

## О дисперсионном соотношении излучения заряженных частиц в периодических структурах\*

А. А. Тищенко<sup>1,2</sup>, Д. Ю. Сергеева<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Российская Федерация, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31

<sup>2</sup> Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Российская Федерация, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, 1

**Для цитирования:** Тищенко А. А., Сергеева Д. Ю. О дисперсионном соотношении излучения заряженных частиц в периодических структурах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 1. С. 140–146. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.111>

Аналитически рассмотрена одна из ключевых особенностей, описывающих излучение заряженных частиц в периодических структурах. Показано, что дисперсионное соотношение в излучении периодических структур с конечным числом элементов для механизма как поляризационного излучения, так и тормозного, в том числе излучения в ондуляторах и вигглерах, не принимает во внимание все детали спектрально-углового распределения. На основе анализа асимптотического выражения, позволяющего представить отношение квадратов синусов как сумму дельта-функций, был найден фактор, учитывающий вклад дополнительных пиков. Формула зависит от количества элементов периодической структуры, а в предельном случае очень большого числа элементов превращается в известное асимптотическое выражение. Результирующее выражение было получено в форме, полезной для дальнейшего математического анализа, включая использование перевальных методов.

*Ключевые слова:* излучение заряженных частиц, дисперсионное соотношение, периодические структуры.

**1. Введение.** В излучении заряженных частиц традиционно выделяют два основных механизма: тормозной и поляризационный. Тормозное излучение появляется, когда изменяется скорость заряженной частицы, и к этому типу относятся тормозное излучение частиц в конденсированных средах (bremsstrahlung), магнитотормозное в поле отклоняющих магнитов, синхротронное, вигглерное излучение при каналировании, ондуляторное в лазерах на свободных электронах и др. Поляризационное излучение возникает как результат динамической поляризации материала мишеней полем пролетающих заряженных частиц. К нему относятся излучения Вавилова—Черенкова, переходное, дифракционное, параметрическое рентгеновское в кристаллах, Смита—Парселла и др.

Различные типы излучения, которое генерируют заряженные частицы от периодических структур, — резонансное переходное от многослойной стопки пленок, излучение Смита—Парселла, параметрическое рентгеновское в кристаллах, ондуляторное и пр. — имеют много общего с точки зрения их дисперсионных соотношений. Другими

---

\* Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (соглашение от 24.11.2017 г. № 14.616.21.0088, идентификатор RFMEFI61617X0088).

словами, угол, под которым испускается излучение, скорость заряженных частиц и период структуры связаны определенным соотношением, имеющим общие типичные черты для всех перечисленных случаев.

Характеристики излучения, описываемые таким соотношением, играют ключевую роль в применении различных механизмов с целью генерации мощных пучков фотонов либо диагностики пучков релятивистских заряженных частиц. При этом для диагностики на кольцевых ускорителях, например синхротронах, используется собственно синхротронное излучение, хотя известны попытки проводить диагностику и на других типах излучения (см, например, [1]). Диагностика пучков электронов на линейных ускорителях, включая линейные части синхротронов и лазеры на свободных электронах, в настоящее время осуществляется чаще всего с помощью сцинтилляционных экранов и экранов переходного излучения [2]. Однако, ввиду растущих требований к пучкам новейших источников, на первый план выходят невозмущающие методы диагностики, основанные на дифракционном излучении вообще [3] и эффекте Смита—Парселла в частности [4, 5].

