

Анализ чувствительности модели транспортировки газа по морским газопроводам к изменениям параметров модели

Г. И. Курбатова, Н. Н. Ермолаева

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Курбатова Г. И., Ермолаева Н. Н. Анализ чувствительности модели транспортировки газа по морским газопроводам к изменениям параметров модели // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 1. С. 47–61. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.104>

Рассмотрены основные подходы к определению коэффициента гидравлического сопротивления и суммарного коэффициента теплообмена газа с окружающей водой в модели нестационарного неизотермического течения смеси газов по морскому газопроводу. Чувствительность модели к вариациям этих коэффициентов проиллюстрирована расчетами и графиками. Для одного из тестовых вариантов транспортировки газа определены коэффициенты гидравлического сопротивления и теплообмена. Предложена методика расчета параметров по экспериментальным данным, позволяющая обеспечить адекватность математической модели нестационарного неизотермического течения смеси газов по морскому газопроводу для конкретного газопровода.

Ключевые слова: морские газопроводы, транспортировка газа, идентификация коэффициента гидравлического сопротивления и суммарного коэффициента теплообмена, анализ чувствительности модели.

Введение. В течение последних лет в Санкт-Петербургском государственном университете была разработана компьютерная модель транспортировки природного газа по морским газопроводам [1, 2], позволяющая ответить на некоторые важные вопросы при проектировании и эксплуатации морских газопроводов в северных морях. Настоящая работа посвящена анализу чувствительности этой модели к изменениям коэффициента гидравлического сопротивления λ и суммарного коэффициента теплообмена β газа с окружающей водой. Такой анализ приводит к выводу о необходимости учета зависимости коэффициента гидравлического сопротивления от температуры и плотности потока. В статье предложены как теоретические методы расчета λ и β , так и методы, основанные на экспериментальных данных о состоянии потока.

В ряде вариантов транспортировка добываемого природного газа от морской платформы до материка в северных морях осуществляется по протяженным трассам (порядка 500 км) без промежуточных подстанций, что требует сверхвысоких давлений на входе (более 200 атм). При этих давлениях газ существенно неидеальный. Кроме того, в северных морях возможно оледенение внешней поверхности газопровода, так как температура T^* окружающей воды близка к температуре фазового перехода T_* . Температура газа при прохождении трассы опускается ниже T_* , приводя к возможному оледенению газопровода [3]. В настоящее время квази-одномерная математическая модель, учитывающая указанные особенности, описана в работах [1, 4]. Предложены эффективные алгоритмы решения системы уравнений модели и созданы программные комплексы: SGPITM [5], SGTM [6] и программный комплекс «ЛЕД» [7]. Комплекс SGPITM позволяет определить характеристики

потока неустановившихся течений многокомпонентной смеси газов по морским газопроводам, комплекс SGTМ предназначен для расчета характеристик установившихся течений, программный комплекс «ЛЕД» — для расчета динамики нарастания морского льда.

Математическая модель течения газа и динамики оледенения газопровода (модель I). Приведем модель нестационарного неизотермического течения газа по морскому газопроводу:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u^2 + p) = -\frac{\lambda \rho u |u|}{4R} + \rho g \cos \alpha(z), \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho u \left(e + \frac{p}{\rho}\right)\right) = \frac{2q}{R} + \rho u g \cos \alpha(z), \quad (3)$$

$$e = \varepsilon + u^2/2, \quad (4)$$

$$p = \frac{h\rho T}{1 - a\rho} - \frac{c\rho^2}{(1 + a\rho)\sqrt{T}}, \quad (5)$$

$$\varepsilon = \tilde{c}_v T - \frac{3}{2} \frac{c}{\delta\sqrt{T}} \ln(1 + \delta\rho), \quad (6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{k}{7.4R} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right), \quad \text{Re} = \text{const}, \quad k = \text{const}, \quad (7)$$

$$q = q(R, \delta_1, c_1, \lambda_1, \delta_2, c_2, \lambda_2, \delta_3, c_3, \lambda_3, T, T^*, t, \beta, y(t)), \quad (8)$$

$$\text{начальные условия для } \rho, T, u, y, \quad (9)$$

$$\text{граничные условия для } \rho, T, u. \quad (10)$$

Здесь (1), (2), (3) — уравнения неразрывности, движения, энергии соответственно, (4) — связь полной и внутренней энергий, (5) — уравнение состояния Редлиха—Квонга, (6) — калорическое уравнение [2], (7) — полуэмпирический закон сопротивления Коулбрука—Уайта. Расчет теплового потока (8) осуществляется по нестационарным моделям теплообмена газа с окружающей водой через многослойную стенку как при наличии слоя льда на внешней поверхности газопровода, так и при отсутствии льда. Эти модели представлены в работах [8, 9]. В модели I процессы в потоке газа описываются на языке средних по сечению величин плотности, скорости, температуры и т.п. Приняты следующие обозначения: $u, \rho, p, T, \varepsilon, e$ — скорость, плотность, давление, температура, массовые плотности внутренней и полной энергий газовой смеси соответственно, которые являются функциями времени t и координаты z в цилиндрической системе координат (r, φ, z) ; λ — коэффициент гидравлического сопротивления; k — коэффициент эквивалентной шероховатости; Re — характерное число Рейнольдса; h, c, a — постоянные в уравнении Редлиха—Квонга, определяемые по заданному химическому составу газовой смеси [10]; \tilde{c}_v — коэффициент удельной массовой теплоемкости при постоянном объеме газовой смеси заданного химического состава, находящейся в состоянии идеального газа; g — ускорение силы тяжести; $\alpha(z)$ — угол между осью газопровода и направлением силы тяжести; q — радиальная составляющая вектора потока тепла на внутренней поверхности газопровода в z -м сечении; R — внутренний радиус газопровода; δ_i, c_i, λ_i — толщина, коэффициент

удельной теплоемкости, коэффициент теплообмена в i -й области соответственно; индекс 1 соответствует слою из стали, 2 — слою из бетона, 3 — тепловому погранслою воды; T^* — температура окружающей морской воды; β — суммарный коэффициент теплообмена газа с окружающей водой; $y(t)$ — толщина слоя льда в z -м сечении. Было принято, что газопровод имеет два слоя обшивки из стали и бетона, модель I легко обобщается на три и более слоя с заданными геометрическими и теплофизическими параметрами.

Граничные и начальные условия. Задавались два условия на входе в газопровод и одно условие на выходе, так как скорость потока много меньше скорости звука. В модельном варианте на входе задавались неизменные во времени давление $p(0, t) = 21$ МПа и температура $T(0, t) = 315.15$ К, на выходе — закон изменения удельного расхода газа $w_*(t) = \rho(L, t)u(L, t)$. По давлению и температуре на входе из уравнения состояния (5) и калорического уравнения (6) определялись значения плотности и внутренней энергии газовой смеси на входе. Таким образом, граничные условия (10) имели вид

$$z = 0: \quad p(0, t) = p_0, \quad T(0, t) = T_0,$$

$$z = L: \quad w(L, t) = w_*(t),$$

где L — длина газопровода.

