

## Анализ динамики заряженных частиц в идеальной ловушке Пеннинга с вращающимся полем и буферным газом

А. Д. Овсянников

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Овсянников А. Д. Анализ динамики заряженных частиц в идеальной ловушке Пеннинга с вращающимся полем и буферным газом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 1. С. 62–75. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.105>

Рассматривается динамика частиц в ловушке Пеннинга с вращающимся электрическим полем и буферным газом. Ловушки Пеннинга и их модификации, например ловушка Пеннинга–Малмберга–Сурко и ловушка Чарльтона, активно используются для накопления и хранения заряженных частиц вещества и антивещества для дальнейшего использования в различных экспериментах. Однако полученные ранее результаты недостаточно строгие с математической точки зрения и позволяют анализировать динамику частиц только в узком диапазоне изменения параметров ловушки. В данной работе установлен общий аналитический критерий, которому должны удовлетворять параметры ловушки для обеспечения режимов сжатия (охлаждения) или расширения (нагрева) пучка траекторий, соответствующих случаям асимптотической устойчивости или неустойчивости исследуемой системы. Найдены зоны устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров ловушки. Определены наиболее эффективные сочетания параметров, обеспечивающие максимально возможную степень устойчивости (или соответственно неустойчивости) системы при минимально возможных амплитудах вращающегося электрического поля. Построены аналитические решения для быстрого расчета и анализа поведения отдельных частиц или огибающих эллипсоидального пучка траекторий и оценки радиуса накапливаемого облака. Предложенный подход применим для анализа системы при любых значениях параметров изучаемой модели динамики частиц в ловушке.

*Ключевые слова:* ловушка Пеннинга, вращающаяся стенка, ловушка Пеннинга–Малмберга–Сурко, динамика заряженных частиц, устойчивость.

**Введение.** Действие электромагнитных ловушек состоит в формировании электрических и магнитных полей, обеспечивающих локализацию заряженных частиц в ограниченной области накопления в течение достаточно длительного времени. Также, кроме требования ограниченности занимаемого частицами объема, может возникать требование сжатия (уменьшения) или расширения (увеличения) этого объема с течением времени. Электромагнитные ловушки используются для накопления и длительного удержания (хранения) заряженных частиц в различных целях в атомной и ядерной физике, физике ускорителей, масс-спектрометрии, плазменных установках. Существует несколько основных типов ловушек, например квадрупольная ловушка Пауля, ловушка Пеннинга и ее различные модификации [1, 2] (подробный обзор разных типов ловушек представлен в [3]).

В настоящей работе рассматривается динамика заряженных частиц в идеальной ловушке Пеннинга с газом, дополненной элементом, называемым «вращающейся»

стенкой» (Rotating Wall — RW). Этот элемент создает по всей длине ловушки вращающееся в поперечной плоскости дипольное электрическое поле. Напряженность вращающегося поля в продольном (аксиальном) направлении возрастает по абсолютной величине от центра ловушки к краям и имеет противоположную направленность по разные стороны от центра ловушки (т. е. центрально симметрично). Исследуемая модель движения также может быть использована при моделировании ловушки Пеннинга—Малмберга—Сурко — открытой ловушке цилиндрической формы [3].

Поля рассматриваемой ловушки комбинируются из электростатического аксиально симметричного поля электродов ловушки, продольного однородного магнитного поля и переменного (вращающегося) электрического поля.

Комбинация постоянных полей, соответствующая собственно идеальной ловушке Пеннинга, позволяет создать устойчивую систему, в которой частицы колеблются вокруг положения равновесия без затухания амплитуды колебаний. Выделяют три типа таких колебаний (или движений): циклотронные, магнетронные и аксиальные (см., например, [1, 2, 4, 5]). При этом уменьшения или увеличения амплитуды колебаний не происходит. Все движения частиц в ловушке являются комбинацией трех типов колебаний. Заметим, что постоянное аксиально симметричное электрическое поле электродов ловушки оказывает фокусирующее воздействие в продольном направлении и дефокусирующее в радиальном. Удержание частиц в радиальном направлении происходит с помощью однородного магнитного поля.

Добавление в ловушку тормозящего частицы буферного газа вызывает как затухание циклотронных и аксиальных колебаний, так и относительно медленный рост амплитуды магнетронных колебаний.

Для того чтобы вызвать затухание всех типов колебаний, добавляется вращающееся электрическое поле с частотой вращения и амплитудой, подбираемыми в соответствии с остальными параметрами ловушки: постоянным потенциалом на электродах, величиной магнитного поля и тормозящим коэффициентом газа. Надлежащим выбором частоты вращения (в очень узком диапазоне вблизи некоторого оптимального значения — «эффективной частоты для сжатия») можно добиться максимального эффекта затухания колебаний при относительно малых амплитудах вращающегося поля.

Также добавление вращающегося поля может, напротив, приводить к стремительному увеличению показателя роста амплитуды магнетронных колебаний. Наиболее эффективно (при наименьших амплитудах вращающегося поля) это будет происходить для частот вращения вблизи «эффективной частоты для расширения», аналогично ситуации со сжатием (затуханием).

Представим потенциал электрического поля в рассматриваемой ловушке в следующем виде [2, 3]:

$$\Phi(z, r, \theta) = \frac{m \omega_z^2}{q} \left( z^2 - \frac{r^2}{2} \right) + \frac{m}{q} a \cdot z \cdot r \cdot \cos(\theta + \omega_r t). \quad (1)$$

В (1)  $m$  и  $q$  — масса и заряд частицы,  $\omega_z$  — частота аксиальных колебаний частицы в ловушке при отсутствии газа и вращающегося поля,  $a$  и  $\omega_r$  — амплитуда и частота вращающегося поля, переменные  $z$ ,  $r$ ,  $\theta$  — аксиальная, радиальная и угловая координаты с осями, соответствующими осям симметрии электродов ловушки.

