Моделирование течений в трубах*

В. А. Павловский¹, А. Л. Чистов², Д. М. Кучинский¹

¹ Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Российская Федерация, 190121, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3

² Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Павловский В. А., Чистов А. Л., Кучинский Д. М. Моделирование течений в трубах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 1. С. 93–106. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.107>

Во многих технических устройствах реализуются течения в трубах и каналах, которые осуществляются за счет создания перепада давления вдоль оси канала, что требует затрат энергии. Для оценки этих затрат необходимо знание коэффициентов сопротивления, которые зависят от режима течения и шероховатости обтекаемых поверхностей. В работе использована f -модель турбулентности, позволяющая выполнять расчеты течений в трубах и каналах, в том числе и с шероховатыми стенками, как при больших, так и при малых числах Рейнольдса. Это позволило представить первые интегралы для профиля скорости и меры турбулентности в виде трансцендентных уравнений, таким образом рассматриваемая задача была сведена к решению системы алгебраических уравнений по методу Ньютона. Проведено сравнение рассчитанных по f -модели профилей скорости и коэффициентов сопротивления с результатами, полученными на основании альтернативных подходов, и экспериментальными данными Прандтля—Никурадзе.

Ключевые слова: течение в трубе, вязкость, f -модель, динамическая скорость, число Рейнольдса, перепад давления, дифференциальные уравнения, граничные условия, профиль скорости, коэффициент сопротивления.

С помощью гипотезы длины пути перемешивания Л. Прандтля [1–3] можно описать на полуэмпирическом уровне пристенные турбулентные течения и тем самым удовлетворить неотложные потребности инженерной практики по расчету таких течений в энергетике и транспорте [4–6]. Теория приводит к логарифмическим профилям осредненных скоростей, хорошо согласующихся с экспериментальными данными за счет надлежащего выбора двух констант. Следует заметить, что она не применима в непосредственной близости к стенке, поскольку краевое условие прилипания в рамках ее невыполнимо. Потому для придания формуле Л. Прандтля физического смысла приходится вводить понятие вязкого подслоя. В настоящее время разработаны двух- и трехслойные модели течения, позволяющие сопрягать зону потока с чисто молекулярным трением с областью развитого турбулентного течения, где трение имеет молярную природу, и профиль скорости является логарифмическим. Естественно, что при использовании таких многослойных моделей число эмпирических констант увеличивается [7–10].

Однако можно построить более простую, феноменологическую, f -модель турбулентности, альтернативную гипотезе длины пути перемешивания, которая имеет не менее ясный физический смысл, приводит к логарифмическим профилям осреднен-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-08-00890).

ных скоростей, а также обеспечивает краевое условие прилипания и содержит всего лишь две феноменологические константы [11].

При больших числах Рейнольдса (Re) в турбулентном режиме рейнольдсовы напряжения играют главную роль в формировании течения. Обычно в теории турбулентности проблему замыкания, связанную с появлением тензора рейнольдсовых напряжений, решают путем построения алгебраической или дифференциальной модели для данного тензора (или всего лишь одной, касательной, компоненты его в полуэмпирической теории Прандтля—Кармана). Однако можно поступить и по-другому, введя в рассмотрение скалярное поле безразмерной меры турбулентности $f = f(r, t)$, $0 \leq f < 1$. Эту функцию можно определить так, чтобы при $Re \rightarrow 0$, $f \rightarrow 0$ и во всей зоне течения имел бы место чисто ламинарный режим течения, а при $Re \rightarrow \infty$, $f \rightarrow 1$ и в зоне течения был бы чисто турбулентный режим с профилями скорости предельной полноты.

После введения в рассмотрение поля величины f можно представить дивергенцию тензора напряжений как функцию меры f , а для самого параметра f записать дифференциальное уравнение переноса. В итоге можно получить для любых чисел Рейнольдса замкнутую систему уравнений движения вязкой жидкости

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} &= -\nabla p + \frac{\mu}{1-f} \Delta v + \frac{2\mu}{(1-f)^2} S \cdot \nabla f, \\ \nabla \cdot v &= 0, \\ \rho \frac{df}{dt} &= \mu \Delta f + \mu \Psi(f) (\nabla f \cdot \nabla f) + \rho (1-f) \frac{(\nabla p \times \nabla p) \cdot (\nabla \times v)}{\sqrt{2S} \cdot S \sqrt{2W} \cdot W}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь v — скорость жидкости, ρ — плотность, μ — динамическая вязкость, p — давление, $\frac{d}{dt}$ — оператор эйлеровой производной, ∇ — оператор Гамильтона.