Один из вариантов поведения безразмерного удельного расхода газа $w_*(t)$ представлен на рис. 1.

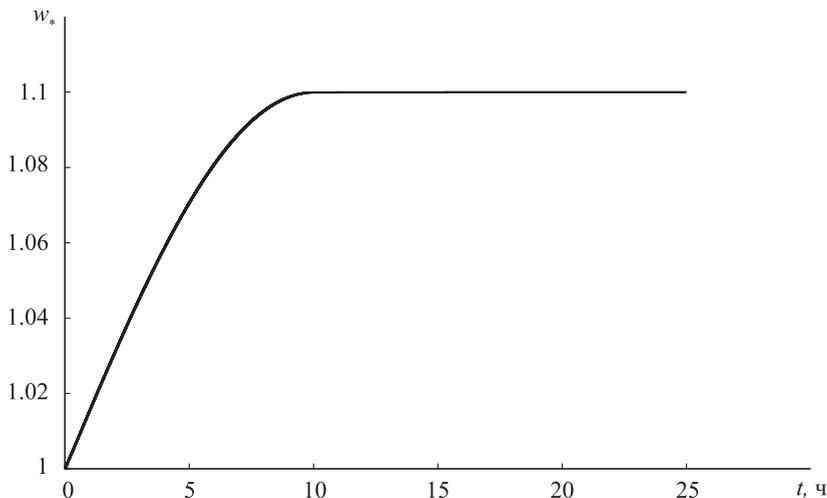


Рис. 1. Закон изменения расхода газа на выходе из газопровода

Для этого режима в качестве начальных данных (9) приняты характеристики установившегося течения [4]:

$$t = 0: \quad \rho u = \text{const} = \frac{Q}{\pi R^2},$$

$$\rho(z) = \rho_0(z), \quad T(z) = T_0(z), \quad y(z) = y_0(z).$$

Функции $\rho_0(z)$, $T_0(z)$ рассчитывались по программе SGTМ [6], дополненной расчетом установившихся толщин слоя льда по методике работы [4], Q — массовый расход газа.

В тестовом варианте приняты следующие параметры процесса транспортировки:

$$R = 0.5 \text{ м}, \quad L = 300 \text{ км}, \quad Q = 570 \text{ кг/с}, \quad \tilde{c}_v = 1712.25 \text{ Дж/(кг·К)},$$

$$a = 0.001816 \text{ м}^3/\text{кг}, \quad h = 496.630658 \text{ (м}^2/(\text{с}^2 \cdot \text{К})\text{)}, \quad c = 12 \text{ 019.554091 (м}^5 \cdot \text{К}^{\frac{1}{2}}/(\text{с}^2 \cdot \text{кг})\text{)},$$

$$\delta_1 = 0.04 \text{ м}, \quad \lambda_1 = 24 \text{ Вт/(м·К)}, \quad c_1 = 450 \text{ Дж/(кг·К)}, \quad \rho_1 = 10 \text{ 000 кг/м}^3, \quad (11)$$

$$\delta_2 = 0.12 \text{ м}, \quad \lambda_2 = 1.7 \text{ Вт/(м·К)}, \quad c_2 = 924 \text{ Дж/(кг·К)}, \quad \rho_2 = 2300 \text{ кг/м}^3,$$

$$\lambda_3 = 0.6 \text{ Вт/(м·К)}, \quad c_3 = 3898 \text{ Дж/(кг·К)}, \quad \rho_3 = 1025 \text{ кг/м}^3.$$

Примем, что температура окружающей воды равна $T^* = 278.15 \text{ К}$, поэтому в тестовом варианте лед отсутствует.

Анализ чувствительности модели к изменениям коэффициента гидравлического сопротивления и коэффициента теплообмена. В модели I коэффициенты гидравлического сопротивления и теплообмена приняты постоянными. Исследовано изменение характеристик течения ($\rho(z, t)$, $T(z, t)$, $p(z, t)$) при варьировании параметров λ и β на 5, 10 и 20%. Величина $\lambda^{(0)} = 0.00829$ определена из закона Коулбрука—Уайта для характерных значений $Re = 3.76 \cdot 10^7$ и $k = 0.00001 \text{ м}$. Расчет величины $\beta^{(0)}$ будет приведен далее. Для тестового варианта (11) по программному комплексу SGRITM рассчитывались характеристики потока $\rho(z, t)$, $T(z, t)$, $p(z, t)$ при измененных постоянных коэффициентах λ и β : $\lambda^{(1)} = 1.05\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(2)} = 1.1\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(3)} = 1.2\lambda^{(0)}$ и $\beta^{(1)} = 1.05\beta^{(0)}$, $\beta^{(2)} = 1.1\beta^{(0)}$, $\beta^{(3)} = 1.2\beta^{(0)}$. Примеры расчетов представлены на рис. 2, 3.

Проведенное исследование, как и следовало ожидать, привело к выводу о чувствительности модели I к изменению параметров λ и β . Например, при изменении коэффициента гидравлического сопротивления на 20% от величины $\lambda^{(0)}$ отклонение $\Delta T = T^{(0)} - T^{(3)}$ в z -м сечении ($z = 250 \text{ км}$) при $t = 10 \text{ ч}$ равнялось $\Delta T = 1.016 \text{ К}$ (при максимальном перепаде температуры в этом режиме, равном 27 К, отклонения давления Δp и плотности $\Delta \rho$ в том же сечении составили 1.536 МПа и 9.075 кг/м³ соответственно).