Движение заряженных частиц в полях изучаемой ловушки описывается системой уравнений [3]

$$\ddot{x} = \frac{\omega_z^2}{2}x - az \cos(\omega_r t) + \Omega_c \dot{y} - k\dot{x}, \quad (2)$$

$$\ddot{y} = \frac{\omega_z^2}{2}y + az \sin(\omega_r t) - \Omega_c \dot{x} - k\dot{y}, \quad (3)$$

$$\ddot{z} = -\omega_z^2 z - k\dot{z} - a(x \cos(\omega_r t) - y \sin(\omega_r t)), \quad (4)$$

в которой  $\Omega_c = qB/m$  — циклотронная частота в идеальной ловушке,  $B = e_z B$  — аксиальное однородное магнитное поле, параметр  $k > 0$  представляет тормозящую силу, возникающую из-за взаимодействия частиц в ловушке с буферным газом.

Линейная модель взаимодействия частиц с газом может использоваться при достаточно малых (порядка 1 эВ) энергиях частиц. При этом параметр  $k = 0$  соответствует ловушке без буферного газа, параметр  $a = 0$  — выключенному вращающемуся полю. Уравнения (2)–(4) описывают динамику одиночной частицы в ловушке. В дальнейшем ограничимся анализом решения в приближении, отвечающем типичным экспериментальным значениям параметров [1]

$$\Omega_c \gg \omega_z \gg \frac{\omega_z^2}{2\Omega_c} \gg k > 0. \quad (5)$$

Введем комплексную функцию  $\xi = x + iy$  и запишем систему уравнений (2)–(4) таким образом:

$$\ddot{\xi} + (k + i\Omega_c)\dot{\xi} - \frac{\omega_z^2}{2}\xi = -az \exp(-i\omega_r t), \quad (6)$$

$$\ddot{z} + k\dot{z} + \omega_z^2 z = -\frac{a}{2}(\xi \cdot \exp(i\omega_r t) + \bar{\xi} \cdot \exp(-i\omega_r t)). \quad (7)$$

Теперь уравнения (6) и (7) характеризуют движение заряженных частиц в ловушке. Решение (7) при  $a = 0$  в виде  $\exp(\lambda t)$  дает характеристический полином  $Q(\lambda)$  с корнями  $\mu_+$ ,  $\mu_-$ :

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + k\lambda + \omega_z^2, \quad \mu_{\pm} = -\frac{k}{2} \pm i\omega_b, \quad \omega_b = \sqrt{\omega_z^2 - k^2/4}. \quad (8)$$

Здесь  $\omega_b$  — модифицированная частота продольных (аксиальных) колебаний. Аналогично, решив уравнение (6) при  $a = 0$ , получаем характеристический полином

$$R(\lambda) = \lambda^2 + (i\Omega_c + k)\lambda - \frac{\omega_z^2}{2} \quad (9)$$

с корнями  $\lambda_+$ ,  $\lambda_-$ , которые удобно представить в виде

$$\lambda_+ = r_c - i\omega_c, \quad \lambda_- = r_m - i\omega_m. \quad (10)$$

В формулах (10)  $r_c = \text{Re}\lambda_+ = -(k + r_m)$ ,  $r_m = \text{Re}\lambda_-$ ,  $\omega_m$  — модифицированная частота магнетронных колебаний,  $\omega_c = (\Omega_c - \omega_m)$  — модифицированная частота циклотронных колебаний. При выполнении соотношений (5) можно использовать следующие приближенные формулы:  $\omega_m \approx \omega_z^2/2\Omega_c$ ,  $r_m \approx k\omega_m/\Omega_c \ll k$ ,  $\omega_b \approx \omega_z$ ,  $\omega_c \approx \Omega_c$ .

Модифицированные частоты колебаний определяются мнимыми частями корней полиномов (8) и (9). Они несущественно отличаются от частот, получаемых для идеальной ловушки при  $a = 0$ ,  $k = 0$ . От отрицательных вещественных частей этих

корней зависят коэффициенты уменьшения (сжатия) амплитуды колебаний соответствующих типов движений, а от положительных — коэффициенты увеличения (расширения). В идеальной ловушке вещественные части корней равны нулю, т. е. амплитуды колебаний сохраняются.

Нетрудно заметить, что при  $k > 0$  и  $a = 0$  для циклотронных и аксиальных движений имеет место сжатие (затухание амплитуды колебаний), а для магнетронных — расширение (нарастание амплитуды колебаний).

**Приведение уравнений движения к уравнениям с постоянными коэффициентами.** Для исследования устойчивости движения частиц при произвольных значениях  $a$  введем новую переменную

$$\psi = u + iv = \xi \exp(i\omega_r t). \quad (11)$$

Введение переменной (11) равнозначно следующей замене в уравнениях (2)–(4):

$$u = x \cos(\omega_r t) - y \sin(\omega_r t), \quad v = x \sin(\omega_r t) + y \cos(\omega_r t),$$

которая означает переход к подвижной системе координат, получаемой из неподвижной равномерным вращением в поперечной плоскости с угловой частотой  $\omega_r$  вокруг оси  $z$ . В результате уравнения (6) и (7) примут вид

$$\ddot{\psi} + (i(\Omega_c - 2\omega_r) + k)\dot{\psi} + \left(\omega_r\Omega_c - \omega_r^2 - \frac{\omega_z^2}{2} - i\omega_r k\right)\psi = -az, \quad (12)$$

$$\ddot{z} + kz + \omega_z^2 z = -a \operatorname{Re}(\xi \exp(i\omega_r t)) = -a \operatorname{Re}\psi = -\frac{a}{2}(\psi + \bar{\psi}) = -au. \quad (13)$$

Заметим, что характеристические числа  $\nu_{\pm}$  и характеристический полином  $P(\lambda)$  уравнения (12) при  $a = 0$  связаны с характеристическими числами  $\lambda_{\pm}$  уравнения (6) и его полиномом (9) простыми соотношениями:  $\nu_{\pm} = \lambda_{\pm} + i\omega_r$ ,  $P(\lambda) = R(\lambda - i\omega_r)$ , а характеристический полином уравнения (13) есть полином (8).

