ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.71
MSC 91A12

Решения сетевых игр с попарным взаимодействием*

М. А. Булгакова

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Булгакова М. А.* Решение сетевых игр с попарным взаимодействием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 1. С. 147–156. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.112

Работа посвящена кооперативным сетевым играм с попарным взаимодействием. Рассматривается двухшаговая игра, в первом состоянии которой происходит процесс формирования сети, а во втором — одновременные биматричные игры между соседями по сети. Построена характеристическая функция, доказана ее супермодулярность для случая одношаговой подыгры, начинающейся со второго состояния. Для особого класса сетей (сеть-звезда) найдена упрощенная формула вектора Шепли, не требующая вычисления значений характеристической функции по всем коалициям, а только лишь по коалициям размерностью не более двух.

Ключевые слова: кооперативные игры, выпуклость, вектор Шепли, характеристическая функция.

Введение. Теория кооперативных сетевых игр — важная часть современной теории игр, которая будет использоваться для построения решений в играх на сетях со многими участниками. Эта теория включает в себя кооперативную траекторию, стратегии, ее порождающие, выигрыш вдоль кооперативной траектории, а также распределение выигрыша между игроками и анализ динамической устойчивости решений. Сеть иллюстрирует наличие взаимодействия между парами игроков. Впервые попарное взаимодействие на сети, т. е. взаимодействие один на один между игроками, в некооперативной форме было исследовано в [1].

Попарное взаимодействие было рассмотрено и на примере распространения информации и дезинформации в социальных сетях в работе [2]. Эффективность и устойчивость сетей, зависящих от внешних факторов, таких как суммарные предельные издержки, были показаны в [3]. Подходам для нахождения оптимального поведения

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-51-53030).

в многошаговых играх посвящена работа [4]. Условия сильной динамической устойчивости в двухшаговой игре с попарным взаимодействием были найдены в [5]. Динамические свойства кооперативных решений в игре n-лиц были рассмотрены в [6].

В данной статье получены аналитические выражения для характеристической функции в сетевой игре с попарным взаимодействием, а также для подыгры, состоящей из одного шага с фиксированной сетью, доказано свойство выпуклости характеристической функции, что гарантирует непустоту C-ядра и принадлежность C-ядру вектора Шепли. Для особого класса сетей (сеть-звезда) приведены упрощенные формулы вычисления компонент вектора Шепли.

Модель игры. Пусть N — конечное множество игроков, которые принимают решения в двух состояниях, $|N| = n \geqslant 2$. Будем через z обозначать состояние игры. Игра начинается в состоянии z_1 — в нем каждый игрок $i \in N$ выбирает свое поведение $b_i^1 = (b_{i1}^1, \dots, b_{in}^1)$ — n-мерный вектор предложений связи другим игрокам. Введем следующие обозначения: $M_i \subseteq N \setminus i$ — те игроки, которым игрок $i \in N$ может предложить связь, значение $a_i \in \{0, \dots, n-1\}$ равно максимальному числу связей игрока i. Если $M_i = N \setminus \{i\}$, игрок i может предложить связь всем игрокам и, если $a_i = n-1$, игрок i может поддерживать любое число связей.

Для каждого поведения b_i^1 существует такое подмножество $Q_i \subset M_i$, для которого выполняется выражение

$$b_{ij}^1 = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in Q_i, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

при условии

$$\sum_{j \in N} b_{ij}^1 \leqslant a_i. \qquad (1)$$

Условие (1) означает, что число возможных связей ограничено для каждого игрока. Также очевидно, что $|Q_i| \leqslant a_i$.

Связь ij имеет место тогда и только тогда, когда $b_{ij}^1 = b_{ji}^1 = 1$. Сформированные связи ij образуют ребра сети g, вершинами которой являются игроки, т. е. если $b_{ij}^1 = b_{ji}^1 = 1$, то в сети g появляется ребро с концевыми вершинами i и j.