Все физические величины, входящие в систему (1), являются осредненными по правилам Рейнольдса (очевидно, для ламинарного режима течения мгновенные и осредненные значения совпадают), S и W — тензор скоростей деформации и спин соответственно, которые характеризуют симметричную и антисимметричную части тензора градиентов скоростей деформации $\nabla v = S + W$, $:$ — символ двойного скалярного произведения, $\Psi(f)$ — скалярная функция f , равная

$$\Psi(f) = (1-f)^2 \frac{2\alpha + \beta(1-f)}{[\alpha + \beta(1-f)]^3}, \quad (2)$$

где $\alpha = 2.5$ и $\beta = 8.5$ — феноменологические константы.

Скалярная функция f является функцией поперечной координаты и числа Рейнольдса. При $Re \rightarrow 0$ функция $f \rightarrow 0$ и во всей зоне течения имеет место чисто ламинарный режим течения, а при $Re \rightarrow \infty$, $f \rightarrow 1$ течение, полностью турбулентное с профилем предельной полноты. Таким образом, функцию f можно трактовать как безразмерную скалярную меру режима движения в рассматриваемой точке потока. Краевыми условиями для системы (1) являются условия прилипания и вязкого ньютоновского трения на твердой границе и равенство нулю функции на твердой границе:

$$v|_s = v_s; \quad |2S \cdot n|_s = \frac{v_*^2}{\nu}; \quad f|_s = 0; \quad \left| \frac{dv}{df} \right|_s = (\alpha + \beta) v_*. \quad (3)$$

На основе уравнений (1)–(3) выполнены расчеты ряда пристенных течений, в том числе и внутренних — течений в трубах и каналах с гидравлически гладкими, а также и с шероховатыми стенками [3, 12]. Их результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течения

жидкости. При этом для простых сдвиговых течений решение уравнений сводится к квадратурам.

Описываемая f -модель течения обладает следующими свойствами:

1) наличием предельных переходов — при малых числах Рейнольдса решения совпадают с классическими решениями для ламинарного режима, а при больших — дают логарифмические профили скорости турбулентного режима течения и логарифмические законы сопротивления;

2) сравнительной простотой и удобством для использования в инженерных приложениях.

Рассмотрим течение в круглой цилиндрической трубе (круговое течение Пуазейля).

Рис. 1. Схема течения жидкости в трубе

Для кругового течения Пуазейля в трубе радиусом R (рис. 1) под действием постоянного градиента давления вдоль оси трубы система (1) в цилиндрической системе координат принимает вид

$$\begin{aligned} -\frac{dp}{dz} + \frac{\mu}{(1-f)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) + \frac{\mu}{(1-f)^2} \frac{du}{dr} \frac{df}{dr} &= 0, \\ \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \mu \frac{\Psi(f)}{(1-f)} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 - \rho (1-f) \frac{dp}{dz} \frac{df}{dr} \bigg/ \frac{du}{dr} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничными условиями будут следующие:

$$\begin{aligned} y=0: \quad u=0, \quad \frac{du}{dy} &= \frac{v_{*1}^2}{\nu}, \quad f=0, \quad \left| \frac{du}{df} \right| = (\alpha + \beta) v_{*1}, \\ y=2h: \quad u=0, \quad \frac{du}{dy} &= \frac{v_{*2}^2}{\nu}, \quad f=0, \quad \left| \frac{du}{df} \right| = (\alpha + \beta) v_{*2}. \end{aligned}$$

Систему уравнений (4) в безразмерных величинах можно записать так:

$$\begin{aligned} \text{Re}_* + \frac{v''}{(1-f)} + \frac{v' f'}{(1-f)^2} &= 0, \\ f'' + \frac{\Psi(f)}{(1-f)} f'^2 + \text{Re}_* (1-f) \frac{f'}{v'} &= 0, \end{aligned}$$

здесь граничные условия

$$\begin{aligned} \eta=0: \quad v=0, \quad v' &= \text{Re}_*, \quad f=0, \quad f' = \text{Re}_*/(\alpha + \beta), \\ \eta=2: \quad v=0, \quad v' &= -\text{Re}_*, \quad f=0, \quad f' = -\text{Re}_*/(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

где $v = u/v_*$ — безразмерная скорость; v_* — динамическая скорость, равная $\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$, $\tau_w = \frac{1}{2} \frac{dp}{dz} R$.