Излучение Смита—Парселла возбуждается при пролете заряженной частицы над поверхностью периодической структуры. Спектрально-угловое распределение излучения Смита—Парселла от одного электрона имеет вид [1]

$$\frac{d^2W_N(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\hbar\omega} = \frac{d^2W_1(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\hbar\omega} \frac{\sin^2(Nd\varphi/2)}{\sin^2(d\varphi/2)}, \quad (1)$$

где

$$\varphi = \frac{\omega}{c} \frac{1}{\beta_x} (1 - n_\beta \beta); \quad (2)$$

$d^2W_1(\mathbf{n}, \omega)/d\Omega d\hbar\omega$  — спектрально-угловое распределение излучения электронного ступка от одной пластины;  $\beta = v/c$  — приведенная скорость электрона;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении наблюдения;  $\beta_x$  — проекция вектора  $\beta$  на направление периодичности мишени;  $d$  — период решетки;  $N$  — число элементов решетки. Именно из этого множителя следует так называемое дисперсионное соотношение излучения Смита—Парселла, которое определяет максимумы излучения и связывает длину волны и характерные углы излучения.

С квантовой точки зрения излучение испускается за счет дискретного изменения импульса частицы во внешнем периодическом поле (ондулятор, вигглер, источник излучения на обратном томсоновском или комптоновском рассеянии) или же периодической структурой при передаче ей продольного импульса частицы (излучение Смита—Парселла, резонансное переходное, параметрическое рентгеновское). Квантование этого импульса, ввиду наличия периода, и приводит к характерным чертам дисперсионного соотношения. Поляризационные типы такого излучения могут быть описаны как дифракция виртуальных фотонов, составляющих поле заряженных частиц. Данное явление имеет много общего с рассеянием электромагнитных волн в среде; впрочем, некоторые особенности характеристик излучения, например параметрического рентгеновского, позволяют различать дифракцию виртуальных и реальных фотонов [6]. При этом, хотя названные выше разнообразные механизмы излучения в периодических структурах и описываются разными формулами, с квантовой точки зрения описание их весьма близко, так что и явный вид дисперсионных соотношений практически совпадает. Поэтому далее, без потери общности, будем анализировать явный вид выражения (1), общий для всех типов излучения.

Также следует добавить, что механизм излучения с множителем типа  $\sin^2(Nd\varphi/2)/\sin^2(d\varphi/2)$  возникает не только от пучков частиц в периодических структурах, но и в произвольных при условии периодичности пучка [7].

Обычно при  $N \gg 1$  пользуются приближением

$$F_g = \left( \frac{\sin(Ng)}{\sin(g)} \right)^2 \rightarrow \pi M \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(g - \pi r). \quad (3)$$

Отсюда для излучения Смита—Парселла, требуя равенство нулю аргумента дельта-функции, находим дисперсионное соотношение

$$\frac{\omega}{2c} \frac{d}{\beta_x} (1 - n_\beta \beta) = \pi m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Для получения углового или спектрального распределения излучения необходимо проинтегрировать спектрально-угловое распределение (1) по частотам или углам соответственно, что удобно проводить с помощью представления (3). Понятно, что при этом, в силу наличия под интегралом суммы дельта-функций, вклад в интеграл внесут только и исключительно точки, определенные условием (4) (или аналогичным ему в случае другого вида излучения). Но функция  $\sin^2(Nd\varphi/2)/\sin^2(d\varphi/2)$  в реальной системе не является в чистом виде суммой дельта-функций, будучи всего лишь суммой достаточно острых пиков. В то же время функция  $d^2W_1(n, \omega)/d\Omega d\hbar\omega$  может иметь (и имеет) физически обусловленные максимумы, как, например, максимум излучения вперед под углами порядка обратного Лоренц-фактора в случае переходного или дифракционного излучения (включая излучение Смита—Парселла), и при характерных значениях Лоренц-фактора, равных  $10^3$ – $10^5$ , которые доступны на современных ускорителях. Этот пик на малых углах может быть также очень острым и вносить вполне заметный вклад в интеграл по углам. Аналогичная ситуация может сложиться и при интегрировании по частотам. Так, в монографии Г. М. Гарибьяна и Ян Ши [8] упоминается такого рода вклад — он назван торцевой интерференцией — и утверждается, что его можно посчитать только численно, выделив соответствующую часть интеграла из общего интеграла по всем углам. В п. 2 изложен подход, позволяющий выделить фактор, отвечающий за отличие  $\sin^2(Nd\varphi/2)/\sin^2(d\varphi/2)$  от суммы дельта-функций.