Обозначим через $N_i(g)$ соседей игрока i в сети g, т. е. $N_i(g) = \{j \in N \setminus \{i\} : ij \in g\}$. Далее для краткости иногда вместо $N_i(g)$ будем писать N_i. Результатом первого состояния является сеть $g(b_1^1, \dots, b_n^1)$. После ее формирования игроки переходят в состояние $z_2(g)$, которое обусловливается сетью (от сети зависит множество соседей N_i, а следовательно, и правило взаимодействия между игроками). Во втором состоянии $z_2(g)$ соседи по сети играют попарно в одновременные биматричные игры, после чего игроки получают выигрыши и игра заканчивается. Другими словами, имеем двухшаговую игру $\Gamma_{z_1}(g)$, которая является частным случаем многошаговых неантагонистических игр. Адаптируя к данному случаю определение стратегий, примем, что в рассматриваемом случае стратегия — это правило, которое для каждого игрока определяет множество его соседей в первом состоянии, а именно вектор b_i^1, и поведение в каждой биматричной игре во втором состоянии в соответствии с сетью, которая сформирована в первом состоянии, — b_i^2. Обозначим через $u_i = (b_i^1, b_i^2)$, $i \in N$, стратегию игрока i в двухшаговой игре $\Gamma_{z_1}(g)$. Рассчитаем выигрыш игрока i как $h_i(z_2)$, где (z_1, z_2) — траектория, реализованная в ситуации $u = (u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot))$ в игре $\Gamma_{z_1}(g)$. Так как в первом состоянии игроки не получают выигрыши, то функция выигрыша в игре $\Gamma_{z_1}(g)$ с начальной позицией z_1 определяется следующим образом:

$$K_i(z_1; u) = K_i(z_1; u_i(\cdot), \dots, u_n(\cdot)) = h_i(z_2).$$

Характеристическая функция. Во втором состоянии игра представляет собой семейство попарных одновременных биматричных игр $\{\gamma_{ij}\}$ между соседями на сети. А именно, пусть $i \in N, j \in N_i$. Тогда i играет с j в биматричную игру γ_{ij} с матрицами выигрышей A_{ij} и C_{ji} игроков i и j соответственно:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} & a_{12}^{ij} & \cdots & a_{1k}^{ij} \\ a_{21}^{ij} & a_{22}^{ij} & \cdots & a_{2k}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{ij} & a_{m2}^{ij} & \cdots & a_{mk}^{ij} \end{pmatrix}, \quad C_{ji} = \begin{pmatrix} c_{11}^{ji} & c_{12}^{ji} & \cdots & c_{1k}^{ji} \\ c_{21}^{ji} & c_{22}^{ji} & \cdots & c_{2k}^{ji} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}^{ji} & c_{m2}^{ji} & \cdots & c_{mk}^{ji} \end{pmatrix},$$

$$a_{pl} \geqslant 0, \quad c_{pl} \geqslant 0, \quad p = 1, \ldots, m, \quad l = 1, \ldots, k.$$

Константы m и k одинаковы для всех i и j. Обозначим через $\Gamma_{z_2}^S(g)$ подыгру игры Γ, которая происходит в состоянии z_2. Опишем такую игру в кооперативной форме. Найдем характеристическую функцию для каждого подмножества (коалиции) $S \subset N$ как нижнее (максиминное) значение антагонистической игры двух лиц коалиции S и дополнительной коалиции $N \setminus S$, построенной на основе игры $\Gamma_{z_2}^S(g)$, при этом выигрыш коалиции S рассматривается как сумма выигрышей игроков, входящих в S. Супераддитивность характеристической функции следует из ее определения. Обозначим, что

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \max_p \min_\ell a_{p\ell}^{ij}, \quad p = 1, \ldots, m, \quad \ell = 1, \ldots, k, \\ w_{ji} &= \max_\ell \min_p c_{p\ell}^{ji}, \quad p = 1, \ldots, m, \quad \ell = 1, \ldots, k, \end{aligned}$$

и $v(z_2; S)$, $S \subset N$, — нижнее значение антагонистической игры $\Gamma_{z_2}^S(g)$.