Разобьем уравнение (12) на вещественную и мнимую части, и в результате в новых переменных получим вместо (2)–(4) стационарную, с постоянными коэффициентами, систему уравнений

$$\ddot{u} + k\dot{u} - (\Omega_c - 2\omega_r)\dot{v} + \left(\omega_r\Omega_c - \omega_r^2 - \frac{\omega_z^2}{2}\right)u + k\omega_r v + az = 0, \quad (14)$$

$$\ddot{v} + k\dot{v} + (\Omega_c - 2\omega_r)\dot{u} + \left(\omega_r\Omega_c - \omega_r^2 - \frac{\omega_z^2}{2}\right)v - k\omega_r u = 0, \quad (15)$$

$$\ddot{z} + kz + \omega_z^2 z + au = 0. \quad (16)$$

Характеристические числа системы (14)–(16) находим как корни полинома

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + k\lambda + \left(\omega_r\Omega_c - \omega_r^2 - \frac{\omega_z^2}{2}\right) & -(\Omega_c - 2\omega_r)\lambda + k\omega_r & a \\ (\Omega_c - 2\omega_r)\lambda - k\omega_r & \lambda^2 + k\lambda + \left(\omega_r\Omega_c - \omega_r^2 - \frac{\omega_z^2}{2}\right) & 0 \\ a & 0 & \lambda^2 + k\lambda + \omega_z^2 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Раскрыв определитель (17), находим, что

$$\begin{aligned} \chi(\lambda, a^2, \omega_r) &= Q(\lambda)P(\lambda)\bar{P}(\lambda) - \frac{a^2}{2}(P(\lambda) + \bar{P}(\lambda)) = \\ &= Q(\lambda)R(\lambda - i\omega_r)\bar{R}(\lambda + i\omega_r) - \frac{a^2}{2}(R(\lambda - i\omega_r) + \bar{R}(\lambda + i\omega_r)). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь полиномы  $\bar{P}(\lambda) = (\lambda - \bar{\nu}_+)(\lambda - \bar{\nu}_-)$  и  $\bar{R}(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda}_+)(\lambda - \bar{\lambda}_-)$  получаются из полиномов  $P(\lambda)$  и  $R(\lambda)$  комплексным сопряжением их коэффициентов. При этом  $\bar{P}(\lambda) = \bar{R}(\lambda + i\omega_r)$ .

Пусть характеристическое уравнение (18) определяет характеристические числа  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ) как функции параметра  $a^2$  при некоторой фиксированной частоте  $\omega_r$ :  $\lambda_k = \lambda_k(a^2, \omega_r)$ , и  $\gamma_\chi$  — максимум их вещественной части, равный

$$\gamma_\chi(a^2, \omega_r) = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k(a^2, \omega_r). \quad (19)$$

Необходимым и достаточным условием реализации эффекта сжатия (асимптотической устойчивости) для системы (14)–(16) и тем самым для системы (2)–(4) является расположение всех корней характеристического полинома (18) в левой полуплоскости:

$$\gamma_\chi < 0. \quad (20)$$

Достаточным условием реализации эффекта расширения (неустойчивости) для системы (14)–(16) и тем самым для системы (2)–(4) является наличие хотя бы одного корня характеристического полинома (18) в правой полуплоскости:

$$\gamma_\chi > 0. \quad (21)$$

Отметим, что в случае, когда  $\gamma_\chi = 0$ , система будет устойчивой, если, в частности, все корни полинома (18) различные, что обычно реализуется при типовых соотношениях параметров системы (5) и разумном выборе величины амплитуды вращающегося поля. В случае кратных корней требуется дополнительная проверка.

Заметим также, что так как для полинома (18) по формуле Виета и определению (19) выполняются соотношения  $-\sum_{i=1}^6 \lambda_i = 3k = -\sum_{i=1}^6 \operatorname{Re} \lambda_i \geq -6\gamma_\chi$ , то при любых параметрах системы будет справедливо неравенство

$$\gamma_\chi \geq -\frac{k}{2}. \quad (22)$$

Абсолютную величину  $\gamma_\chi$  в случае (20) будем называть степенью устойчивости системы или коэффициентом сжатия пучка, а в случае (21) — степенью неустойчивости или коэффициентом расширения пучка. Из (22) очевидно, что коэффициент сжатия пучка (степень устойчивости системы) не выше, чем  $k/2$ , при любых значениях параметров системы.

Система (14)–(16) может быть переписана как система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами (см. ниже формулу (23)). Очевидно, что объем, занимаемый траекториями такой системы в 6-мерном фазовом пространстве, будет сжиматься, так как след матрицы системы будет отрицательным, однако это не гарантирует в общем случае стремления к нулю всех компонентов решений системы и асимптотическую устойчивость решений по Ляпунову.

**Динамика огибающих пучка заряженных частиц.** Приведем систему (14)–(16) к системе дифференциальных уравнений первого порядка (к нормальной форме), вводя новые переменные  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ , здесь  $p_1 = u$ ,  $p_2 = v$ ,  $p_3 = z$ ,  $p_4 = \dot{u}$ ,  $p_5 = \dot{v}$ ,  $p_6 = \dot{z}$ :

$$\frac{dp}{dt} = A \cdot p, \quad (23)$$

где матрица системы  $A$  определяется коэффициентами системы (14)–(16) и имеет порядок  $6 \times 6$ .

Пусть множество начальных состояний  $p_0$  для системы (23) заполняет в 6-мерном пространстве эллипсоид  $E_0$ , заданный симметричной положительно определенной матрицей  $B_0$ :

$$p_0^T B_0 p_0 \leq 1. \quad (24)$$

Запишем следующее матричное уравнение:

$$\frac{dS}{dt} = AS + SA^T \quad (25)$$

с начальными условиями

$$S_0 = B_0^{-1}. \quad (26)$$

Как известно, диагональные элементы  $S_{ii}(t)$  матрицы решения уравнения (25) с начальными условиями (26) являются квадратами максимальных значений  $p_i$  (в момент  $t$ ) по сечению пучка траекторий  $P_{t, E_0} = \{p = p(t, p_0); p_0^T B_0 p_0 \leq 1\}$  системы (23), начинающихся из множества (24):

$$\max_{p_0 \in E_0} p_i(t, p_0) = \sqrt{S_{ii}(t)}.$$

Пусть  $Y(t)$  — фундаментальная матрица системы (23), нормализованная в нуле. Тогда решение уравнения (25) может быть представлено так:

$$S(t) = Y(t) S_0 Y(t)^T. \quad (27)$$

Фундаментальная матрица системы (23) может быть построена методом Эйлера, когда известны приближенные значения собственных чисел матрицы  $A$ , которые могут быть найдены стандартными вычислительными процедурами. Например, в случае трех различных пар комплексно сопряженных собственных значений  $\lambda_i$ ,  $\bar{\lambda}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , имеем, что

$$Y(t) = X(t) X^{-1}(0),$$

где  $X(t) = (g_1, h_1, g_2, h_2, g_3, h_3)$ ,  $g_i(t) = \operatorname{Re}(\gamma_i e^{\lambda_i t})$ ,  $h_i(t) = \operatorname{Im}(\gamma_i e^{\lambda_i t})$ . Здесь постоянные векторы  $\gamma_i$  — собственные векторы, соответствующие собственным числам  $\lambda_i$ :  $A\gamma_i = \lambda_i \gamma_i$ .