Решение этой системы уравнений для течения в трубе радиусом R позволяет получить профиль скоростей жидкости

$$v = \beta f - \alpha \ln(1-f). \quad (5)$$

Мера турбулентности f является функцией радиальной координаты $\eta = r/R$ и динамического числа Рейнольдса $Re_* = v_* R/\nu$ и находится из трансцендентного уравнения

$$Re_* \left(1 - \eta - \frac{(1 - \eta)^2}{2} \right) = \frac{\alpha f}{(1 - f)} - \beta \ln(1 - f). \quad (6)$$

Задавая значение Re_* , можно по формулам (5) и (6) рассчитать профиль скоростей и по нему найти сначала среднюю скорость по сечению потока

$$v_{cp} = \frac{u_{cp}}{v_*} = 2 \int_0^1 v(\eta) d\eta,$$

а далее число Рейнольдса

$$Re = \frac{2Rv_{cp}}{\nu} = 2v_{cp}Re_*$$

и коэффициент сопротивления

$$\zeta = \frac{8|\tau_w|}{\rho u_{cp}^2} = \frac{8}{v_{cp}^2}.$$

Полученное решение хорошо согласуется с экспериментальными данными как по профилям скоростей, так и по сопротивлениям. В предельном случае чисто ламинарного режима (число $Re = 2Rv_{cp}/\nu$ мало) видно, что при $f \rightarrow 0$ имеет место классическая парабола Пуазейля. При развитом турбулентном течении (число $Re \rightarrow \infty$) решение приводит к известному логарифмическому профилю скоростей и соответствующему закону сопротивления, практически совпадающему с кривой Прандтля—Никурадзе. При этом профиль скоростей имеет все четыре характерных участка — вязкий подслой, буферную зону, логарифмический участок и область внешнего течения (вблизи оси трубы).

В табл. 1 представлены результаты расчета профилей скорости для разных чисел Рейнольдса и приведены значения функции f в зависимости от расстояния до стенки.

Таблица 1. Результаты расчета профилей скорости и функции f

η	$Re = 2 \cdot 10^4$		$Re = 4 \cdot 10^4$		$Re = 1 \cdot 10^5$		$Re = 3 \cdot 10^6$	
	v/v_{max}	f	v/v_{max}	f	v/v_{max}	f	v/v_{max}	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.553	0.695	0.739	0.901	0.811	0.9882	0.867	0.99948
0.2	0.743	0.847	0.849	0.941	0.886	0.9941	0.918	0.99972
0.3	0.838	0.901	0.903	0.973	0.926	0.9959	0.946	0.9998
0.4	0.896	0.925	0.937	0.982	0.951	0.9968	0.964	0.99984
0.5	0.934	0.939	0.959	0.986	0.968	0.9972	0.976	0.99986
0.6	0.96	0.947	0.975	0.988	0.981	0.9975	0.985	0.99988
0.7	0.978	0.952	0.986	0.989	0.989	0.9977	0.992	0.99989
0.8	0.99	0.955	0.994	0.99	0.995	0.9979	0.996	0.99989
0.9	0.997	0.956	0.998	0.991	0.998	0.998	0.999	0.9999
1	1	0.957	1	0.991	1	0.998	1	0.9999

Данные табл. 1 иллюстрируют рис. 2 и 3.

Видно, что согласование расчетных профилей скорости с опытом в целом удовлетворительное. С ростом Re профили скорости увеличивают полноту — от близких

Рис. 2. Профили скоростей

Сплошные линии — расчетные данные: 1 — $Re = 5$, 2 — $Re = 11.6$, 3 — $Re = 1987.4$, 4 — $Re = 2.3 \cdot 10^4$, 5 — $Re = 3 \cdot 10^6$; + и • — опыты Никурадзе [12].

Рис. 3. Профили функции f для различных чисел Рейнольдса

1 — $Re = 5$; 2 — $Re = 11.6$; 3 — $Re = 1987.4$; 4 — $Re = 2.3 \cdot 10^4$.

к параболической форме при малых числах Re они принимают все более «корытообразную» форму. Аналогичное поведение также характерно для функции f .