Подходы к определению коэффициента гидравлического сопротивления. Один из подходов к расчету λ заключается в его определении для каждого сечения газопровода по некоторому полуэмпирическому закону. Предложено много полуэмпирических законов расчета λ в зависимости от числа Рейнольдса и шероховатости трубы. Из них рассматривали четыре:

- закон Хаалаанда [11], входящий в программный комплекс OLGA (Норвегия):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1.8 \lg \left(\left(\frac{k}{3.75D} \right)^{1.11} + \left(\frac{6.9}{Re} \right) \right),$$

где D — диаметр трубы;

- закон, рекомендованный Американской газовой ассоциацией:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{k}{3.71D} \right);$$

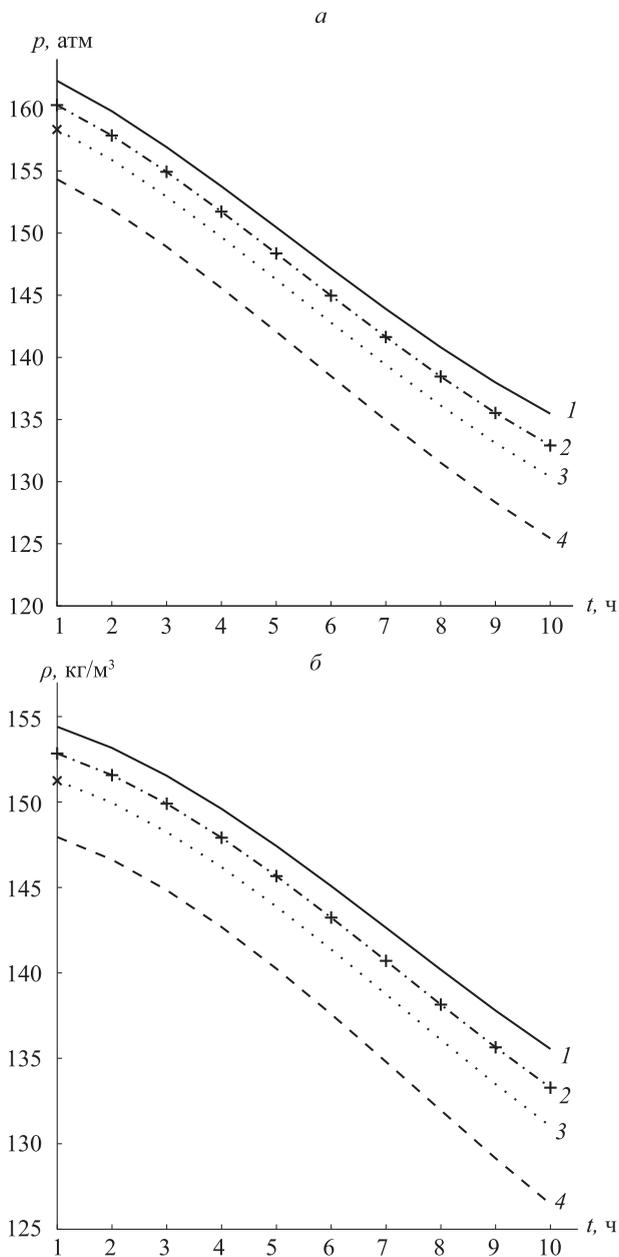


Рис. 2. Изменение давления $p(z, t)$ газа (а) и плотности $\rho(z, t)$ газа (б) в течение 10 ч при $z = 250$ км при разных значениях коэффициента гидравлического сопротивления λ
 1 – $\lambda^{(0)}$; 2 – $\lambda^{(1)}$; 3 – $\lambda^{(2)}$; 4 – $\lambda^{(3)}$.

- закон, рекомендованный ВНИИГАЗ [12]:

$$\lambda = 0.067 \left(\frac{2k}{D} + \frac{158}{\text{Re}} \right)^{0.2}.$$

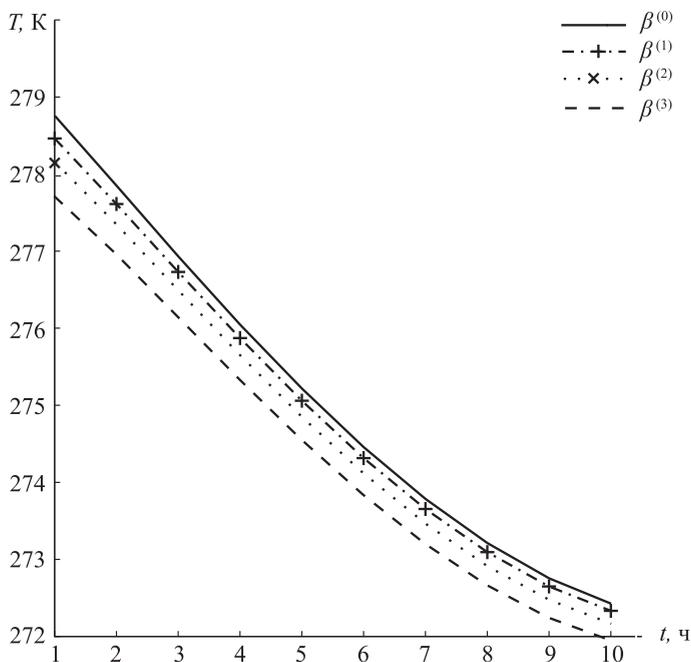


Рис. 3. Изменение температуры $T(z, t)$ потока в течение 10 ч при $z = 250$ км при разных значениях суммарного коэффициента теплообмена β

Дальнейшее исследование представим на примере закона Коулбрука–Уайта (7). Учтем зависимость кинетической вязкости $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (входящей в выражение для числа Re) от температуры и плотности газовой смеси. Были рассмотрены разные полуэмпирические зависимости $\mu(\rho, T)$. Приведенные результаты расчета тестового варианта соответствуют полуэмпирической зависимости Ли–Гонсалеса–Икина [13]:

$$\mu(\rho, T) = K \exp \left(X \left(\frac{\rho(z, t)}{1000} \right)^{(2.4-0.2X)} \right),$$

$$K = \frac{(9.4 + 0.02M) \left(\frac{9T(z, t)}{5} \right)^{1.5}}{209 + 19M + \left(\frac{9T(z, t)}{5} \right)}, \quad X = 3.5 + \frac{986}{\left(\frac{9T(z, t)}{5} \right)} + 0.01M,$$

в которой M — молярная масса газовой смеси.

В программу SGPITM расчета по модели I был включен учет зависимости $\lambda(\text{Re}(\rho, T))$. Определено влияние непостоянства коэффициента гидравлического сопротивления λ на все характеристики потока. В качестве примера на рис. 4, а, б представлено поведение давления $p(t)$ в z -м сечении ($z = 250$ км) газопровода для $\lambda = \text{const} = \lambda^{(0)}$ и $\lambda = \lambda(\text{Re}(\rho, T))$ в течение первых пяти суток работы.