**2. Асимптотическая формула и поправка к ней.** Явный вид фазы  $\varphi$ , даваемой формулой (2), хотя и имеет общий вид для всех типов излучения в периодических структурах, поскольку определяется в общих своих чертах законами сохранения, отличается для разных конкретных типов излучения. Поэтому для сохранения общности рассмотрения вместо (1) будем анализировать функцию

$$\frac{d^2W_N(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\hbar\omega} = \frac{d^2W_1(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\hbar\omega} F_g,$$

где теперь  $g = g(\mathbf{n}, \omega)$ , входящая в  $F_g$ , как в (3), является функцией частоты и углов излучения.

Интегрирование по всем частотам дает угловое распределение излучения

$$\frac{dW(\mathbf{n})}{d\Omega} = \int d\omega \frac{d^2W_1(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\hbar\omega} F_g. \quad (5)$$

Рассчитаем минимумы функции  $F_g$  по выражению  $Ng = \pi(Nr + p)$ ,  $p = 1, 2, \dots, N-1$ , ширину главного максимума — так:  $\Delta g = \frac{2\pi}{N}$ . Между двумя соседними главными

максимумами размещается  $N - 2$  побочных максимумов. Считая, что побочные максимумы располагаются посередине между двумя минимумами, их положение можно определить следующим образом:

$$Ng_p = \pi \frac{(Nr + p) + (Nr + p + 1)}{2} = \pi \left( Nr + \frac{2p + 1}{2} \right), \quad p = 1, 2, \dots, N - 2.$$

Отсюда положение побочных максимумов находится из выражения

$$g_p(r) = \pi \left( r + \frac{2p + 1}{2N} \right), \quad p = 1, 2, \dots, N - 2. \quad (6)$$

Заметим, при  $N \gg 1$ , с одной стороны, верно соотношение (3), а с другой —  $\delta(g - \pi r) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha \pi} \exp\left(-\frac{(g - \pi r)^2}{\pi \alpha^2}\right)$ . Пусть  $\alpha = N^{-1}$ , тогда  $\delta(g - \pi r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{\pi} \exp\left(-\frac{(g - \pi r)^2}{\pi N^{-2}}\right)$ . Отсюда имеем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_g = \pi N \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(g - \pi r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} N^2 \exp\left(-\frac{(g - \pi r)^2}{\pi N^{-2}}\right). \quad (7)$$

Добавим в рассмотрение еще побочные пики, которые могут появляться и тогда, когда условие  $N \gg 1$  не выполнено.

Ясно, что побочные пики могут быть аппроксимированы функцией, аналогичной (7), где вместо  $\pi r$  — положение максимума  $g_p(r)$ , задаваемое формулой (6), а вместо  $\pi N^{-2}$  — дисперсия. Последнюю можно определить исходя из того, что интеграл от функции  $e^{-x^2/\sigma^2}$  по  $dx$  дает дисперсию  $\sigma\sqrt{\pi}$  и положения побочных пиков определяются главным образом фактором  $\sin^2(Ng)$ . Поэтому достаточно вычислить интеграл по одному периоду, что дает

$$\int_0^{\pi/N} dg \sin^2(Ng) = \frac{\pi}{2N} = \sigma\sqrt{\pi},$$

откуда следует, что дисперсия  $\sigma$  есть  $\sqrt{\pi}/(2N)$ . При этом побочные пики меняют амплитуду за счет фактора  $\sin^{-2}(g_p(r))$  и несколько сдвигаются.