Теорема 1. *Функция $v(z_2; S)$ определяется по следующим формулам*:

$$v(z_2; \{\varnothing\}) = 0, \tag{2}$$

$$v(z_2; \{i\}) = \sum_{j \in N_i} w_{ij}, \tag{3}$$

$$v(z_2; S) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}) + \sum_{i \in S} \sum_{k \in N_i \setminus S} w_{ik}, S \subset N, \tag{4}$$

$$v(z_2; N) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (2) очевидна.

Докажем (3). Поскольку игрок i, действуя против коалиции $N \setminus \{i\}$, играет с игроками j из $N \cap N_i$ в независимые биматричные игры, то в каждой из этих биматричных игр он может себе гарантировать наибольший выигрыш w_{ij}, следовательно, наибольший выигрыш, который игрок i может гарантировать себе во всей игре, — сумма $\sum_{j \in N_i} w_{ij}$. Это и есть в данном случае максиминный выигрыш i против $N \setminus \{i\}$. Формула (3) справедлива.

Докажем формулу (4) для произвольной коалиции S. Каждый из игроков, входящих в S, играет в независимые попарные биматричные игры как с игроками в $N_i \cap S$, так и с игроками в $N_i \cap \{N \setminus S\}$. В первом случае игроки, взаимодействующие внутри S, всегда могут выбрать стратегию, максимизирующую их суммарный выигрыш, т. е. $\sum\limits_{j\in N_i\cap S} \max_{p,\ell}(a^{ij}_{p\ell}+c^{ji}_{p\ell})$. Во втором случае игроки, взаимодействующие с игроками из $N\setminus S$, могут гарантировать себе лишь нижнее значение игры, т. е. величину $\sum\limits_{k\in N_i\setminus S} w_{ik}$. Таким образом, максимальный суммарный выигрыш, который может обеспечить коалиция S, будет равен

$$\frac{1}{2}\sum_{i\in S}\sum_{j\in N_i\cap S}\max_{p,\ell}(a^{ij}_{p\ell}+c^{ji}_{p\ell})+\sum_{i\in S}\sum_{k\in N_i\setminus S} w_{ik}.$$

Формула (5) следует из определения максимального суммарного выигрыша игроков.

В формулах (4) и (5) коэффициент $\frac{1}{2}$ исключает повторное суммирование выигрышей по одним и тем же ребрам. □

Рассмотрим кооперативную форму двухшаговой игры $\Gamma_{z_1}(g)$. Предположим, что игроки выбирают стратегии $\bar{u}_i, i\in N$, которые максимизируют их суммарный выигрыш в игре $\Gamma_{z_1}(g)$, т. е.

$$\sum_{i\in N} K_i(z_1;\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)=\max_u \sum_{i\in N} K_i(z_1;u_1,\ldots,u_n).$$

Ситуацию $\bar{u}=(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)$ будем называть кооперативным поведением, соответствующую траекторию $(\bar{z}_1,\bar{z}_2)$ — кооперативной траекторией, в данном случае состоящую из двух состояний.

Как и раньше, для коалиции $S\subseteq N$ определим характеристическую функцию $v(\bar{z}_1;S)$ как максимин в антагонистической игре двух лиц коалиции S и дополнительной коалиции $N\setminus S$, где выигрыш коалиции S равен сумме выигрышей ее участников и стратегия S — элемент декартова произведения множеств стратегий игроков, входящих в S.

Обозначим через $v(z_1;S)$, $S\subset N$, нижнее значение антагонистической игры $\Gamma_{z_1}(g)$.

Теорема 2. *Функция $v(z_1;S)$ определяется по следующим формулам:*

$$v(\bar{z}_1;\{i\})=0,\quad v(\bar{z}_1;\varnothing)=0, \tag{6}$$

$$v(\bar{z}_1;S)=\frac{1}{2}\sum_{i\in S}\sum_{j\in N_i(g)\cap S}\max_{p,\ell}(a^{ij}_{p\ell}+c^{ji}_{p\ell}),\quad S\subset N, \tag{7}$$

$$v(\bar{z}_1;N)=v(\bar{z}_2;N)=\frac{1}{2}\sum_{i\in N}\sum_{j\in N_i}\max_{p,\ell}(a^{ij}_{p\ell}+c^{ji}_{p\ell}). \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, однако здесь в (7) в отличие от (4) отсутствует второе слагаемое. Оно равно нулю, поскольку минимизирующая стратегия b^1_i игроков из $N\setminus S$ в первом состоянии состоит в отказе от связей с игроками из S. Это следует из неотрицательности выигрышей во всех играх. □