В таблице приведены модули относительных отклонений температуры $|\delta T|$, плотности $|\delta \rho|$ и давления $|\delta p|$ (в %) от варианта $\lambda = \text{const} = \lambda^{(0)}$, $\beta = \text{const} = \beta^{(0)}$; расчет проведен для сечений 100, 200 и 250 км для двух и пяти суток от начала работы газопровода соответственно. Из таблицы видно, что отклонение характеристик потока, рассчитанных при $\lambda(\text{Re})$, от варианта $\lambda = \text{const} = \lambda^{(0)}$, $\beta = \text{const} = \beta^{(0)}$ нарастает как с течением времени, так и с увеличением координаты z . Это свидетельствует

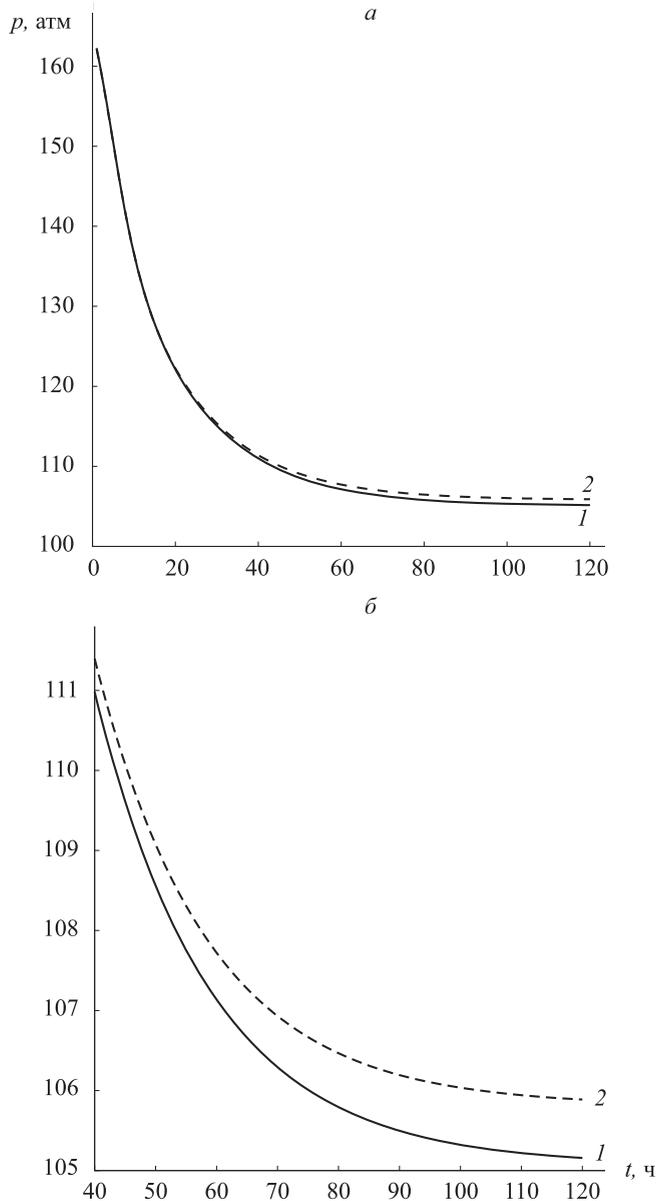


Рис. 4. Изменение давления p смеси газов в сечении $z = 250$ км при $\lambda = \text{const}$ (1) и $\lambda(\text{Re}(\rho, T))$ (2)
 a — при $t \in [0, 120]$ ч; b — при $t \in [40, 120]$ ч.

о необходимости (для обеспечения адекватности математической модели) учета зависимости коэффициента гидравлического сопротивления от коэффициента шероховатости k , плотности $\rho(z, t)$ и температуры $T(z, t)$ потока. Данный учет можно провести по одному из приведенных выше законов $\lambda(\text{Re}(\rho, T), k)$, однако их универсальность остается открытым вопросом.

Таблица. Влияние учета непостоянства λ

| z, км | $ \delta T , \%$ | $ \delta \rho , \%$ | $ \delta p , \%$ |
|---------------|------------------|---------------------|------------------|
| Через 2 суток | | | |
| 100 | 0.006 | 0.03 | 0.04 |
| 200 | 0.02 | 0.18 | 0.21 |
| 250 | 0.04 | 0.4 | 0.46 |
| Через 5 суток | | | |
| 100 | 0.007 | 0.07 | 0.09 |
| 200 | 0.03 | 0.31 | 0.34 |
| 250 | 0.05 | 0.69 | 0.70 |

Подходы к определению β . В работах [4, 8] представлены нестационарные модели теплообмена смеси газов с окружающей водой через многослойную стенку, а также проведен анализ допустимости использования квазистационарной модели теплообмена в нестационарной модели I. Суммарный коэффициент теплообмена β в стационарной модели выражается через параметры обшивки газопровода и параметры теплового погранслоя воды:

$$\beta = 1 / \left(R \left(\ln \left(\frac{R_1}{R} \right) / \lambda_1 + \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) / \lambda_2 + \ln \left(\frac{R_2 + \delta_3}{R_2} \right) / \lambda_3 \right) \right), \quad (12)$$

где $R_1 = R + \delta_1$; $R_2 = R_1 + \delta_2$. Толщина эффективного теплового погранслоя воды δ_3 , входящая в (12), зависит от многих факторов, в частности от донных течений и условий контакта газопровода с донным грунтом. При обтекании газопровода нет аксиальной симметрии. Величина δ_3 равна эффективной осредненной по углу характеристике. В книге [4] приведен один из способов оценки толщины эффективного теплового погранслоя воды из критериальных оценок в задаче обтекания газопровода в установившихся режимах. Приведем характерные значения чисел Рейнольдса Re, Прандтля Pr, Грасгофа Gr, Эккерта Ec в рассматриваемой задаче, рассчитанные для воды при температуре T^* , при характерных длине $l = 2R$ м и скорости обтекания 0.01 м/с:

$$\text{Re} = 6 \cdot 10^3, \quad \text{Pr} = 16, \quad \text{Gr} = 3 \cdot 10^7, \quad \text{Ec} = 2 \cdot 10^{-8}.$$

Эти значения свидетельствуют о том, что реализуется турбулентный режим обтекания. При них средняя по всей боковой поверхности величина числа Нуссельта Nu может изменяться в таком диапазоне [14]: $80 < \text{Nu} < 110$. Выразим число Nu через введенную характеристику δ_3 . Представим тепловой поток $q_3 = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} \Big|_{R_2}$ от воды на внешнюю поверхность газопровода следующим образом:

$$q_3 = \beta_3 (T^* - T_3(R_2)), \quad (13)$$

где β_3 — коэффициент теплопередачи; T_3 — распределение температуры в тепловом погранслое. Число Нуссельта связано с коэффициентом теплопередачи β_3 так:

$$\text{Nu} = \beta_3 2R \lambda_3^{-1}.$$

В установившемся режиме выражение для потока $q_3 = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} \Big|_{R_2}$ имеет вид

$$q_3 = \lambda_3 \frac{T^* - T_3(R_2)}{R_2 \ln(1 + \delta_3 R_2^{-1})}. \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует выражение для коэффициента теплопередачи β_3

$$\lambda_3 \frac{T^* - T_3(R_2)}{R_2 \ln(1 + \delta_3 R_2^{-1})} = \beta_3 (T^* - T_3(R_2)) \rightarrow \beta_3 = \frac{\lambda_3}{R_2 \ln(1 + \delta_3 R_2^{-1})}.$$

Как известно, при $Re = 6 \cdot 10^3$ и $Pr = 16$ характерная величина δ_3 при обтекании газопровода мала, позволяя в первом приближении по малому параметру ($\delta_3 R_2^{-1}$) упростить зависимость $\beta_3(\delta_3)$. В результате приходим к такому приближенному равенству:

$$Nu = \beta_3 2R \lambda_3^{-1} = \frac{2R}{\delta_3} \rightarrow \delta_3 \approx 2R/Nu.$$

Например, при $Nu = 80$ $\delta_3 \approx 0.0125$ м. Для набора параметров (11) величина $\delta_3 \approx 0.0125$ м соответствует коэффициенту теплообмена $\beta^{(0)} = 6.18$ Вт/(м² · К). В общем случае δ_3 и β являются функциями z и t . Для реальных газопроводов их значения должны находиться из решения обратной задачи.

