

## Об оценке уровня работоспособности растягиваемой пластины, ослабленной поперечной трещиной\*

*Н. Ф. Морозов, Б. Н. Семенов, П. Е. Товстик*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н., Товстик П. Е. Об оценке уровня работоспособности растягиваемой пластины, ослабленной поперечной трещиной // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 2. С. 338–346. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.216>

Рассматривается прямолинейная трещина в тонкой упругой пластине. При растяжении пластины в направлении, перпендикулярном трещине, в окрестности трещины появляются сжимающие напряжения, которые при определенном уровне растяжения приводят к потере устойчивости плоской формы равновесия пластины. Целью исследования является выяснение вопроса о том, способствует ли потеря устойчивости росту трещины или приводит к стабилизации деформаций. В работе исследуется напряженное состояние пластины в начальной послекритической стадии. Предложено приближенное аналитическое решение. Методом конечных элементов построено решение задачи растяжения пластинки после потери устойчивости. Оценено влияние потери плоской формы деформирования при растяжении пластины с центральной трещиной на уровень напряженного состояния в окрестности вершины трещины. Анализ напряженного состояния в окрестности вершины центральной трещины при одноосном растяжении дает основания утверждать, что при возможной локальной потере устойчивости вблизи трещины происходит повышение уровня растягивающих напряжений в окрестности кончика трещины, и, как следствие, снижается нагрузка, приводящая к разрушению.

*Ключевые слова:* потеря плоской формы деформирования, пластина, метод конечных элементов.

**1. Введение.** Тонкостенные элементы находят широкое применение в различных конструкциях. При анализе их несущей способности необходимо учитывать не только нагрузки, приводящие к их разрушению, но и нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости. Следует отметить, что потеря устойчивости может происходить как при сжатии этих элементов, так и при растяжении при наличии в них дефектов типа вырезов, разрезов и включений, так как в окрестности этих дефектов возникают области сжимающих напряжений, которые могут приводить к локальной потере устойчивости (выпучиванию). Потеря плоской формы деформирования пластины, ослабленной трещиной, при одноосном растяжении исследовалась в ряде работ [1–9]. Однако вопрос о деформировании после потери устойчивости и влиянии на разрушение не получил окончательного ответа. В этой связи можно

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00580, 16-51-52025, 18-01-00884) и СПбГУ (грант № 26520317).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

указать на работу [8], в которой на основании экспериментальных результатов, полученных для растяжения бумажных листов с центральной трещиной, утверждается, что после выпучивания пластины в окрестности трещины происходит снижение интенсивности напряжений, т. е. для разрушения требуется большее растягивающее напряжение, чем для листа, сохранившего плоскую форму деформирования. В то же время эксперименты по растяжению металлических листов с центральной трещиной показывают, что локальное выпучивание в окрестности трещины приводит к увеличению концентрации напряжений в окрестности вершин трещины, т. е. к снижению разрушающей нагрузки [7].

**2. Аналитическое решение.** Рассматривается разрез длиной  $2a$  в упругой изотропной однородной бесконечной пластине толщиной  $h \ll a$ . Пластина равномерно растянута усилием  $T > 0$  в направлении, перпендикулярном разрезу. В окрестности разреза в линейном приближении возникает напряженно-деформированное состояние с напряжениями  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$ , определяемыми по формулам [10]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= T(\operatorname{Re}(Z_1) - y\operatorname{Im}(Z_1')), \\ \sigma_{yy} &= T(\operatorname{Re}(Z_1) + y\operatorname{Im}(Z_1') + 1), \\ \sigma_{xy} &= -Ty\operatorname{Re}(Z_1'),\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$Z_1 = z(z^2 - a^2)^{-1/2} - 1, \quad Z_1' = -a^2(z^2 - a^2)^{-3/2}, \quad z = x + iy.$$

Здесь начало декартовой системы координат  $xOy$  расположено в середине разреза, а ось  $Ox$  направлена вдоль него. Приведем формулы (2.1) в развернутом виде [11]:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{xx}}{T} &= \frac{x\sqrt{r-b} + y\sqrt{r+b}}{\sqrt{2}r} - \frac{a^2y(r-2b)\sqrt{r+b}}{\sqrt{2}r^3} - 1, \\ \frac{\sigma_{yy}}{T} &= \frac{x\sqrt{r-b} + y\sqrt{r+b}}{\sqrt{2}r} + \frac{a^2y(r-2b)\sqrt{r+b}}{\sqrt{2}r^3}, \\ \frac{\sigma_{xy}}{T} &= -\frac{a^2y(r+2b)\sqrt{r-b}}{\sqrt{2}r^3},\end{aligned}\tag{2.2}$$

где

$$b = a^2 - x^2 + y^2, \quad r = \sqrt{x^4 + 2x^2(y^2 - a^2) + (y^2 + a^2)^2},\tag{2.3}$$

причем в формулах (2.2) и (2.3) под знаком радикала стоят неотрицательные числа.

В окрестности разреза возникает продольное сжатие, в результате которого пластина может потерять устойчивость. Нетрудно проверить, что на разрезе имеем

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0, \quad -a < x < a, \quad y = \pm 0.\tag{2.4}$$

Безразмерные напряжения  $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}/T$  при  $a = 1$  в окрестности конца трещины  $x = 1$ ,  $y = 0$  (при  $0 \leq x \leq 2$  и значениях  $y = 0.05k$ ,  $k = 1, \dots, 6$ ) показаны на рис. 1.