Выпуклость игры. Характеристическая функция называется супермодулярной, а соответствующая ей игра выпуклой [7], если для любых произвольных коалиций $X\subset N$ и $Y\subset N$ выполняется неравенство

$$v(X\cup Y)\geqslant v(X)+v(Y)-v(X\cap Y). \tag{9}$$

Теорема 3. *В подыгре* $\Gamma^S_{z_2}(g)$ *характеристическая функция* (2)–(5) *супермодулярна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем неравенство (9) для характеристической функции (2)–(5). Будем для сокращения записи вместо $\max_{p,\ell}(a^{ij}_{p\ell} + c^{ji}_{p\ell})$ писать m_{ij}. Имеем

$$v(X \cup Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in X\cup Y\\ j\in N_i\\ i\neq j}} m_{ij} + \sum_{\substack{i\in X\cup Y\\ k\in N_i \setminus X\cup Y}} w_{ik}, \tag{10}$$

$$v(X) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in X\\ j\in N_i\\ i\neq j}} m_{ij} + \sum_{\substack{i\in X\\ k\in N_i \setminus X}} w_{ik}, \tag{11}$$

$$v(Y) = \sum_{\substack{i\in Y\\ k\in N_i \setminus Y}} w_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in Y\\ j\in N_i\\ i\neq j}} m_{ij}, \tag{12}$$

$$v(X \cap Y) = \sum_{\substack{i\in X\cap Y\\ j\in X\cap Y\\ i\neq j\\ j\in N_i}} m_{ij} + \sum_{\substack{i\in X\cap Y\\ k\in N_i \setminus X\cap Y}} w_{ik}. \tag{13}$$

Вычитая из (10) выражения (11), (12) и прибавляя (13), получим неравенство

$$\sum_{\substack{i\in X\setminus Y\\ j\in N_i\setminus X}} m_{ij} \geqslant 0,$$

которое следует из неотрицательности выигрышей. Таким образом, неравенство (9) в игре $\Gamma^S_{z_2}(g)$ выполняется. □

Итак, построенная характеристическая функция $v(z_2; S)$ супермодулярна. Это гарантирует непустоту С-ядра и принадлежность вектора Шепли С-ядру.

Вектор Шепли. Поскольку вектор Шепли в подыгре $\Gamma^S_{z_2}(g)$ всегда принадлежит С-ядру, то его значимость в данном классе задач значительно возрастает. Приведем формулу для вектора Шепли для одной конкретной сетевой игры с попарным взаимодействием.

Определим дележ как вектор $\xi[v] = (\xi_1[v], \dots, \xi_n[v])$, который удовлетворяет условиям коллективной рациональности, т. е. $\sum_{i\in N} \xi_i[v] = v(\cdot; N)$, и индивидуальной рациональности, т. е. $\xi_i[v] \geqslant v(\cdot; \{i\})$, для всех $i \in N$. Обозначим множество всех дележей в игре $\Gamma_{z_1}(g)$ через $I(v)$. В качестве дележа возьмем вектор Шепли [8] $\varphi[v] = (\varphi_1[v], \dots, \varphi_n[v])$, где

$$\varphi_i[v] = \sum_{S\subseteq N, i\in S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}[v(S) - v(S\setminus\{i\})], \quad i \in N. \tag{14}$$

Вычисление компонент $\varphi_i[v]$ — достаточно трудный процесс для большого числа игроков. Предположим следующее. Пусть $M_1 = N\setminus\{1\}$, $a_1 = n-1$ и $M_i = \{1\}$, $a_i = 1$ для $i \neq 1$. Тогда в первом состоянии игры в целях максимизации суммарного выигрыша игроки должны выбрать следующие поведения:

$$b^1_i = \begin{cases} (0, 1, \dots, 1), & i = 1,\\ (1, 0, \dots, 0), & i \neq 1. \end{cases} \tag{15}$$

Поведение (15) формирует сеть-звезду в первом состоянии с центральным игроком 1 (рис. 1), в которой $|N_1| = n - 1$ и $|N_i| = 1$, $i \neq 1$.

