиям (17), (18).

Таблица 2. **Параметры новой транспортной сети**

α	u_α	$t_\alpha(p)$	p_α	$f_\alpha(p_\alpha)$
1	AB	200	$x_2+x_3+x_4+x_5+x_7+x_9+x_{10}$	$200(x_2+x_3+x_4+x_5+$ $+x_7+x_9+x_{10})$
2	BC	$2p$	$x_3+x_5+x_6+x_{10}+x_{12}+x_{14}+x_{17}$	$(x_3+x_5+x_6+x_{10}+$ $+x_{12}+x_{14}+x_{17})^2$
3	CD	$2p$	$x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_{14}+x_{15}$	$(x_3+x_4+x_5+x_6+$ $+x_7+x_8+x_{14}+x_{15})^2$
4	DE	40	x_3+x_4	$40(x_3+x_4)$
5	AG	$12p$	$x_1+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{16}+x_{17}$	$6(x_1+x_{11}+x_{12}+x_{13}+$ $+x_{16}+x_{17})^2$
6	GA	$12p$	x_5+x_7	$6(x_5+x_7)^2$
7	GF	210	$x_1+x_6+x_8+x_{11}+x_{12}$	$210(x_1+x_6+x_8+$ $+x_{11}+x_{12})$
8	FG	210	0	0
9	EF	$12p$	$x_2+x_3+x_4+x_{13}$	$6(x_2+x_3+x_4+x_{13})^2$
10	FE	$12p$	$x_6+x_8+x_{11}+x_{12}$	$6(x_6+x_8+x_{11}+x_{12})^2$
11	BE	10	x_2	$10x_2$
12	EB	10	$x_6+x_8+x_{11}+x_{12}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}$	$10(x_6+x_8+x_{11}+x_{12}+$ $+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17})$
13	BH	50	$x_4+x_7+x_8+x_9+x_{11}+x_{15}+x_{16}$	$50(x_4+x_7+x_8+x_9+$ $+x_{11}+x_{15}+x_{16})$
14	HC	10	$x_4+x_7+x_8+x_{15}$	$10(x_4+x_7+x_8+x_{15})$
15	CH	10	$x_{10}+x_{12}+x_{17}$	$10(x_{10}+x_{12}+x_{17})$
16	GE	0	$x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}$	0

Вычислим время проезда по маршрутам

$$\begin{aligned}
&\text{из } A \text{ в } F\text{:} && T_1(x^0)=T_2(x^0)=T_{13}(x^0)\approx 420, \quad T_3(x^0)\approx 710, \quad T_4(x^0)\approx 710;\\
&\text{из } G \text{ в } D\text{:} && T_{14}(x^0)=T_{15}(x^0)\approx 270, \quad T_5(x^0)\approx 460, \quad T_6(x^0)\approx 480,\\
& && T_7(x^0)\approx 460, \quad T_8(x^0)\approx 480;\\
&\text{из } A \text{ в } H\text{:} && T_9(x^0)\approx 250, \quad T_{10}(x^0)\approx 270, \quad T_{11}(x^0)\approx 480, \quad T_{12}(x^0)\approx 500,\\
& && T_{16}(x^0)\approx 270, \quad T_{17}(x^0)\approx 290.
\end{aligned}$$

В данном случае $\lambda_1 \approx 420$, $\lambda_2 \approx 270$, $\lambda_3 \approx 250$. Таким образом, при добавлении в транспортную сеть дороги GE с временем проезда, равным нулю, ситуация значительно улучшилась для водителей, следующих из G в D, не изменилась для водителей, следующих из A в H, и ухудшилась для водителей, следующих из A в F.

В работе [2] приводится пример, когда введение в транспортную сеть дороги с нулевым временем проезда увеличивает время в пути для всех водителей (парадокс Брэсса). Как отмечалось, причина такого явления кроется в специфическом определении времени прохождения транспортного средства по маршруту (формула (11)).

Литература

1. *Данскин Дж. М.* Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения / пер. с англ. М. В. Воронова; под ред. И. Н. Коваленко. М.: Сов. радио, 1970. 200 с. (*Danskin J. M.* The theory of max-min and its application to weapons allocation problems.)

2. *Braess D., Nagurney A., Wakolbinger T.* On a paradox of a traffic planning // Transportation Science. 2005. Vol. 39, N 4. P. 446–450.

3. *Wardrop J. G.* Some theoretical aspects of road traffic research // Proceedings of the Institute of Civil Engineers. 1952. Pt II. P. 325–378.

4. *Patriksson M.* The traffic assignment problem: models and methods. Mineola: Dover Publ., 2015. 240 p.

5. *Мазалов В. В.* Математическая теория игр и приложения. СПб.: Изд-во «Лань», 2016. 448 с.

Статья поступила в редакцию 21 августа 2018 г.
Статья принята к печати 15 марта 2019 г.

Контактная информация:

Малозёмов Василий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.malozemov@sbpu.ru

Соловьева Наталья Анатольевна — канд. физ.-мат. наук, ст. преп.; vinyo@mail.ru

A generalized Gibbs' lemma and a Wardrop equilibrium

V. N. Malozemov, N. A. Solovyeva

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Malozemov V. N., Solovyeva N. A. A generalized Gibbs' lemma and a Wardrop equilibrium. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 2, pp. 199–211.
https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.204 (In Russian)

In the article, a generalized Gibbs' lemma is stated and proved. A conclusion of this lemma corresponds to a definition of Wardrop equilibrium in transport networks. This allows us to naturally introduce a well known convex programming problem with linear constraints whose solution is a Wardrop equilibrium vector. The complicated definition of the Wardrop equilibrium is analyzed in detail (typical examples are given). The reason of the Braess paradox' appearance is specified. A large example, that illustrates how the Wardrop equilibrium vector changes when a road with zero driving time is added into the transport network, is also given.

Keywords: generalized Gibbs' lemma, Wardrop equilibrium, Braess paradox, convex programming.

References

1. Danskin J. M. *The theory of max-min and its application to weapons allocation problems.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag Publ., 1967, 128 p. (Russ. ed.: Danskin J. M. *Teoriya max-min i ee prilozheniya k zadacham raspredeleniya vooruzheniy.* Moscow, Sov. Radio Publ., 1970, 200 p.)

2. Braess D., Nagurney A., Wakolbinger T. On a paradox of a traffic planning. *Transportation Science*, 2005, vol. 39, no. 4, pp. 446–450.

3. Wardrop J. G. Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, 1952, pt II, pp. 325–378.

4. Patriksson M. *The traffic assignment problem: models and methods.* Mineola, Dover Publ., 2015, 240 p.

5. Mazalov V. V. *Matematicheskaia teoria igr i priloghenia* [*Mathematical theory of games and applications*]. Saint Petersburg, Publishing house "Lan'", 2016, 448 p.

Received: August 21, 2018.
Accepted: March 15, 2019.

Author's information:

Vasiliy N. Malozemov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; v.malozemov@sbpu.ru

Natalia A. Solovyeva — PhD in Physics and Mathematics, Senior Teacher; vinyo@mail.ru