В настоящей статье предложен метод определения λ и β , использующий экспериментальные данные, снятые на реальном газопроводе. Идея метода восходит к работам М. А. Каниболотского [15, 16].

Идентификация параметров λ и β . Из проведенного компьютерного эксперимента по модели I следует, что в широком диапазоне изменения параметров задачи существуют участки (длины l), на которых допустимо считать, что

$$\lambda = \text{const}, \quad \beta = \text{const}. \quad (15)$$

Разобьем газопровод на такие участки. Процедура идентификации параметров λ , β по экспериментальным данным для одного участка представлена в статье [17]. Этот алгоритм реализован в программном комплексе PIGTM [18]. В настоящей работе методика обобщена на произвольное число участков, удовлетворяющих условию (15). Запишем модель I для установившегося варианта течения, задав поток тепла через стенки газопровода в виде $q(z, t) = \beta(T^* - T)$:

$$\rho u = Q/(\pi R^2), \quad (16)$$

$$\rho u \frac{du}{dz} = -\frac{dp}{dz} - \frac{\lambda \rho u |u|}{4R} + \rho g \cos \alpha(z), \quad (17)$$

$$c_v \rho u \frac{dT}{dz} = -\left(\frac{\rho T h}{(1 - \delta \rho)} + \frac{c \rho^2}{2(1 + \delta \rho) T^{1/2}} \right) \frac{du}{dz} + \frac{2\beta(T^* - T)}{R} + \frac{\lambda \rho u^2 |u|}{4R}, \quad (18)$$

$$p = \frac{h \rho T}{1 - \delta \rho} - \frac{c \rho^2}{(1 + \delta \rho) T^{1/2}}, \quad (19)$$

$$z = 0: \quad \rho = \rho_{z0}, \quad T = T_{z0}. \quad (20)$$

В безразмерной форме модель (16)–(20), разрешенная относительно производных $\frac{d\rho_i}{dz}$, $\frac{dT_i}{dz}$, для i -го участка имеет вид (для облегчения записи индекс i у величин ρ_i , T_i , λ_i , β_i далее опущен)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dz} = \frac{f_2 + f_1 f_3 f_T}{1 - f_1 f_\rho - f_1 f_4 f_T - f_1 f_5 f_T}, \\ \frac{dT}{dz} = f_3 + \frac{(f_4 + f_5)(f_2 + f_1 f_3 f_T)}{1 - f_1 f_\rho - f_1 f_4 f_T - f_1 f_5 f_T}, \\ \frac{d\lambda}{dz} = 0, \\ \frac{d\beta}{dz} = 0, \\ z = z_i^* : p(z_i^*) = p_i^L = p_{i+1}^0, T(z_i^*) = T_i^L = T_{i+1}^0. \end{array} \right. \quad (21)$$

Здесь z_i^* — граница между i -м и $(i+1)$ -м участками; функции $f_1 \div f_5$, f_ρ , f_T явно выражаются через λ , β и остальные параметры и функции задачи. Методика расчета λ и β основана на использовании экспериментальных значений давления $p(z_i^*)$ и температуры $T(z_i^*)$, снятых на концах участков. Плотность $\rho(z_i^*)$ определяется по уравнению состояния Редлиха—Квонга.

Алгоритм метода идентификации λ и β . Запишем систему (21) в векторной форме для участка заданной длины $L_1 \leq l$:

$$\frac{d\bar{y}}{dz} = \bar{F}(\bar{y}), \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} \rho(z) \\ T(z) \\ \lambda \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} F_1(\rho, T, \lambda, \beta) \\ F_2(\rho, T, \lambda, \beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F_1(\rho, T, \lambda, \beta) = \frac{f_2 + f_1 f_3 f_T}{1 - f_1 f_\rho - f_1 f_4 f_T - f_1 f_5 f_T}, \quad (22)$$

$$F_2(\rho, T, \lambda, \beta) = f_3 + \frac{(f_4 + f_5)(f_2 + f_1 f_3 f_T)}{1 - f_1 f_\rho - f_1 f_4 f_T - f_1 f_5 f_T},$$

$$p(0) = p^0, \quad T(0) = T^0, \quad (23)$$

$$p(L_1) = p^L, \quad T(L_1) = T^L, \quad (24)$$

в которой функции F_1 , F_2 непрерывны и ограничены в области G :

$$G: \quad z \in [0, L_1], \quad |\rho - \rho_{z0}| \leq \tilde{\rho}, \quad |T - T_{z0}| \leq \tilde{T}, \quad |\lambda - \lambda^{(0)}| \leq \tilde{\lambda}, \quad |\beta - \beta^{(0)}| \leq \tilde{\beta},$$

если давление $p_{z0}(\rho_{z0}, T_{z0})$ не превышает предельно допустимого давления p_{z0}^* на входе, расчет которого приведен в работе [19]. Величины $\tilde{\rho}$, \tilde{T} , $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\beta}$ в этих неравенствах для каждой конкретной задачи находятся в результате компьютерного эксперимента по модели (16)–(20). Решение системы (22)–(24) существует и единственно при существовании и непрерывности частных производных функций F_1 и F_2 по ρ, T, λ, β . В рассмотренных вариантах имело место выполнение этих условий.

Алгоритм численного решения системы (22)–(24) основан на методе квазилинеаризации Р. Беллмана [20]. Нелинейная задача (22) решается итерационным методом, на $(s+1)$ -й итерации линейная задача записывается как

$$\frac{d\bar{y}^{s+1}}{dz} = \bar{F}(\bar{y}^s) + J|_{\bar{y}^s} (\bar{y}^{s+1} - \bar{y}^s), \quad (25)$$

где $J|_{\bar{y}^s}$ — матрица Якоби, вычисленная на векторе \bar{y}^s в s -й итерации.