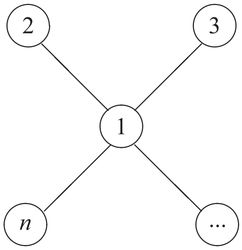

Рис. 1. Сеть-звезда

Для сети-звезды характеристическая функция вычисляется с учетом специфической структуры сети.

Сеть имеет центральную симметрию, которая позволяет предположить, что формула (14) может быть упрощена.

Утверждение 1. *Для сети-звезды с центральным игроком 1, компоненты вектора Шепли* $\varphi[v(\bar{z}_t)]$, $t = 1, 2$, *представимы в виде* [9]

$$\varphi_i[v(\bar{z}_t)] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[v(\bar{z}_t; \{1\}) + \sum\limits_{j \neq 1} (m_{1j} - v(\bar{z}_t; \{j\}))\right], & i = 1, \\ \dfrac{1}{2}\left[v(\bar{z}_t; \{i\}) + m_{1i} - w_{1i}\right], & i \neq 1. \end{cases} \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Сначала докажем выражение (16) для подыгры $\Gamma^S_{z_2}(g)$. Зафиксируем игрока $i \in S$, $i \neq 1$ и рассмотрим его предельный вклад $v(\bar{z}_2; S) - v(\bar{z}_2; S \setminus \{i\})$ в коалицию S. Принимая во внимание формулы (2)–(5) для характеристической функции $v(\bar{z}_2; \cdot)$, получаем, что

$$v(\bar{z}_2; S) - v(\bar{z}_2; S \setminus \{i\}) = \begin{cases} m_{1i} - w_{1i}, & 1 \in S, \\ w_{i1}, & 1 \notin S. \end{cases}$$

Подставляя (2)–(5) в формулу компонент вектора Шепли (14), для игрока $i \neq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_i[v(\bar{z}_2)] &= \sum_{S \subseteq N; i \in S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \times [v(\bar{z}_2; S) - v(\bar{z}_2; S \setminus \{i\})] = \\ &= (m_{1i} - w_1^{1i}) \sum_{S \subseteq N; 1, i \in S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} + \\ &\quad + w_i^{i1} \sum_{S \subseteq N; i \in S; 1 \notin S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} = \\ &= (m_{1i} - w_1^{1i}) \sum_{|S|=2}^{n} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \binom{n-2}{|S|-2} + \\ &\quad + w_i^{i1} \sum_{|S|=1}^{n-1} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \binom{n-2}{|S|-1} = \\ &= (m_{1i} - w_1^{1i}) \sum_{|S|=2}^{n} \frac{|S|-1}{n(n-1)} + w_i^{i1} \sum_{|S|=1}^{n-1} \frac{n-|S|}{n(n-1)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left[w_i^{i1} + m_{1i} - w_1^{1i}\right].$$

Следуя свойству эффективности вектора Шепли, сразу находим, что

$$\varphi_1[v(\bar{z}_2)] = v(\bar{z}_2; N) - \sum_{i \neq 1} \varphi_i[v(\bar{z}_2)] = \frac{1}{2}\sum_{i \in N}\sum_{j \in N_i} m_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{i \neq 1}\left[w_i^{i1} + m_{1i} - w_1^{1i}\right] =$$

$$= \sum_{i \neq 1} m_{1i} - \frac{1}{2}\sum_{i \neq 1}\left[w_i^{i1} + m_{1i} - w_1^{1i}\right] = \frac{1}{2}\sum_{i \neq 1}\left[w_1^{1i} + m_{1i} - w_i^{i1}\right].$$

С учетом того, что $v(\bar{z}_2; \{1\}) = \sum_{j \in N_1} w_1^{1j} = \sum_{i \neq 1} w_1^{1i}$ и $v(\bar{z}_2; \{i\}) = \sum_{j \in N_i} w_j^{ij} = w_i^{i1}$, $i \neq 1$, выражения (16) справедливы для подыгры $\Gamma_{z_2}^S(g)$.