На рис. 4–6 приведены профили скоростей в универсальных координатах. В частности, рис. 6 наглядно демонстрирует, что расчетные профили скоростей при малых числах Рейнольдса приводят к параболе Пуазейля, а при больших — согласуются с данными Никурадзе.

На рис. 7 показано сравнение результатов расчетов по модели с полученными прямым численным моделированием DNS.

На рис. 8 представлены результаты расчета коэффициента сопротивления. Здесь можно видеть, как кривая сопротивления турбулентного режима переходит на участок, практически точно соответствующий формуле Прандтля–Никурадзе $1/\sqrt{\xi} = 2 \lg(Re\sqrt{\xi}) - 0.8$. В окрестности $Re = 10^3$ теория имеет некоторую погрешность — у кривой сопротивления нет характерного излома, связанного с переходом от ламинарного режима к турбулентному. В принципе такой недостаток можно устранить с помощью корректировки выражения для $\Psi(f)$, которое приобретает после этого более громоздкую структуру. На рис. 9 показаны результаты расчетов сопротивления в других координатах.

Сравнение данных расчетов с полученными А. И. Короткиным и Ю. А. Роговым [13] приведено в табл. 2.

Рис. 4. Универсальный закон распределения скоростей для течения Пуазейля [1]
(сплошная линия — расчетные данные, пунктирные — асимптотики).

Рис. 5. Универсальный закон распределения скоростей
 Сплошная линия — расчет, $\square$ и $\diamond$ — данные расчетов по k - ϵ и k - w моделям
 турбулентности соответственно.

Рис. 6. Универсальный закон распределения скоростей

Сплошная линия – расчетные данные; экспериментальные данные Рейхардта (1) и Никурадзе [2] (2–8): 2 – $\text{Re} = 4.1 \cdot 10^3$, 3 – $\text{Re} = 2.3 \cdot 10^4$, 4 – $\text{Re} = 1.1 \cdot 10^5$, 5 – $\text{Re} = 4.0 \cdot 10^5$, 6 – $\text{Re} = 1.1 \cdot 10^6$, 7 – $\text{Re} = 2.0 \cdot 10^6$, 8 – $\text{Re} = 3.2 \cdot 10^6$.

Рис. 7. Сравнение результатов расчетов по f -модели (сплошные линии) с данными прямого численного моделирования DNS (точки)
 a — $Re = 2890$; $б$ — $Re = 3220$; $в$ — $Re = 4560$; $г$ — $Re = 4586$; $д$ — $Re = 5800$;
 $е$ — $Re = 6666$; $жс$ — $Re = 10\,039$; $з$ — $Re = 13\,925$; $у$ — $Re = 24\,272$.

Рис. 8. Закон сопротивления для круглой трубы

Сплошная линия — расчетные данные, точки — расчеты по формулам Пуазейля и Блазиуса, пунктирная линия — расчет по закону сопротивления Прандтля—Никурадзе [2] для гладких труб.

Рис. 9. Закон сопротивления для турбулентного течения в круглой трубе
 Сплошная линия — расчетные данные, 1–7 — экспериментальные данные, полученные:
 1 — Никурадзе, 2 — Саф и Шодер, 3 — Нуссельт, 4 — Омбек, 5 — Якоб Эрк,
 6 — Стэнтон и Паннел, 7 — Шиллер и Херман.

Таблица 2. Гидродинамические характеристики потока

Re	Re*	$v_{\max}/v_{cp}$	$v_{\max}/v_*$	c_f
4000	149	1.3402	17.800	0.04440
	166	1.3331	16.032	0.05531
6100	209	1.3111	18.699	0.03756
	229	1.2889	17.130	0.04529
9200	294	1.2739	19.650	0.03268
	317	1.2523	18.164	0.03802
16 700	497	1.2428	20.963	0.02834
	515	1.2097	19.617	0.03042
23 300	657	1.2290	21.804	0.02544
	679	1.1907	20.410	0.02722
43 400	1137	1.2105	23.110	0.02196
	1153	1.1624	21.867	0.02260
105 000	2511	1.1913	24.986	0.01830
	2491	1.1344	23.906	0.01801
205 000	4537	1.1784	26.634	0.01567
	4511	1.1196	25.439	0.01549
396 000	8217	1.1679	28.210	0.01378
	8147	1.1087	26.946	0.01354
725 000	14 200	1.1597	29.603	0.01228
	14 085	1.1007	28.331	0.01207
$1.11 \cdot 10^6$	21 000	1.1540	30.641	0.01145
	20 757	1.0961	29.307	0.01118
$1.536 \cdot 10^6$	28 300	1.1498	31.449	0.01086
	27 929	1.0929	30.053	0.01057
$1.959 \cdot 10^6$	35 200	1.1469	32.047	0.01033
	34 901	1.0907	30.611	0.01015
$2.35 \cdot 10^6$	41 700	1.1447	32.514	0.01008
	41 246	1.0891	31.026	0.00985
$2.79 \cdot 10^6$	48 400	1.1427	32.925	0.00963
	48 298	1.0877	31.416	0.00958
$3.24 \cdot 10^6$	55 500	1.1410	33.303	0.00939
	55 435	1.0865	31.751	0.00936