Решение задачи (25) основано на предположении о том, что зависимости плотности и температуры газа от коэффициентов λ и β на выделенном участке являются линейными:

$$\begin{aligned}\rho^{s+1} &= C_{13}^s \lambda^{s+1} + C_{14}^s \beta^{s+1} + g_1^s, \\ T^{s+1} &= C_{23}^s \lambda^{s+1} + C_{24}^s \beta^{s+1} + g_2^s.\end{aligned}\quad (26)$$

Линейность зависимостей ρ^{s+1} , T^{s+1} от λ^{s+1} и β^{s+1} проверялась численно.

Зависимость (26) в векторной форме имеет вид

$$\bar{y}^{s+1} = C^s \bar{y}^{s+1} + \bar{g}^s, \quad (27)$$

где

$$C^s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^s(z) & c_{14}^s(z) \\ 0 & 0 & c_{23}^s(z) & c_{24}^s(z) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}^s = \begin{pmatrix} g_1^s(z) \\ g_2^s(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица C^s и вектор \bar{g}^s подлежат определению. Из линеаризированной системы (25) и линейного представления (27) следует для определения матрицы C^s и вектора \bar{g}^s система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dC^s}{dz} = J|_{\bar{y}^s} C^s, \quad (28)$$

$$\frac{d\bar{g}^s}{dz} = \bar{F}(\bar{y}^s) + J|_{\bar{y}^s} \bar{g}^s - J|_{\bar{y}^s} \bar{y}^s, \quad (29)$$

$$c_{ij}^s(z) = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 3, 4, \quad g_1^s = y_{01} \equiv \rho^0, \quad g_2^s = y_{02} \equiv T^0. \quad (30)$$

Система (28)–(30) сводится к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $c_{ij}^s(z)$ и $g_i^s(z)$ для $z \in [0, L_1]$, ее решение с граничными условиями (30) не представляет принципиальных трудностей, оно может быть получено численно, например, методом Рунге—Кутты. Решение существует, если существует решение системы (22)–(24).

На конце L_1 рассматриваемого участка известны экспериментальные данные ρ^L , T^L , они совместно с представлением (27), записанным при $z = L_1$, приводят к системе линейных алгебраических уравнений относительно искомых параметров λ^{s+1} и β^{s+1} в $(s+1)$ -й итерации:

$$\begin{aligned}\rho^L &\equiv y_1^{s+1}(L_1) = c_{13}^s(L_1) \lambda^{s+1} + c_{14}^s(L_1) \beta^{s+1} + g_1^s(L_1), \\ T^L &\equiv y_2^{s+1}(L_1) = c_{23}^s(L_1) \lambda^{s+1} + c_{24}^s(L_1) \beta^{s+1} + g_2^s(L_1),\end{aligned}$$

из решения которой следует, что

$$\begin{aligned}\lambda^{s+1} &= \frac{c_{24}^s(L_1)(\rho^L - g_1^s(L_1)) - c_{14}^s(L_1)(T^L - g_2^s(L_1))}{c_{13}^s(L_1)c_{24}^s(L_1) - c_{14}^s(L_1)c_{23}^s(L_1)}, \\ \beta^{s+1} &= \frac{c_{13}^s(L_1)(T^L - c_{24}^s(L_1)) - c_{23}^s(L_1)(\rho^L - c_{14}^s(L_1))}{c_{13}^s(L_1)c_{24}^s(L_1) - c_{14}^s(L_1)c_{23}^s(L_1)}.\end{aligned}$$

Распределения плотности $\rho^{s+1}(z)$ и температуры $T^{s+1}(z)$ в $(s+1)$ -й итерации выражаются через найденные параметры λ^{s+1} , β^{s+1} , матрицу C^s и вектор \bar{g}^s следующим образом:

$$\rho^{s+1}(z) \equiv y_1^{s+1}(z) = c_{13}^s(z) \lambda^{s+1} + c_{14}^s(z) \beta^{s+1} + g_1^s(z),$$

$$T^{s+1}(z) \equiv y_2^{s+1}(z) = c_{23}^s(z)\lambda^{s+1} + c_{24}^s(z)\beta^{s+1} + g_2^s(z).$$

Условием окончания итерационного процесса является выполнение условия

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < \varepsilon,$$

здесь $\varepsilon_1 = \left| \frac{\lambda^{s+1} - \lambda^s}{\lambda^s} \right|$, $\varepsilon_2 = \left| \frac{\beta^{s+1} - \beta^s}{\beta^s} \right|$, ε — заданная малая безразмерная величина.

В качестве нулевого приближения \bar{y}^0 задаются распределения плотности и температуры газа в режиме транспортировки при λ и β , определенных по одному из полуэмпирических законов, приведенных выше.

Результаты расчетов. Как пример был проведен расчет параметров λ и β для тестового варианта задачи (11). Рассматривались три участка, длина каждого составила $L_i = 100$ км. В качестве экспериментальных данных в тестовом примере давались $\tilde{T}^L = T(L_i)$ и $\tilde{\rho}^L = \rho(L_i)$, рассчитанные по (16)–(20) при $\lambda^{(0)} = 0.00829$ и $\beta^{(0)} = 6.18$ Вт/(м² · К). За нулевое приближение $y_1^0 = \rho^0(z)$, $y_2^0 = T^0(z)$ выбирались характеристики возмущенного решения $\rho(z)$, $T(z)$ (16)–(20) при $\lambda^0 \equiv y_3^0 = 0.025$ и $\beta^0 \equiv y_4^0 = 7.76$ Вт/(м² · К).

Исследование сходимости итерационного процесса привело к выводу о ее существенной зависимости от выбора начального приближения \bar{y}^0 . Для представленного варианта значений \bar{y}^0 для достижения точности расчета $\varepsilon = 10^{-4}$ потребовалось порядка 5 итераций.

Для трех последовательных участков приведем значения модуля относительных отклонений $\delta\lambda = (\lambda/\lambda^{(0)} - 1)$ и $\delta\beta = (\beta/\beta^{(0)} - 1)$ рассчитанных λ и β от значений $\lambda^{(0)}$, $\beta^{(0)}$, принятые за точные для указанного набора параметров:

| № участка..... | I | II | III |
|-------------------------|-------|-------|-------|
| $ \delta\lambda $ | 0.037 | 0.015 | 0.011 |
| $ \delta\beta $ | 0.014 | 0.009 | 0.004 |

Заключение. В работе проанализирована чувствительность модели нестационарного неизотермического течения смеси газов по морскому газопроводу к изменениям коэффициента гидравлического сопротивления λ и суммарного коэффициента теплообмена β газа с окружающей водой. Рассмотрены подходы к определению λ и β . Чувствительность модели к их вариациям проиллюстрирована расчетами и рисунками. Вычислены коэффициенты гидравлического сопротивления и теплообмена для одного из тестовых вариантов транспортировки газа. Представлены постановка и решение задачи идентификации λ и β по экспериментальным данным, позволяющей адаптировать математическую модель транспортировки смеси газов по морскому газопроводу к реальным условиям.