Таким образом, если не учитывать сдвиг, который бы привел к несущественным поправкам, то побочные пики описываются выражением

$$\sum_{p=1}^{N-2} \frac{1}{\sin^2(g_p(r))} \exp\left(-\frac{(g - g_p(r))^2}{\pi N^{-2}/4}\right).$$

Тогда полная функция  $F_g$  может быть аппроксимирована такой функцией  $F_g^{(0)}$ :

$$F_g \simeq F_g^{(0)},$$

где

$$F_g^{(0)} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} N^2 \exp\left(-\frac{(g - \pi r)^2}{\pi N^{-2}}\right) + \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=1}^{N-2} \frac{1}{\sin^2(g_p(r))} \exp\left(-\frac{(g - g_p(r))^2}{\pi N^{-2}/4}\right). \quad (8)$$

Первое слагаемое, описывающее основные пики, можно заменить суммой дельта-функций, тогда

$$F_g \simeq \pi N \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(g - \pi r) + \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=1}^{N-2} \frac{1}{\sin^2(g_p(r))} \exp\left(-\frac{(g - g_p(r))^2}{\pi N^{-2}/4}\right). \quad (9)$$

Напомним, что здесь величина  $g$  содержит зависимость от частоты и углов излучения.

Из рисунка видно, что функция (9) довольно хорошо аппроксимирует множитель  $F_g$  даже при небольших значениях  $N$ , когда побочные максимумы особенно важны

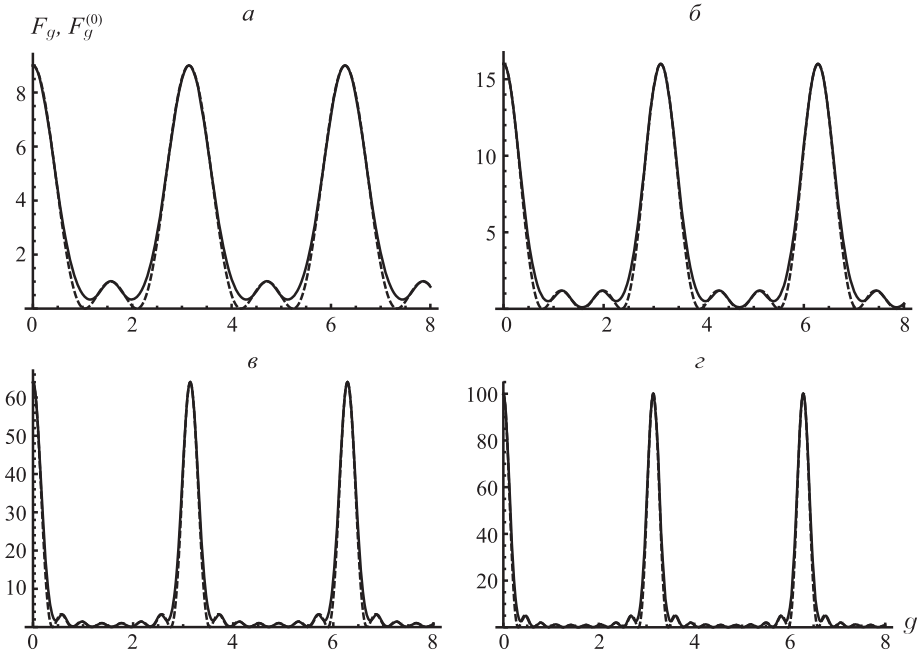


Рисунок. Зависимости функции  $F_g^{(0)}$  (сплошная кривая, формула (8)) и  $F_g$  (пунктирная кривая, левое равенство формулы (3), т. е. отношение квадратов синусов) от  $g$  при значениях  $N = 3$  (а), 4 (б), 8 (в) и 10 (з)

и вносят значительный вклад в интегрирование спектрально-углового распределения по углам и частотам. Представление (9) по сравнению с (3) содержит дополнительное слагаемое. При  $N \rightarrow \infty$  это слагаемое пренебрежимо мало; при конечных  $N$  оно может давать вклад при проведении интегрирования спектрально-углового распределения по углам в соответствии с (5) или по частотам по формуле

$$\frac{dW(\omega)}{d\omega} = \int d\Omega \frac{d^2W(n, \omega)}{d\omega d\Omega}.$$

При этом явный вид дополнительного второго слагаемого в формуле (9) удобен для применения перевальных методов при качественной оценке интегралов.