Литература

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / пер. Г. А. Вольтера с 5-го нем. изд., испр. по 6-му (амер.) изд.; под ред. Л. Г. Лойцянского. М.: Наука, 1974. 711 с. (*Schlichting H. Grenzschicht Theorie.*)
3. Павловский В. А., Никущенко Д. В. Вычислительная гидродинамика. Теоретические основы: учеб. пособие. СПб.: Изд-во «Лань», 2018. 368 с.
4. Robertson J. M., Martin J. D., Burkhurt T. H. Turbulent flow in rough pipes // Ind. Eng. Chem. Fundam. 1963. N 7. P. 253–265.
5. Jimenz J. Turbulent flow over rough walls // Annu. Rev. Fluid Mech. 2004. N 36. P. 173–196.
6. Sedova O., Pronina Y. A new model for the mechanochemical corrosion of a thin spherical shell // EPJ Web of Conferences. 2016. Vol. 108. 02040. P. 1–6.
7. Patel V. C. Perspective: flow at high Reynolds number and over rough surfaces — Achilles heel of CFD // J. Fluids Eng. 1998. N 120. P. 434–444.
8. Moody L. F. Friction factors for pipe flow // Trans. ASME. November 1944. Vol. 66. P. 671–684.
9. Tullis J. P., Wang J.-S. Turbulent flow in the entry region of a rough pipe // ASME J. Fluids Eng. 1974. N 75. P. 62–68.
10. Павловский В. А. Об одной феноменологической альтернативе гипотезе длины пути перемешивания // Модели механики сплошной среды: сб. Физическая механика. Вып. 7 / под ред. Б. В. Филиппова. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1998. С. 21–35.
11. Павловский В. А. Учет шероховатости стенки для единой феноменологической модели течения вязкой жидкости при произвольных числах Рейнольдса // Проблемы экономии топливно-

энергетических ресурсов на предприятиях и ТЭС: межвуз. сб. науч. трудов. СПб.: СПб ГТУ РП, 2002. С. 11–17.

12. *Nikuradze J.* Laws of flow in rough pipes (English translation of Strömungsgesetze in rauhen Rohren, VDI-Forschungsheft 361, Ausgabe B, Bd 4. P. 1–22. July/August 1933). P. 63. Washington: NACA Technical Memo 1292, November 1950.

13. *Короткин А. И., Роговой Ю. А.* Метод расчета продольных средних скоростей в пристенных турбулентных течениях несжимаемой жидкости. СПб.: МорВест, 2009. 121 с.

Статья поступила в редакцию 8 мая 2018 г.

Статья принята к печати 18 декабря 2018 г.

Контактная информация:

Павловский Валерий Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.a.pavlovsky@gmail.com

Чистов Алексей Леонидович — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.chistov@spbu.ru

Кучинский Дмитрий Михайлович — канд. техн. наук, доц.; kuchinskiy-dm@bk.ru

Modeling of pipe flows *

V. A. Pavlovsky¹, A. L. Chistov², D. M. Kuchinsky¹

¹ St. Petersburg State Marine Technical University, 3, Locmanskaya ul., St. Petersburg, 190121, Russian Federation

² St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Pavlovsky V. A., Chistov A. L., Kuchinsky D. M. Modeling of pipe flows. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 1, pp. 93–106. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.108> (In Russian)

Lots of technical devices use flows in pipes and channels caused by pressure drop, along with one's axis, which is energy consuming and has to be estimated. For the estimation resistant coefficient, dependent on flow regime and streamlined surface roughness, is required. Turbulence f -model applicable for calculation for both laminar and turbulent flow and smooth and rough walls is used for investigation. The problem of incompressible viscous liquid steady flow in a smooth round pipe is considered for different Reynolds numbers. First integrals for velocity profile and turbulence measure are obtained in form of transcendental equations and solved by Newton's method for algebraic equation system. Calculated results are compared with data from alternative theoretical approaches and experiments.