Литература

1. Курбатова Г. И., Ермолаева Н. Н. Квазиодномерная нестационарная модель процессов в морских газопроводах // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 3. С. 55–66.
2. Kurbatova G. I., Ermolaeva N. N. The mathematical models of gas transmission at hyper-pressure // Applied Mathematical Sciences. 2014. Vol. 8, N 124. P. 6191–6203.
3. Ermolaeva N. N. Computer modelling of the sea gas-pipeline glaciation and of the flow characteristics behavior in unsteady regimes // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 4. С. 75–85.
4. Курбатова Г. И., Попова Е. А., Филиппов Б. В. и др. Модели морских газопроводов. СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2005. 156 с.
5. Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И., Клемешев В. А. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2017610826 «Программа для расчета характеристик потока неуста-

новившихся течений многокомпонентной смеси газов по морским газопроводам в северных морях» (SGPITM). Дата поступления 31.01.2017 г. Дата гос. рег. в Реестре программ для ЭВМ 23.03.2017 г.

6. *Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И., Клемешев В. А.* Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2017610817 «Программа для расчета характеристик установившихся течений многокомпонентной смеси газов в морских газопроводах при сверхвысоких давлениях с учетом рельефа трассы» (SGTM). Дата поступления 31.01.2017 г. Дата гос. рег. в Реестре программ для ЭВМ 23.03.2017 г.

7. *Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И., Клемешев В. А., Микова В. В.* Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2017610801 «Программа для расчета динамики нарастания морского льда на плоских и цилиндрических многослойных поверхностях в северных морях» (ЛЕД). Дата поступления 31.01.2017 г. Дата гос. рег. в Реестре программ для ЭВМ 23.03.2017 г.

8. *Ермолаева Н. Н.* Нестационарные модели теплообмена и транспортировки газа по морским газопроводам // Труды Карел. науч. центра РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. 2016. Вып. 8. С. 3–10.

9. *Kurbatova G. I., Ermolaeva N. N.* The models of heat transfer in a sea gas-pipeline at the glaciation // Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading, 2015 Intern. Conference on, 2015. P. 1–3.

10. *Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей / пер. с англ.; под ред. Б. И. Соколова. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Химия, Ленингр. отд., 1982. 592 с. (*Reid R. C., Prausnitz J. M., Sherwood Th. K.* The properties of gases and liquids.)

11. *Haaland S.* Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow // J. Fluids Engineering. 1983. Vol. 105. P. 89–90.

12. СТО Газпром 2-3.5-051-2006. Нормы технологического проектирования магистральных газопроводов. Введ. 2006-07-03. М.: ЗАО Изд. Дом «Полиграфия», 2006. 196 с.

13. *Lee A. L., Gonzalez M. H., Eakin B. E.* The viscosity of natural gases // Journal of Petroleum Technology. 1966. Vol. 18, N 8. P. 997–1000.

14. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя / пер. с 5-го нем. изд. Г. А. Вальперто; под ред. Л. Г. Лойцянского. М.: Наука, 1969. 743 с. (*Schlichting H.* Boundary-layer theory.)

15. *Каниболотский М. А., Бабе Г. Д., Бондарев Э. А., Воеводин А. Ф.* Идентификация моделей гидравлики. Новосибирск: Наука, 1980. 160 с.

16. *Каниболотский М. А., Васильев О. Ф., Бондарев Э. А., Воеводин А. Ф.* Неизотермическое течение газа в трубах. Новосибирск: Наука, 1978. 128 с.

17. *Курбатова Г. И., Ермолаева Н. Н.* Параметрическая идентификация модели установившегося неизотермического течения газа по морскому газопроводу // Морские интеллектуальные технологии (науч. журн.). 2017. Т. 1, № 1. С. 8–14.

18. *Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И., Клемешев В. А.* Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2017613635 «Программа для идентификации параметров математической модели течения многокомпонентной смеси газов в протяженных морских газопроводах» (PIGTM). Дата поступления 31.01.2017 г. Дата гос. рег. в Реестре программ для ЭВМ 23.03.2017 г.

19. *Ермолаева Н. Н.* Исследование влияния параметров транспортировки газа на характеристики потока // Вестн С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 3. С. 53–61.

20. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / пер. с англ. И. А. Вателя, Ф. И. Ерешко; под ред. Ф. Л. Черноусько. М.: Мир, 1968. 183 с. (*Bellman R. E., Kalaba R. E.* Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems.)

Статья поступила в редакцию 21 октября 2018 г.

Статья принята к печати 18 декабря 2018 г.

Контактная информация:

Курбатова Галина Ибрагимовна — д-р физ.-мат. наук, проф.; g.kurbatova@spbu.ru

Ермолаева Надежда Николаевна — д-р физ.-мат. наук, доц.; n.ermolaeva@spbu.ru

Sensitivity analysis of the gas transmission offshore pipeline model to variations of the model parameters

G. I. Kurbatova, N. N. Ermolaeva

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Kurbatova G.I., Ermolaeva N.N. Sensitivity analysis of the gas transmission offshore pipeline model to variations of the model parameters. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 1, pp. 47–61. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.104> (In Russian)

Basic approaches to defining the coefficient of hydraulic resistance and the total heat transfer coefficient between the gas and the ambient in the model of an unsteady nonisothermal gas flow through an offshore gas-pipelines are considered. Model sensitivity to variations of these coefficients is illustrated by the charts, demonstrating influence of these coefficients on the basic flow characteristics. The coefficient of hydraulic resistance and the heat transfer coefficient calculations for one from test variant of gas transmission are given. The calculation method of these parameters from the experimental data, enabling to provide the validity of model of the unsteady nonisothermal gas flow through a sea gas pipeline when calculating certain pipeline is suggested.

Keywords: offshore gas-pipelines, gas transmission, dynamic of glaciation, nonstationary flow, identification of friction factors and of sensitivity analysis of the gas transmission offshore pipeline model to variations of the model parameters, sensitivity analysis of the model.