Теперь докажем (16) для игры $\Gamma_{z_1}(g)$. Аналогично, зафиксируем игрока $i \in S$, $i \neq 1$ и рассмотрим его максимальный вклад $v(\bar{z}_1; S) - v(\bar{z}_1; S \setminus \{i\})$ в коалицию S. Используя выражения (6)–(8) для характеристической функции $v(\bar{z}_1; \cdot)$, получим

$$v(\bar{z}_1; S) - v(\bar{z}_1; S \setminus \{i\}) = \begin{cases} m_{1i}, & 1 \in S, \\ 0, & 1 \notin S. \end{cases}$$

Подставляя их в формулу для компонент вектора Шепли (14), для игрока $i \neq 1$ имеем

$$\varphi_i[v(\bar{z}_1)] = \sum_{S \subseteq N; i \in S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}\left[v(\bar{z}_1; S) - v(\bar{z}_1; S \setminus \{i\})\right] =$$

$$= m_{1i} \sum_{S \subseteq N; 1, i \in S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} = m_{1i} \sum_{|S|=2}^{n} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}\binom{n-2}{|S|-2} =$$

$$= m_{1i} \sum_{|S|=2}^{n} \frac{|S|-1}{n(n-1)} = \frac{m_{1i}}{2}.$$

Снова, следуя свойству эффективности вектора Шепли, можно легко найти компоненту вектора Шепли для игрока 1:

$$\varphi_1[v(\bar{z}_1)] = v(\bar{z}_1; N) - \sum_{i \neq 1} \varphi_i[v(\bar{z}_1)] = \frac{1}{2}\sum_{i \in N}\sum_{j \in N_i} m_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{i \neq 1} m_{1i} =$$

$$= \sum_{i \neq 1} m_{1i} - \frac{1}{2}\sum_{i \neq 1} m_{1i} = \frac{1}{2}\sum_{i \neq 1} m_{1i}.$$

Напомним, что по (6)–(8) $v(\bar{z}_1; \{i\}) = 0$ для любого игрока $i \in N$, выражение (16) справедливо для двухшаговой игры $\Gamma_{z_1}(g)$. □

Пример. Рассмотрим игру 4 лиц, $N = \{1, 2, 3, 4\}$. С учетом принятых выше предположений игрокам в первом состоянии с целью максимизации прибыли выгодно выбрать поведения $b_1^1 = (0, 1, 1, 1)$, $b_2^1 = b_3^1 = b_4^1 = (1, 0, 0, 0)$. Получим сеть-звезду, приведенную на рис. 2.

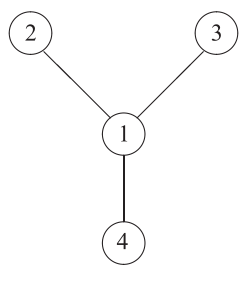

Рис. 2. Сеть-звезда для 4 игроков

Заданы следующие матрицы:

$$A_{12}C_{21} = \begin{pmatrix} (3;2) & (1;4) \\ (2;0) & (3;1) \end{pmatrix},\ A_{13}C_{31} = \begin{pmatrix} (2;4) & (1;3) \\ (2;3) & (3;0) \end{pmatrix},\ A_{14}C_{41} = \begin{pmatrix} (3;2) & (1;4) \\ (5;0) & (2;2) \end{pmatrix}.$$

Значения w_{ij} и m_{ij}: $m_{12} = 5$, $m_{13} = 6$, $m_{14} = 5$, $w_{12} = 2$, $w_{21} = 1$, $w_{13} = 2$, $w_{31} = 3$, $w_{14} = 2$, $w_{41} = 2$.

Вычислим характеристическую функцию для подыгры $\Gamma^S_{z_2}(g)$, используя выражения (2)–(5):

$v(z_2;\{\varnothing\}) = 0$, $v(z_2;\{1\}) = 6$, $v(z_2;\{2\}) = 1$, $v(z_2;\{3\}) = 3$, $v(z_2;\{4\}) = 2$,
$v(z_2;\{12\}) = 9$, $v(z_2;\{13\}) = 10$, $v(z_2;\{14\}) = 9$, $v(z_2;\{23\}) = 4$,
$v(z_2;\{34\}) = 5$, $v(z_2;\{24\}) = 3$, $v(z_2;\{234\}) = 6$, $v(z_2;\{123\}) = 13$,
$v(z_2;\{124\}) = 12$, $v(z_2;\{134\}) = 13$,
$v(z_2;\{1234\}) = 16$.