Таким образом, можно строить и численно исследовать приближенные аналитические решения (27), а также анализировать поведение огибающих пучка траекторий (и радиусы накопленных сгустков), а не только отдельные траектории.

**Определение эффективных частот для режимов сжатия и расширения пучка.** Рассмотрим, как меняются характеристические числа системы (14)–(16) при включении вращающегося электрического поля. Пусть характеристическое уравнение (18) определяет характеристические числа  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ) как функции параметра  $a^2$  при некоторой фиксированной частоте  $\omega_r$ :  $\lambda_k = \lambda_k(a^2, \omega_r)$ .

Обозначим  $\lambda_k^0$  характеристические числа системы при  $a = 0$ :  $\lambda_k^0 = \lambda_k(0, \omega_r)$ ,  $k = 1, \dots, 6$ . Они известны:  $\lambda_1^0 = \nu_+ = \lambda_+ + i\omega_r$ ,  $\lambda_2^0 = \bar{\nu}_+ = \bar{\lambda}_+ - i\omega_r$ ,  $\lambda_3^0 = \nu_- = \lambda_- + i\omega_r$ ,  $\lambda_4^0 = \bar{\nu}_- = \bar{\lambda}_- - i\omega_r$ ,  $\lambda_5^0 = \mu_+$ ,  $\lambda_6^0 = \mu_-$ .

Подставив  $\lambda = \lambda_k(a^2, \omega_r)$  в уравнение (18), найдем по  $a^2$  тождество, которое затем продифференцируем по  $a^2$ :

$$\frac{d\chi(\lambda_k(a^2, \omega_r), a^2, \omega_r)}{d(a^2)} = \frac{\partial\chi(\lambda_k(a^2, \omega_r), a^2, \omega_r)}{\partial(a^2)} + \frac{\partial\chi(\lambda_k(a^2, \omega_r), a^2, \omega_r)}{\partial\lambda} \frac{\partial\lambda_k(a^2, \omega_r)}{\partial(a^2)} \equiv 0.$$

Отсюда при  $a = 0$  получаем уравнение

$$\lambda'_{k,0} = \left. \frac{\partial\lambda_k(a^2, \omega_r)}{\partial(a^2)} \right|_{a=0} = \frac{P(\gamma_k) + \bar{P}(\gamma_k)}{2 \left( \begin{array}{l} Q'(\gamma_k)P(\gamma_k)\bar{P}(\gamma_k) + Q(\gamma_k)P'(\gamma_k)\bar{P}(\gamma_k) + \\ + Q(\gamma_k)P(\gamma_k)\bar{P}'(\gamma_k) \end{array} \right)}.$$

Заметим, что

$$\lambda_k(a^2, \omega_r) \approx \lambda_k^0 + a^2\lambda'_{k,0} \quad (k = 1, \dots, 6).$$

Рассмотрим подробнее величину  $\lambda'_{3,0}$ :

$$\lambda'_{3,0} = \frac{1}{2Q(\lambda_3^0)P'(\lambda_3^0)} \quad (28)$$

и ее вещественную часть, так как для исследования вопросов устойчивости магнетронное движение, которому она соответствует, играет основную роль:

$$\begin{aligned} \lambda'_{3,0} &= \frac{-1}{2\Delta\lambda Q(\lambda_- + i\omega_r)} = -\frac{-i}{2\Delta\lambda(-i)(Q(\lambda_-) + i\omega_r Q'(\lambda_-) - \omega_r^2)} = \\ &= \frac{i}{2\Delta\lambda \left( p_m(\omega_r - \omega_m) + i \left( (\omega_r - \omega_m)^2 / p_m^2 - q_m \right) \right)}, \end{aligned}$$

где  $p_m = 2r_m + k$  и  $q_m = r_m^2 + r_mk + \omega_z^2$ ,  $\Delta\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ .

Введем также полином  $K(\omega_r) = |-iQ(\lambda_- + i\omega_r)|^2$ , равный

$$K(\omega_r) = (p_m(\omega_r - \omega_m))^2 + \left( (\omega_r - \omega_m)^2 / p_m^2 - q_m \right)^2.$$

Также заметим, что

$$\operatorname{Re}(-iQ(\lambda_- + i\omega_r)) = p_m(\omega_r - \omega_m), \quad \operatorname{Im}(-iQ(\lambda_- + i\omega_r)) = (\omega_r - \omega_m)^2 / p_m^2 - q_m.$$

Тогда, очевидно, получаем, что

$$\lambda'_{3,0} = \frac{i}{2\Delta\lambda} \frac{p_m(\omega_r - \omega_m) - i \left( (\omega_r - \omega_m)^2 / p_m^2 - q_m \right)}{K(\omega_r)}.$$

С учетом соотношений (5) и приближенных формул для  $\omega_m$ ,  $r_m$  и  $\omega_c$  будем иметь приближенное выражение  $L(\omega_r)$  для вещественной части формулы (28)

$$\operatorname{Re}\lambda'_{3,0} = \operatorname{Re}\lambda'_{4,0} \cong L(\omega_r) = -\frac{p_m(\omega_r - \omega_m)}{2\Omega_c K(\omega_r)}. \quad (29)$$

Выясним, при каких частотах значение  $L(\omega_r)$ , определяемое по (29), будет принимать минимальное и максимальное значения. Для этого отыщем вещественные корни уравнения (нули производной выражения (29)):

$$\frac{d}{d\omega_r}L(\omega_r) = \frac{3(\omega_r - \omega_m)^4 - (2q_m - p_m^2)(\omega_r - \omega_m)^2 - q_m^2}{2\Omega_c K^2(\omega_r)} p_m^4 = 0. \quad (30)$$