Вычисление вклада такого добавочного слагаемого является отдельной задачей, которая должна решаться для конкретных процессов излучения с определенными параметрами мишени и пучка, однако нет сомнений, что данное слагаемое может быть полезно в плане уточнения явлений, связанных с излучением пучков заряженных

частиц в периодических структурах. Установление тонкой структуры в угловом (на малых углах) или частотном распределении излучения может играть роль как для уточнения природы пиков излучения, так и выявления новых возможностей в диагностике пучков заряженных частиц.

Авторы благодарят М. Н. Анохина за помощь в подготовке материала статьи.

## Литература

1. Bobb L., Kieffer R., Lefevre T., Mazzoni S., Aumeyr T., Karataev P., Billing M., Conway J., Shanks J. Feasibility of diffraction radiation for noninvasive beam diagnostics as characterized in a storage ring // *Phys. Rev. Accel. Beams*. 2018. Vol. 21. P. 032801.
2. Sukhikh L., Kube G., Bajt S., Lauth W., Popov Y., Potylitsyn A. Backward transition radiation in the extreme ultraviolet region as a tool for the transverse beam profile diagnostic // *Phys. Rev. ST Accel. Beams*. 2014. Vol. 17. P. 112805.
3. Potylitsyn A. P., Ryazanov M. I., Strikhanov M. N., Tishchenko A. A. Diffraction radiation from relativistic particles. Berlin: Springer-Verlag, 2011. 278 p.
4. Doucas G., Kimmitt M. F., Doria A., Gallerano G. P., Giovenale E., Messina G., Andrews H. L., Brownell J. H. Determination of longitudinal bunch shape by means of coherent Smith–Purcell radiation // *Phys. Rev. ST AB*. 2002. Vol. 5. P. 072802.
5. Andrews H. L., Taheri F. B., Barros J., Bartolini R., Cassinari L., Clarke C., Le Corre S., Delerue N., Doucas G., Fuster-Martinez N., Konoplev I., Labat M., Perry C., Reichold A., Stevenson S., Grosjean M. V. Longitudinal profile monitors using coherent Smith–Purcell radiation // *Nucl. Instr. and Methods A*. 2014. Vol. 740. P. 212–215.
6. Alezeyev V. I., Eliseyev A. N., Irribarra E., Kishin I. A., Kubankin A. S., Nazhmudinov R. M. Observation of parametric X-ray radiation in an anomalous diffraction region // *Physics Letters A*. 2016. Vol. 380. P. 2892–2896.
7. Sergeeva D. Y., Potylitsyn A. P., Tishchenko A. A., Strikhanov M. N. Smith–Purcell radiation from periodic beams // *Optics Express*. 2017. Vol. 25. P. 26310.
8. Гарибян Г. М., Шу Ян. Рентгеновское переходное излучение. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1983. 320 с.

Статья поступила в редакцию 12 ноября 2018 г.

Статья принята к печати 18 декабря 2018 г.

Контактная информация:

Тищенко Алексей Александрович — канд. физ.-мат. наук; tishchenko@mephi.ru

Сергеева Дарья Юрьевна — dysergeyeva@mephi.ru

## On the dispersion relation of radiation from charged particles in periodic structures\*

A. A. Tishchenko<sup>1,2</sup>, D. Yu. Sergeeva<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> National Research Nuclear University “MEPhI”, 31, Kashirskoe sh., Moscow, 115409, Russian Federation

<sup>2</sup> National Research Center “Kurchatov Institute”, 1, Akademika Kurchatova pl., Moscow, 123182, Russian Federation

**For citation:** Tishchenko A. A., Sergeeva D. Yu. On the dispersion relation of radiation from charged particles in periodic structures. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied*

---

\* This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of Federal Targeted Program “Research and Development in the Priority Directions of Development of the Scientific and Technological Complex of Russia for 2014–2020” (agreement on November 24, 2017, N 14.616.21.0088, ID RFMEFI61617X0088).