References

1. Kurbatova G. I., Ermolaeva N. N. Quaziodnomernaja nestacionarnaja model processov v morskikh gasoprovodah [Quasi one-dimensional non-stationary model of the processes in the sea gas pipelines]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer science. Control processes*, 2015, iss. 3, pp. 55–66. (In Russian)
2. Kurbatova G. I., Ermolaeva N. N. The mathematical models of gas transmission at hyper-pressure. *Applied Mathematical Sciences*, 2014, vol. 8, no. 124, pp. 6191–6203.
3. Ermolaeva N. N. Computer modelling of the sea gas-pipeline glaciation and of the flow characteristics behavior in unsteady regimes. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer science. Control processes*, 2016, iss. 4, pp. 75–85.
4. Kurbatova G. I., Popova E. A., Filippov B. V. at all. *Modeli morskikh gazoprovodov [Models of sea gas-pipelines]*. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Publ., 2005, 156 p. (In Russian)
5. Ermolaeva N. N., Kurbatova G. I., Klemeshev V. A. *Svidetel'stvo ob ofitsial'noj registratsii programmy dlya EVM no. 2017610826 "Programma dlja rascheta harakteristik potoka neustanovivshijsja techenii mnogo-komponentnoj smesi gasov po morskim gasoprovodam v severnih morjah" (SGPITM) [Certificate of Official Registration of Computer Programs N 2017610826 "The program for calculating the flow characteristics of unsteady flows of a multicomponent gas mixture through the offshore gas pipelines in the northern seas" (SGPITM)]*. Date of receipt: 31.01.2017. Date of state registration in the Register of computer programs: 23.03.2017. (In Russian)
6. Ermolaeva N. N., Kurbatova G. I., Klemeshev V. A. *Svidetel'stvo ob ofitsial'noj registratsii programmy dlya EVM no. 2017610817 "Programma dlja rascheta harakteristik ustanovivshijsja techenii mnogokomponentnoj smesi gasov v morskikh gasoprovodah pri sverhvisokih davlenijah s uchetom reljefa trassi" (SGTM) [Certificate of Official Registration of Computer Programs N 2017610817 "The program for calculating the characteristics of steady-state flows of a multicomponent mixture of gases in offshore gas pipelines at ultrahigh pressures, taking into account the route relief" (SGTM)]*. Date of receipt: 31.01.2017. Date of state registration in the Register of computer programs: 23.03.2017. (In Russian)
7. Ermolaeva N. N., Kurbatova G. I., Klemeshev V. A., Mikova V. V. *Svidetel'stvo ob ofitsial'noj registratsii programmy dlya EVM no. 2017610801 "Programma dlja rascheta dinamiki narastanija morskogo lda na ploskih i cillindricheskikh mnogosloynnih poverhnostjah v severnih morjah" (LED) [Certificate of Official Registration of Computer Programs N 2017610801 "The program for calculating the dynamics of sea ice growth on flat and cylindrical multilayer surfaces in the northern seas" (LED)]*. Date of receipt: 31.01.2017. Date of state registration in the Register of computer programs: 23.03.2017. (In Russian)
8. Ermolaeva N. N. Nestacionarnie modeli teploobmena i transportirovki gasa po morskim gasoprovodam [Non-stationary models of the heat exchange and the gas transportation through a sea gas pipeline]. *Trudi Karel. nauch. centra RAN. Seria Matematicheskoe modelirvanie i informacionnie tehnologii*, 2016, iss. 8, pp. 3–10. (In Russian)
9. Kurbatova G. I., Ermolaeva N. N. The models of heat transfer in a sea gas-pipeline at the glaciation. *Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading*, 2015 Intern. Conference on, 2015, pp. 1–3.

10. Reid R. C., Prausnitz J. M., Sherwood Th. K. *The properties of gases and liquids*. New York, St. Louis, San Francisco, McGraw-Hill Book Company Publ., 1977, 560 p. (Rus. ed.: Reid R., Prausnitz J., Sherwood Th. *Svoistva gazov i ghidkostey*. Leningrad, Chemistry Publ., 1982, 592 p.)
11. Haaland S. Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. *J. Fluids Engineering*, 1983, vol. 105, pp. 89–90.
12. *STO Gasprom 2-3.5-051-2006. Normi tehnologicheskogo proektirovaniya magistralnih gasoprovodov* [Standards of technological design of gas pipelines]. Vved. 2006-07-03. Moscow, ZAO Izd. Dom "Poligrafiya", 2006, 196 p. (In Russian)
13. Lee A. L., Gonzalez M. H., Eakin B. E. The viscosity of natural gases. *Journal of Petroleum Technology*, 1966, vol. 18, no. 8, pp. 997–1000.
14. Schlichting H. *Boundary-layer theory*. New York, McGraw-Hill Publ., 1955, 535 p. (Rus. ed.: Schlichting H. *Teoria pogrannichnogo sloya*. Moscow, Nauka Publ., 1969, 743 p.)
15. Kanibolotskiy M. A., Babe G. D., Bondarev E. A., Voyevodin A. F. *Identifikatsiya modeley gidravliki* [Identification of hydraulic models]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1980, 160 p. (In Russian)
16. Kanibolotskiy M. A., Vasil'yev O. F., Bondarev E. A., Voyevodin A. F. *Neizotermicheskoye techeniye gaza v trubakh* [Non-isothermal flow of gas in the pipes]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1978, 128 p. (In Russian)
17. Kurbatova G. I., Ermolaeva N. N. Parametricheskaya identifikatsiya modeli ustanovivshegosya neizo-termicheskogo techeniya gaza po morskomu gazoprovodu [Parametric identification of a model of steady non-isothermal gas flow through a sea gas pipeline]. *Morskiye intellektual'nyye tekhnologii* [Marine intellectual technology], 2017, vol. 1, no. 1, pp. 8–14. (In Russian)
18. Ermolaeva N. N., Kurbatova G. I., Klemeshev V. A. *Svidetel'stvo ob ofitsial'noy registratsii programmy dlya EVM N 2017613635 "Programma dlya identifikatsii parametrov matematicheskoy modeli techeniya mnogokomponentnoy smesi gazov v protyazhennykh morskikh gazoprovodakh" (PIGTM)*. [Certificate of Official Registration of Computer Programs no. 2017613635 "Program for identifying the parameters of a mathematical model of a multicomponent gas mixture flow in long offshore gas pipelines" (PIGTM)]. Date of receipt: 31.01.2017. Date of state registration in the Register of computer programs: 23.03.2017. (In Russian)
19. Ermolaeva N. N. Issledovaniye vliyaniya parametrov transportirovki gaza na kharakteristiki potoka [Investigation of the influence of gas transmission parameters on flow characteristics]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer science. Control processes*, 2016, iss. 3, pp. 53–61.
20. Bellman R. E., Kalaba R. E. *Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems*. New York, American Elsevier Publ. Comp., 1965, 218 p. (Rus. ed.: Bellman R. E., Kalaba R. E. *Kvazi-linearizatsiya i nelineinye kraevye zadachi*. Moscow, Mir Publ., 1968. 183 p.)

Received: October 21, 2018.

Accepted: December 18, 2018.

Author's information:

Galina I. Kurbatova — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; g.kurbatova@spbu.ru

Nadeczda N. Ermolaeva — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor; n.ermolaeva@spbu.ru