Это равенство нулю возможно только тогда, когда числитель в (30) обращается в нуль. Таким образом, для решения (30) нужно найти корни биквадратного уравнения

$$3(\omega_r - \omega_m)^4 - (2q_m - p_m^2)(\omega_r - \omega_m)^2 - q_m^2 = 0$$

по формулам

$$(\omega_r - \omega_m)^2 = \frac{1}{6} \left( (2q_m - p_m^2) \pm \sqrt{(2q_m - p_m^2)^2 + 12q_m^2} \right).$$

При этом с учетом соотношений (5) и требования вещественности корней получаем два вещественных корня

$$\omega_r^\pm = \omega_m \mp \sqrt{\frac{1}{6} \left( (2q_m - p_m^2) + \sqrt{(2q_m - p_m^2)^2 + 12q_m^2} \right)}.$$

Очевидно, корню  $\omega_r^+$  будет соответствовать глобальный максимум  $L^+ = L(\omega_r^+) > 0$ , а корню  $\omega_r^-$  — глобальный минимум  $L^- = L(\omega_r^-) < 0$ , так как  $L(\omega_r) \xrightarrow{\omega_r \rightarrow \pm\infty} \mp 0$ .

Можно найти приближенные значения  $\omega_r^\pm$  и  $L^\pm$  с использованием соотношений (5)

$$\omega_r^\pm \approx \omega_m \mp \omega_b, \quad L^\pm \approx \pm \frac{1}{2k\Omega_c\omega_z}.$$

Таким образом, проведенный анализ показывает, что наибольшая чувствительность вещественной части собственного числа, соответствующего магнетронному движению, достигается при двух частотах вращающегося поля  $\omega_r^\pm$ . Будем называть эти частоты эффективными для сжатия ( $\omega_r^-$ ) и расширения ( $\omega_r^+$ ).

**Формулы расчета коэффициентов сжатия и расширения пучка.** Введем, что

$$\theta = (\lambda - \nu_-), \quad \omega_{r,\varepsilon}^\mp = \omega_m \pm \omega_b + \varepsilon, \quad \sigma = \left( r_m + \frac{k}{2} \right).$$

Тогда величины  $\nu_\pm$  и  $(\nu_- - \nu_+)$  могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} \nu_- &= \lambda_- + i\omega_{r,\varepsilon}^\mp = r_m + i\varepsilon \pm i\omega_b, \\ \nu_+ &= \lambda_+ + i\omega_{r,\varepsilon}^\mp = -(k + r_m) + i\varepsilon \pm i\omega_b + i(\omega_m - \omega_c), \\ \nu_- - \nu_+ &= -\Delta\lambda = (k + 2r_m) - i(\omega_m - \omega_c) = 2\sigma - i(\omega_m - \omega_c). \end{aligned}$$

Заметим, что полиномы  $Q(\lambda)$ ,  $P(\lambda)$  и  $\bar{P}(\lambda)$ , входящие в представление характеристического полинома  $\chi(\lambda)$ , могут быть переразложены по степеням  $\theta$ :

$$Q(\nu_- + \theta) = Q(\nu_-) + Q'(\nu_-)\theta + \theta^2 = (\sigma + i\varepsilon)(\sigma + i\varepsilon \pm 2i\omega_b) + 2(\sigma + i\varepsilon \pm i\omega_b)\theta + \theta^2,$$

$$\begin{aligned}
P(\nu_- + \theta) &= P'(\nu_-)\theta + \theta^2 = (2\sigma - i(\omega_m - \omega_c))\theta + \theta^2, \\
\bar{P}(\nu_- + \theta) &= \bar{P}(\nu_-) + \bar{P}'(\nu_-)\theta + \theta^2 = 2(i\varepsilon \pm i\omega_b)[2(\sigma + i\varepsilon \pm i\omega_b) + i(\omega_m - \omega_c)] + \\
&\quad + [2\sigma + 4(i\varepsilon \pm i\omega_b) + i(\omega_m - \omega_c)]\theta + \theta^2, \\
&\quad - \frac{a^2}{2}(P(\nu_- + \theta) + \bar{P}(\nu_- + \theta)) = \\
&= -a^2(i\varepsilon \pm i\omega_b)[2(\sigma + i\varepsilon \pm i\omega_b) + i(\omega_m - \omega_c)] - 2a^2[\sigma + (i\varepsilon \pm i\omega_b)]\theta - a^2\theta^2.
\end{aligned}$$

Будем считать, что выполняются формулы (5) и следующие соотношения:

$$|\varepsilon| \ll \omega_z \text{ и } |\theta| \ll \omega_z.$$

Перепишем характеристический полином (18) по степеням  $\theta$  и разделим на  $(-4\omega_b^2(\omega_c - \omega_m)^2)$ , пренебрегая далее заведомо малыми величинами и переходя к приближенному выражению

$$\begin{aligned}
\frac{\chi(\nu_- + \theta, a^2, \omega_{r,\varepsilon}^\mp)}{-4\omega_b^2(\omega_c - \omega_m)^2} &= -\frac{1}{4} \frac{Q(\nu_- + \theta)}{\omega_b} \frac{P(\nu_- + \theta)}{(\omega_c - \omega_m)} \frac{\bar{P}(\nu_- + \theta)}{\omega_b(\omega_c - \omega_m)} + \\
&\quad + \frac{a^2}{8\omega_b(\omega_c - \omega_m)} \left( \frac{P(\nu_- + \theta) + \bar{P}(\nu_- + \theta)}{\omega_b(\omega_c - \omega_m)} \right) \approx \\
&\approx -\frac{1}{4} [\pm 2i(\sigma + i\varepsilon) \pm 2i\theta] i\theta (\pm 2) + \frac{a^2}{4\omega_b(\omega_c - \omega_m)} \left( \pm 1 + \frac{\pm 2i}{\omega_c - \omega_m} \theta + \frac{1}{\omega_b(\omega_c - \omega_m)} \theta^2 \right) = \\
&= (\sigma + i\varepsilon)\theta + \theta^2 + \frac{a^2}{4\omega_b(\omega_c - \omega_m)} \left( \pm 1 + \frac{\pm 2i}{\omega_c - \omega_m} \theta + \frac{1}{\omega_b(\omega_c - \omega_m)} \theta^2 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Окончательно получим, что