In this paper we considered analytically one of the key features describing the radiation from charged particles in periodic structures. It is shown that the dispersion relation in the radiation from periodic structures with a finite number of elements, both for polarization radiation mechanism and forbremsstrahlung-type mechanism, including those in undulators and wigglers, does not take into account all the details of the spectral-angular distribution. Based on the analysis of the asymptotic expression which allows one to represent the ratio of squares of sines as the sum of delta functions, the factor has been obtained that takes into account the contribution of additional peaks. The expression depends on the number of elements of the periodic structure, and in the limiting case of very large number of elements turns into well-known asymptotic expression. The resulting expression has been obtained in the form helpful for further mathematical analysis, including the use of saddle point technique.

*Keywords:* radiation from charged particles, dispersion relation, periodic structures.

## References

1. Bobb L., Kieffer R., Lefevre T., Mazzoni S., Aumeyr T., Karataev P., Billing M., Conway J., Shanks J. Feasibility of diffraction radiation for noninvasive beam diagnostics as characterized in a storage ring. *Phys. Rev. Accel. Beams*, 2018, vol. 21, pp. 032801.
2. Sukhikh L., Kube G., Bajt S., Lauth W., Popov Y., Potylitsyn A. Backward transition radiation in the extreme ultraviolet region as a tool for the transverse beam profile diagnostic. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 2014, vol. 17, pp. 112805.
3. Potylitsyn A. P., Ryazanov M. I., Strikhanov M. N., Tishchenko A. A. *Diffraction radiation from relativistic particles*. Berlin, Springer-Verlag Press, 2011, 278 p.
4. Doucas G., Kimmitt M. F., Doria A., Gallerano G. P., Giovenale E., Messina G., Andrews H. L., Brownell J. H. Determination of longitudinal bunch shape by means of coherent Smith–Purcell radiation. *Phys. Rev. ST AB*, 2002, vol. 5, pp. 072802.
5. Andrews H. L., Taheri F. B., Barros J., Bartolini R., Cassinari L., Clarke C., Le Corre S., Deleue N., Doucas G., Fuster-Martinez N., Konoplev I., Labat M., Perry C., Reichold A., Stevenson S., Grosjean M. V. Longitudinal profile monitors using coherent Smith–Purcell radiation. *Nucl. Instr. and Methods A*, 2014, vol. 740, pp. 212–215.
6. Alexeyev V. I., Eliseyev A. N., Irribarra E., Kishin I. A., Kubankin A. S., Nazhmudinov R. M. Observation of parametric X-ray radiation in an anomalous diffraction region. *Physics Letters A*, 2016, vol. 380, pp. 2892–2896.
7. Sergeeva D. Y., Potylitsyn A. P., Tishchenko A. A., Strikhanov M. N. Smith–Purcell radiation from periodic beams. *Optics Express*, 2017, vol. 25, pp. 26310.
8. Garibian G. M., Yang C. *Rentgenovskoye perekhodnoye izdaniye [X-ray transition radiation]*. Yerevan, Academy of Science Arm. Sov. Soc. Republic, 1983, 320 p. (In Russian)

Received: November 12, 2018.

Accepted: December 18, 2018.

### Author's information:

Alexey A. Tishchenko — PhD in Physics and Mathematics; [tishchenko@mephi.ru](mailto:tishchenko@mephi.ru)

Daria Yu. Sergeeva — [dysergeyeva@mephi.ru](mailto:dysergeyeva@mephi.ru)