Keywords: pipe flow, viscosity, f -model of turbulence, Reynolds number, pressure difference, differential equations, boundary conditions, velocity profile, resistance coefficient.

References

1. Lojczyanskij L. G. *Mehanika zhidkosti i gaza [Fluid and gas mechanics]*. Moscow, Drofa Publ., 2003, 840 p. (In Russian)
2. Schlichting H. *Grenzschicht Theorie [Boundary layer theory]*. Berlin, Verlag G. Braun Publ., 1965, 736 p. (Rus. ed.: Schlichting H. *Teoriya pogrannichnogo sloya*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 711 p.)
3. Pavlovskij V. A., Nikushhenko D. V. *Vychislitel'naya gidrodinamika. Teoreticheskie osnovy [Computational Fluid Dynamics. Theoretical fundamentals]*. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2018, 368 p. (In Russian)
4. Robertson J. M., Martin J. D., Burkhurt T. H. Turbulent flow in rough pipes. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 1963, no. 7, pp. 253–265.
5. Jimenz J. Turbulent flow over rough walls. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2004, no. 36, pp. 173–196.

* The work is supported by Russian Fundamental Research (grand N 16-08-00890).

6. Sedova O., Pronina Y. A new model for the mechanochemical corrosion of a thin spherical shell. *EPJ Web of Conferences*, 2016, vol. 108. 02040, pp. 1–6.
7. Patel V. C. Perspective: flow at high Reynolds number and over rough surfaces — Achilles heel of CFD. *J. Fluids Eng.*, 1998, no. 120, pp. 434–444.
8. Moody L. F. Friction factors for pipe flow. *Trans. ASME*, November 1944, vol. 66, pp. 671–684.
9. Tullis J. P., Wang J.-S. Turbulent flow in the entry region of a rough pipe. *ASME J. Fluids Eng.*, 1974, no. 75, pp. 62–68.
10. Pavlovskij V. A. Ob odnoj fenomenologicheskoy alternative gipoteze dliny puti peremeshivaniya [About a phenomenological alternative to the mixing length hypothesis]. *Modeli mehaniki sploshnoj sredy. Sb. Fizicheskaya mehanika. Vyp. 7* [Models of continuum mechanics. Physical mechanics digest. release. Iss. 7]. Pod red. B. V. Filippova. Saint Petersburg, Saint Petersburg State University Publ., 1998, pp. 21–35. (In Russian)
11. Pavlovskij V. A. Uchet sherohovatosti stenki dlya edinoj fenomenologicheskoy modeli techeniya vyazkoj zhidkosti pri proizvolnykh chislakh Reynoldsa [Accounting for wall roughness for a unified phenomenological model of viscous fluid flow at arbitrary Reynolds numbers]. *Problemy ekonomii toplivno-energeticheskikh resursov na predpriyatiyah i TES: mezhvuz. sb. nauch. trudov* [Problems of saving fuel and energy resources in enterprises and thermal power plants: an intercollege digest of scientific papers]. Saint Petersburg, SPb GTU RP Publ., 2002, pp. 11–17. (In Russian)
12. Nikuradze J. *Laws of flow in rough pipes* (English translation of Strömungsgesetze in rauhen Rohren, VDI-Forschungsheft 361, Ausgabe B, Bd 4, pp. 1–22, July/August 1933), p. 63. Washington, NACA Technical Memo 1292 Press, November 1950.
13. Korotkin A. I., Rogovoj Yu. A. *Metod rascheta prodol'nykh srednih skorostej v pristennykh turbulentnykh techeniyah neszhimaemoj zhidkosti* [Calculation method for longitudinal average velocities of near-wall turbulent incompressible fluid flows]. Saint Petersburg, MorVest Publ., 2009, 121 p. (In Russian)

Received: May 8, 2018.

Accepted: December 18, 2018.

Author's information:

Valery A. Pavlovsky — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; v.a.pavlovsky@gmail.com

Alexey L. Chistov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; a.chistov@spbu.ru

Dmitry M. Kuchinsky — PhD in Technics, Associate Professor; kuchinskiy-dm@bk.ru