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}(\theta) &= \frac{\chi(\nu_- + \theta, a^2, \omega_{r,\varepsilon}^\mp)}{-4\omega_b^2(\omega_c - \omega_m)^2} \approx \\
&\approx \pm \frac{a^2}{4\omega_b(\omega_c - \omega_m)} + \left[ \sigma + i\varepsilon \pm i \frac{a^2}{2\omega_b(\omega_c - \omega_m)^2} \right] \theta + \left[ 1 + \frac{a^2}{4\omega_b^2(\omega_c - \omega_m)^2} \right] \theta^2.
\end{aligned}$$

Введем новые обозначения:

$$\delta^2 = \frac{a^2}{\omega_b(\omega_c - \omega_m)}, \quad \alpha^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4\omega_b(\omega_c - \omega_m)}, \quad \beta = \frac{\delta^2}{2(\omega_c - \omega_m)}.$$

Тогда для приближенного расчета корней характеристического полинома (18) исследуемой системы получаем квадратный полином

$$\hat{\chi}(\theta) \approx \pm \frac{\delta^2}{4} + [\sigma + i(\varepsilon \pm \beta)]\theta + \alpha^2\theta^2. \quad (31)$$

Для определения коэффициентов сжатия и расширения интересует только один корень — «правый»:

$$\theta_\mp = \frac{-\sigma - i\varepsilon \mp i\beta + \sqrt{(\sigma + i\varepsilon \pm i\beta)^2 \mp \delta^2\alpha^2}}{2\alpha^2}.$$

При этом в качестве приближенного значения коэффициентов сжатия и расширения может быть использована следующая формула, которая уточняет формулу, полученную в работе [2]:

$$\gamma_{\chi}(a^2, \omega_{r,\varepsilon}^{\mp}) \approx \operatorname{Re}(\nu_{-} + \theta_{\mp}) = r_m + \operatorname{Re}\theta_{\mp}. \quad (32)$$

Формула (32) качественно лучше отображает поведение коэффициентов сжатия и расширения при больших и малых амплитудах вращающегося поля. Это связано с тем, в частности, что в работе [2] коэффициентам  $\sigma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  в соответствующем (31) квадратном уравнении приписаны значения  $k/2$ , 1 и 0 соответственно.

**Результаты расчетов.** Основные параметры системы, использованные при расчетах, равны

$$k = 1400 \text{ с}^{-1}, \quad \Omega_c = 4.4 \cdot 10^9 \text{ рад/с}, \quad \omega_z = 59.6 \cdot 10^6 \text{ рад/с},$$

$$\omega_r^- = 60 \cdot 10^6 \text{ рад/с}, \quad \omega_r^+ = -59.1963 \cdot 10^6 \text{ рад/с}.$$

В качестве заряженной частицы брали электрон. Для различных значений параметров  $a$  и  $\omega_r$  были найдены и неустойчивые, и асимптотически устойчивые варианты реализации системы (рис. 1). Параметр  $a$  изменяется от нуля до  $5 \cdot 10^{14} \text{ (с}^{-2}\text{)}$ ,  $\omega_r$  принимает значения в диапазонах  $\{\omega_r^- \pm 10\%\}$  с шагом 1 % и  $\{\omega_r^- \pm 1\%\}$  с шагом 0.25 %, величина  $\gamma_{\chi}$  меняется в пределах от  $r_m \approx +0.12$  до  $(-k/4) = -350$ . Максимальный коэффициент сжатия  $k/4$  получается только на кривой, соответствующей эффективной для сжатия частоте  $\omega_r^-$ .

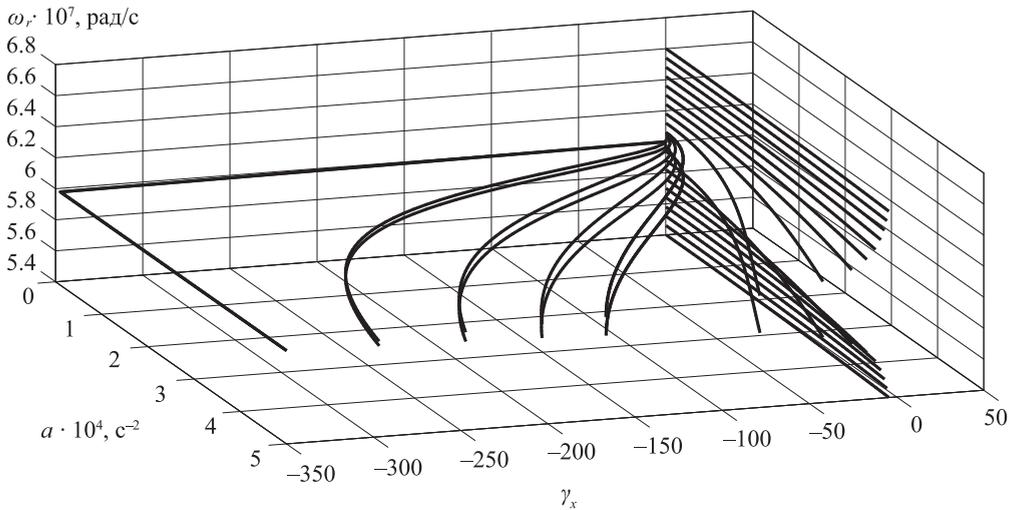


Рис. 1. Зависимость величины  $\gamma_{\chi}$  (определяющей коэффициенты сжатия или расширения) от амплитуды вращающегося поля  $a$  при различных значениях частоты его вращения  $\omega_r$ .

При этом на рис. 1 хорошо видно, что даже небольшие отклонения от эффективной частоты приводят к существенному уменьшению коэффициента сжатия. Таким образом, степень устойчивости исследуемой системы (2)–(4) очень чувствительна к выбору частоты  $\omega_r$  вблизи эффективного значения.

Расчеты показывают, что даже при небольших отклонениях частоты вращающегося поля от эффективных значений необходимо существенно увеличивать амплитуду вращающегося поля, чтобы добиться сравнимых с максимальными значениями коэффициента сжатия (степени устойчивости). Однако, начиная с некоторой величины амплитуды, степень устойчивости не увеличивается, а уменьшается, что приводит при дальнейшем росте амплитуды к потере устойчивости. В случае существенного отклонения от эффективной частоты степень устойчивости почти не меняется (остается вблизи нулевого значения) в широком диапазоне изменения амплитуды вращающегося поля. Такой же характер поведения системы наблюдается и вблизи частоты, эффективной для расширения.