Далее определим характеристическую функцию для двухшаговой игры $\Gamma_{z_1}(g)$, применяя выражения (6)–(8):

$v(z_1;\{\varnothing\}) = 0$, $v(z_1;\{1\}) = v(z_1;\{2\}) = v(z_1;\{3\}) = v(z_2;\{4\}) = 0$,
$v(z_1;\{12\}) = 5$, $v(z_1;\{13\}) = 6$, $v(z_1;\{14\}) = 5$,
$v(z_1;\{23\}) = v(z_1;\{24\}) = v(z_1;\{34\}) = 0$,
$v(z_1;\{234\}) = 0$, $v(z_1;\{123\}) = 11$, $v(z_1;\{124\}) = 10$, $v(z_1;\{134\}) = 11$,
$v(z_1;\{1234\}) = 16$.

Теперь вычислим значение вектора Шепли для подыгры $\Gamma^S_{z_2}(g)$ и двухшаговой игры Γ:

$\varphi[v(\bar{z}_2)] = (8, 2, 3.5, 2.5)$,
$\varphi[v(\bar{z}_1)] = (8, 2.5, 3, 2.5)$.

Для подыгры $\Gamma^S_{z_2}(g)$ доказана выпуклость характеристической функции, из этого следует, что вектор Шепли принадлежит С-ядру. Проверим принадлежность вектора Шепли С-ядру для случая двухшаговой игры $\Gamma_{z_1}(g)$. Напомним, что С-ядро в игре $\Gamma_{z_1}(g)$ — это множество дележей $x = (x_1, \ldots, x_n)$, которые удовлетворяют таким условиям:

$$\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(\bar{z}_1; S) \text{ для всех } S \subset N, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = v(\bar{z}_1; N). \tag{18}$$

Подставляя значения характеристической функции (6)–(8) и вектора Шепли $\varphi[v(\bar{z}_1)]$ в условия (17), (18), получим верные неравенства. Это означает, что в данной задаче вектор Шепли принадлежит С-ядру.

Используя вычисленные значения характеристической функции в двухшаговой игре и соответствующей одношаговой подыгре на кооперативной траектории, можно показать, что характеристическая функция как двухшаговой игры, так и одношаговой подыгры в случае сети-звезды является супермодулярной.

Заключение. В статье рассмотрены кооперативные сетевые игры с попарным взаимодействием. Построена характеристическая функция и доказана ее выпуклость для одношаговой игры, что гарантирует непустоту С-ядра. Это позволяет в будущем распространить свойство выпуклости на многошаговые игры такого типа, а также облегчит исследование динамической устойчивости решений.

Полученная в данной работе формула вектора Шепли для некоторой сетевой игры более проста в вычислительном плане и не требует определения характеристической функции для всех коалиций. Для расчета вектора Шепли здесь достаточно знать лишь значения характеристической функции для коалиций, состоящих не более чем из двух игроков. Вид характеристической функции позволяет предполагать, что подобные упрощения возможны и для других типов симметричных сетей. Работа проиллюстрирована примером.

Автор благодарит рецензентов за ценные замечания.