Наилучшие (максимальные) коэффициенты сжатия и расширения были получены при выборе соответствующих эффективных (резонансных) частот вращающегося поля. Эффективность воздействия вращающегося поля быстро падает при отклонении частоты вращающегося поля от резонансных значений.

Проведем также численное сравнение результатов расчетов с полученными в работе [2]. Введенный в [2] параметр  $\Gamma$  соответствует приведенной в формуле (19) величине  $\gamma_\chi$ . Также введем величины, соответствующие использованным в [2]:

$$\gamma = \frac{k}{2}, \quad \delta = \frac{a}{\sqrt{\omega_z (\omega_c - \omega_m)}}, \quad \varepsilon = \omega_r - \omega_r^\pm.$$

На рис. 2, *A–B* представлены графики величин  $(2\gamma_\chi/\gamma)$  — нормализованных максимальных коэффициентов сжатия и расширения (соответствующих эффективным значениям частот вращающегося поля) в зависимости от отношения введенных параметров  $\delta/\gamma$ . Расчеты были проведены следующими способами: 1) численно найдены собственные значения матрицы системы (23); 2) была применена уточненная приближенная формула (32); 3) была использована приближенная формула (47) из работы [2]. На рис. 2 полученные графики обозначаются римской цифрой (номер способа вычисления) и латинской буквой «с» или «е» — для сжатия и расширения соответственно.

Вычисления, сделанные всеми способами, на рис. 2, *A* дали практически одинаковые результаты и линии графиков наложились друг на друга.

Увеличенное изображение начальной (левой) части рис. 2, *A* при малых значениях амплитуды вращающегося поля приведены на рис. 2, *B*. Графики на рис. 2, *B*, полученные по формуле «полного решения» (47) из статьи [2], сдвинуты вниз относительно графиков, полученных при помощи первых двух способов. Это понятно, так как формула «полного решения» не дает правильных результатов при очень маленьких и очень больших амплитудах вращающегося поля. На рис. 2, *B* видно, что при малых амплитудах вращающегося поля имеет место расширение (неустойчивость) с небольшими по величине коэффициентами. Из рис. 2, *B* следует, что при больших амплитудах вращающегося поля наблюдается расширение (неустойчивость) с быстро растущими по величине коэффициентами.

Графики на рис. 2, *A–B* хорошо согласуются с зависимостями, полученными в статье [2] для амплитуд вращающегося поля, соответствующих  $(\delta/\gamma) \sim 1$ . При этом рис. 2, *B* и *B* показывают характер поведения нормализованных максимальных коэффициентов расширения и сжатия при очень малых и очень больших амплитудах вращающегося поля, не исследованных корректно в [2].

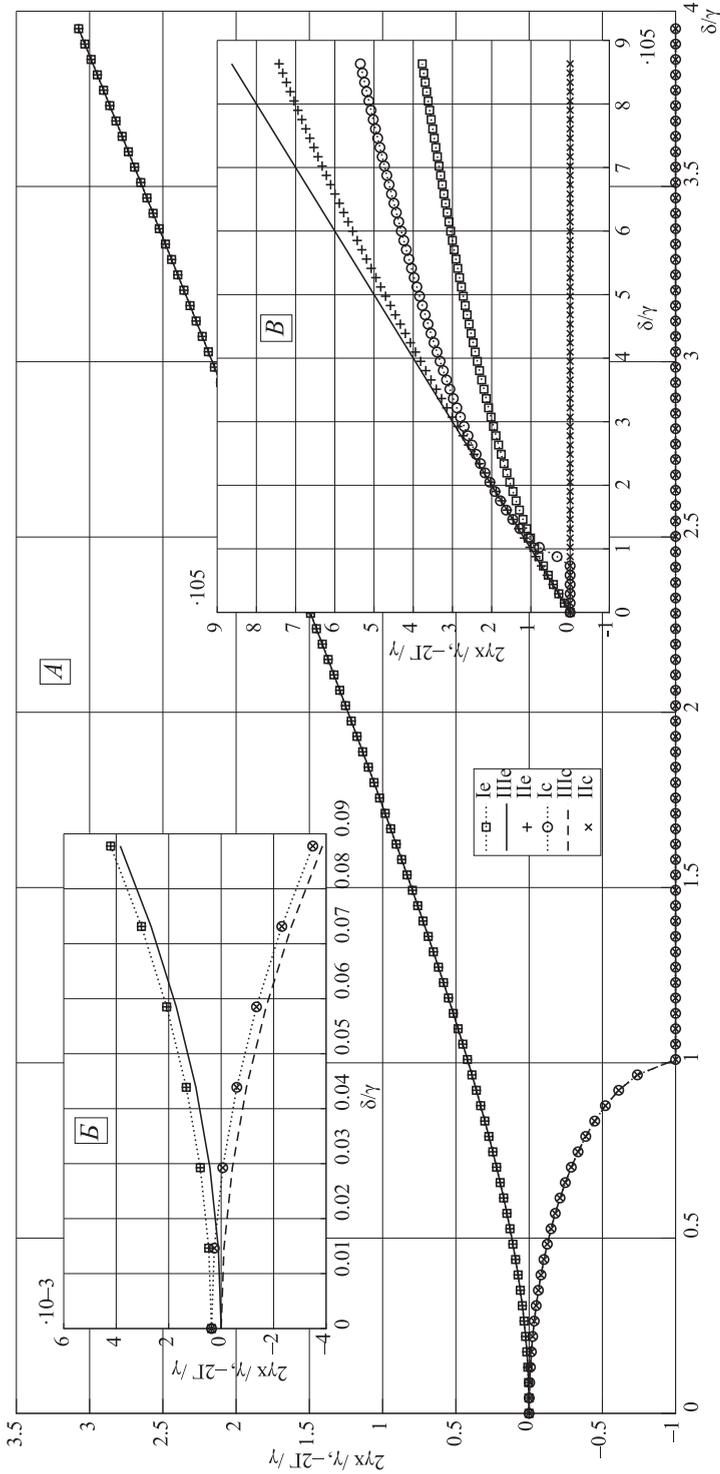


Рис. 2. Зависимость величины  $(2\gamma x/\gamma)$ , определяющей максимальные нормализованные коэффициенты сжатия и расширения (соответствующие эффективным частотам  $\omega_r^\pm$ ), от отношения  $\delta/\gamma$

**Заключение.** Рассмотрена линейная модель динамики частиц в ловушке Пеннинга—Малмберга—Сурко с вращающимся электрическим полем. Разработан подход для анализа и моделирования системы при любых значениях параметров изучаемой модели динамики частиц в ловушке. Предложенный переход к системе координат, вращающейся вместе с электрическим RW-полем, позволил свести исследуемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами к линейной дифференциальной системе с постоянной матрицей коэффициентов. Анализ устойчивости (по Ляпунову) движений частиц в ловушке проводится с помощью стандартных численных методов, используемых для нахождения характеристических чисел постоянной матрицы (например, применяя пакет MATLAB). Построено приближенное аналитическое решение (по методу Эйлера) для быстрого расчета и анализа поведения отдельных частиц и огибающих эллипсоидального пучка траекторий для оценки радиуса накапливаемого облака.

Проведены численные расчеты для различных значений параметров ловушки, получены асимптотически устойчивые и неустойчивые варианты реализации системы. При неэффективном значении частоты и небольших амплитудах вращающегося электрического поля его влияние на показатели устойчивости системы оказывается практически незаметным, показатель устойчивости системы остается близким к нулю. При превышении определенного значения амплитуды вращающегося поля система всегда становится сильно неустойчивой. Наилучшие показатели устойчивости (неустойчивости) были получены при эффективных для сжатия и расширения частотах, схожих с приведенными в [1]. При эффективных значениях частот вращающегося поля изменения степени устойчивости с ростом амплитуды поля были максимальными. Эффективные частоты соответствуют такому сочетанию параметров системы, при котором частота продольных колебаний частицы будет близка с магнетронной частотой во вращающейся вместе с дипольным электрическим полем системе координат.

Обнаружена высокая чувствительность степени устойчивости (неустойчивости) системы при небольших отклонениях частоты вращающегося электрического поля от эффективных значений, которая может затруднить на практике использование вращающегося электрического поля.

Автор благодарит чл.-корр. РАН И. Н. Мешкова и проф. М. К. Есеева за интересные и плодотворные обсуждения темы данного исследования.

## Литература

1. Isaac C. A., Baker C. J., Mortensen T., van der Werf D. P., Charlton M. Compression of positron clouds in the independent particle regime // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107. P. 033201(1–4).
2. Isaac C. A. Motional sideband excitation using rotating electric fields // *Physical Review A*. 2013. Vol. 87. P. 043415(1–7).
3. Eseev M. K., Meshkov I. N. Traps for storing charged particles and antiparticles in high precision experiments // *Phys. Usp.* 2016. Vol. 59. P. 304–317.
4. Meshkov I. N., Eseev M. K., Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Ponomarev V. A. Analysis of the particle dynamics stability in the Penning—Malmberg—Surko trap // *Proc. XXV Russian Particle Accelerator Conference*. Saint Petersburg, 2016. P. 64. doi: 10.18429/JACoW-RuPAC2016-WECAMH03
5. Meshkov I. N., Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Eseev M. K. Study of the stability of charged particle dynamics in a Penning—Malmberg—Surko trap with a rotating field // *Papers of Academy of Science RAN*. 2017. Vol. 476, N 6. P. 630–634. doi: 10.7868/S0869565217300065

Статья поступила в редакцию 9 ноября 2018 г.

Статья принята к печати 18 декабря 2018 г.

Контактная информация:

Овсянников Александр Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; ovs74@mail.ru

## Analysis of the dynamics of charged particles in an ideal Penning trap with a rotating field and a buffer gas

A. D. Ovsyannikov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Ovsyannikov A. D. Analysis of the dynamics of charged particles in an ideal Penning trap with a rotating field and a buffer gas. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 1, pp. 62–75. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.105> (In Russian)

The paper deals with particle dynamics in a Penning trap with a rotating electric dipole field and a buffer gas. Electromagnetic traps are widely used for the accumulation and storage of charged particles of matter and antimatter for further use in various experiments. In this paper, a general analytical criterion is established, which must satisfy the parameters of the type of trap under investigation in order to provide compression or expansion modes of the trajectory beam. These modes correspond to the cases of asymptotic stability or instability of the system under study. The most effective combinations of parameters were determined, providing the maximum possible degree of stability (or, accordingly, instability) of the system with the minimum possible amplitudes of the rotating electric field. Analytical solutions are constructed for the rapid calculation and analysis of the behavior of individual particles or envelopes of an ellipsoidal beam of trajectories and an estimate of the radius of the accumulated cloud. The proposed approach is applicable to the analysis of the system for any values of the parameters of the studied model of particle dynamics in a trap.

*Keywords:* Penning trap, Rotating Wall, Penning–Malmberg–Surko trap, charged particle dynamics, stability.

## References

1. Isaac C. A., Baker C. J., Mortensen T., van der Werf D. P., Charlton M. Compression of positron clouds in the independent particle regime. *Physical Review Letters*, 2011, vol. 107, pp. 033201(1–4).
2. Isaac C. A. Motional sideband excitation using rotating electric fields. *Physical Review A*, 2013, vol. 87, pp. 043415(1–7).
3. Eseev M. K., Meshkov I. N. Traps for storing charged particles and antiparticles in high precision experiments. *Phys. Usp.*, 2016, vol. 59, pp. 304–317.
4. Meshkov I. N., Eseev M. K., Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Ponomarev V. A. Analysis of the particle dynamics stability in the Penning–Malmberg–Surko trap. *Proc. XXV Russian Particle Accelerator Conference*. Saint Petersburg, 2016, pp. 64. doi: 10.18429/JACoW-RuPAC2016-WECAMH03
5. Meshkov I. N., Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Eseev M. K. Study of the stability of charged particle dynamics in a Penning–Malmberg–Surko trap with a rotating field. *Papers of Academy of Science RAN*, 2017, vol. 476, no. 6, pp. 630–634. doi: 10.7868/S0869565217300065

Received: November 9, 2018.

Accepted: December 18, 2018.

Author's information:

Alexander D. Ovsyannikov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; ovs74@mail.ru