Литература

1. *Dyer M., Mohanaraj V.* Pairwise-interaction games // ICALP. 2011. Vol. 1. P. 159–170.
2. *Acemoglua D., Ozdaglarb A., Parandeh Gheibib A.* Spread of (mis)information in social networks // Games and Economic Behavior. 2010. Vol. 70, iss. 2. P. 194–227.
3. *König M. D., Battistonb S., Napoletanoc M., Schweitzerb F.* The efficiency and stability of R & D networks // Games and Economic Behavior. 2012. Vol. 75, iss. 2. P. 694–713.
4. *Петросян Л. А., Седаков А. А.* Многошаговые сетевые игры с полной информацией // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1, № 2. С. 66–81.
5. *Bulgakova M. A., Petrosyan L. A.* About strongly time-consistency of core in the network game with pairwise interactions // Proceedings of 2016 Intern. Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems”. 2016. P. 157–160.
6. *Kuzyutin D., Nikitina M.* Time consistent cooperative solutions for multistage games with vector payoffs // Operations Research Letters. 2017. Vol. 45, iss. 3. P. 269–274.
7. *Shapley L. S.* Cores of convex games // Intern. Journal of Game Theory. 1971. Vol. 1. P. 11–26.
8. *Shapley L. S.* A value for n-person games // Contributions to the theory of games. Vol. II / eds by H. W. Kuhn, A. W. Tucker. Princeton: Princeton University Press, 1953. Vol. 28. P. 307–317. (Annals of Mathematical Studies)
9. *Petrosyan L., Bulgakova M., Sedakov A.* Time-consistent solutions for two-stage network games with pairwise interactions // Game Theory for Networking Applications. 2018. P. 15–23.

Статья поступила в редакцию 8 мая 2017 г.
Статья принята к печати 18 декабря 2018 г.

Контактная информация:

Булгакова Мария Александровна — аспирант; maribulgakova@mail.ru

Solutions of network games with pairwise interactions *

M. A. Bulgakova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Bulgakova M. A. Solutions of network games with pairwise interactions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 1, pp. 147–156. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.112 (In Russian)

This article is devoted to cooperative network games with pairwise interaction. We consider a two-stage game, the first stage of which represents a network-formation stage, and the second is simultaneous bimatrix games, which take place between neighbours over the network. The characteristic function is constructed, its supermodularity is proved for the case of a one-step subgame starting with the second stage. For a special class of networks (star-network),

* The work is supported by Russian Found of Fundamental Research (grant N 17-51-53030).

a simplified formula for the Shapley vector is found, which does not require the calculation of the values of the characteristic function over all coalitions, but only over coalitions of dimension no more than two.

Keywords: cooperative games, convexity, Shapley value, characteristic function.

References

1. Dyer M., Mohanaraj V. Pairwise-interaction games. *ICALP*, 2011, vol. 1, pp. 159–170.

2. Acemoglua D., Ozdaglarb A., Parandeh Gheibib A. Spread of (mis)information in social networks. *Games and Economic Behavior*, 2010, vol. 70, iss. 2, pp. 194–227.

3. König M. D., Battistonb S., Napoletanoc M., Schweitzerb F. The efficiency and stability of R & D networks. *Games and Economic Behavior*, 2012, vol. 75, iss. 2, pp. 694–713.

4. Petrosyan L. A., Sedakov A. A. Mnogoshagovye setevye igry s polnoy informatsiey [Multistage network games with full information]. *Matematicheskaia teoria igr i ee prilozhenia* [*Mathematical game theory and applications*], 2009, vol. 1, no. 2, pp. 66–81. (In Russian)

5. Bulgakova M. A., Petrosyan L. A. About strongly time-consistency of core in the network game with pairwise interactions. *Proceedings of 2016 Intern. Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"*, 2016, pp. 157–160.

6. Kuzyutin D., Nikitina M. Time consistent cooperative solutions for multistage games with vector payoffs. *Operations Research Letters*, 2017, vol. 45, iss. 3, pp. 269–274.

7. Shapley L. S. Cores of convex games. *Intern. Journal of Game Theory*, 1971, vol. 1, pp. 11–26.

8. Shapley L. S. A value for n-person games. *Contributions to the theory of games*, vol. II. Eds by H. W. Kuhn, A. W. Tucker. Princeton, Princeton University Press, 1953, vol. 28, pp. 307–317. (Annals of Mathematical Studies)

9. Petrosyan L., Bulgakova M., Sedakov A. Time-consistent solutions for two-stage network games with pairwise interactions. *Game Theory for Networking Applications*, 2018, pp. 15–23.

Received: May 8, 2018.
Accepted: December 18, 2018.

Author's information:

Maria A. Bulgakova — Postgraduate Student; maribulgakova@mail.ru