В рамках классической модели Кирхгофа — Лява устойчивость плоской формы равновесия пластины описывается уравнением

$$D\Delta^2 w - T\left(\sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\tag{2.5}$$

где  $w(x, y)$  — прогиб,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\sigma_{ij} = T\sigma_{ij}^0$ .

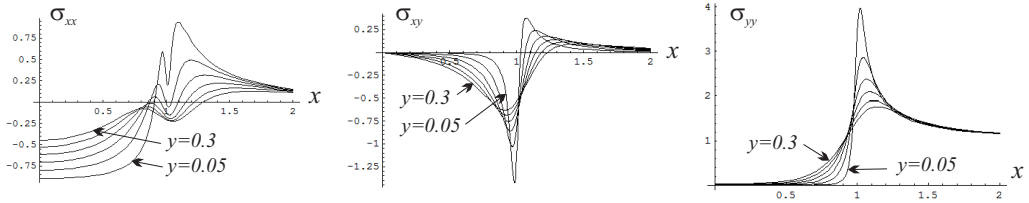


Рис. 1. Напряжения  $\sigma_{xx}^0(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}^0(x, y)$ ,  $\sigma_{xy}^0(x, y)$  при  $0 \leq x \leq 2$ ,  $y = 0.05k$ ,  $k = 1, \dots, 6$ .

На разрезе  $-a < x < a$ ,  $y = 0$  в общем случае выполнены граничные условия

$$D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \sigma_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (2.6)$$

однако в силу формул (2.4) в (2.6) следует считать  $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$ .

Критическое значение  $T^*$  усилия  $T$  может быть найдено также из вариационной задачи [12]:

$$T^* = \min_w \frac{\Pi_b}{\Pi_{uw}}, \quad (2.7)$$

где  $\Pi_b$  — энергия изгиба при потере устойчивости,  $\Pi_{uw}$  — дополнительная энергия растяжения:

$$\begin{aligned} \Pi_b &= \frac{D}{2} \iint (\kappa_1^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 + 2(1 - \nu)\tau^2) dx dy, \\ \Pi_{uw}^0 &= \frac{1}{2} \iint (\sigma_{xx}^0 w_x^2 + 2\sigma_{xy}^0 w_x w_y + \sigma_{yy}^0 w_y^2) dx dy. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь  $\kappa_1 = w_{xx}$ ,  $\kappa_2 = w_{yy}$ ,  $\tau = w_{xy}$  — кривизны и кручение срединной плоскости. Здесь и в дальнейшем интегрирование проводится по четверти плоскости  $0 \leq x, y < \infty$ , ибо форма потери устойчивости симметрична по  $x$  и по  $y$ . Граничные условия (2.6) являются естественными для задачи (2.7). Поэтому при выборе координатных функций метода Ритца их можно игнорировать. Для четной формы имеем

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0, \quad |x - a| > 0, \quad y = 0, \quad (2.9)$$

а для нечетной формы —

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad |x - a| > 0, \quad y = 0. \quad (2.10)$$

Кроме того, выполнено условие затухания  $w \rightarrow 0$  при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ .

Критической нагрузке соответствует четная форма, ибо условия (2.10) более жесткие, чем (2.9).

Рассмотрим прогиб пластины в линейном приближении при наличии малых неправильностей формы  $w^0(x, y)$ . Полный прогиб  $W = w_0 + w$  складывается из начального прогиба  $w_0$  и дополнительного прогиба  $w$ , порожденного действием растяжения  $T$ , а уравнение равновесия имеет вид

$$D\Delta^2 w + T \left( \sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2\sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Рассмотрим краевую задачу бифуркации плоской формы:

$$D\Delta^2 w_k + T_k \left( \sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + 2\sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (2.12)$$

где  $T_k$  и  $w_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — собственные значения и собственные функции, причем  $T_1 < T_2 \leq T_3 \leq \dots$

Начальный и дополнительный прогибы разложим в ряды Фурье по собственным функциям задачи (2.12):

$$w^0(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^0 w_k(x, y), \quad w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(x, y). \quad (2.13)$$

Подстановка рядов (2.13) в уравнение (2.11) с учетом ортогональности собственных функций позволяет найти коэффициенты  $c_k = T c_k^0 / (T - T_k)$ , и дополнительный прогиб имеет вид

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T c_k^0 w_k(x, y)}{T - T_k}. \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что при  $T \approx T_1$  существенным является только первый член ряда (2.14) и при последующем нелинейном анализе можно ограничиться одночленным приближением.

**3. Начальная послекритическая деформация.** Из (2.14) следует, что при  $T = T_1$  будет  $w = \infty$ . Для получения конечных значений прогиба обратимся к геометрически нелинейной постановке, при которой тангенциальные деформации имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + w_x^2/2, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + w_y^2/2, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + w_x w_y, \quad (3.1)$$

где  $\varepsilon_{ij}^0$  — линейная часть деформаций ( $\varepsilon_{11}^0 = u_x$ ,  $\varepsilon_{22}^0 = v_y$ ,  $\varepsilon_{12}^0 = u_y + v_x$ ) и  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  — проекции перемещения.

Найдем уточненное выражение потенциальной энергии деформации:

$$\Pi = \Pi_\varepsilon + \Pi_b, \quad (3.2)$$

где  $\Pi_\varepsilon$  и  $\Pi_b$  — энергии деформации растяжения и изгиба, причем

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon &= \frac{1}{2} \iint (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}) dx dy, \\ \sigma_{11} &= \frac{Eh(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22})}{1 - \nu^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{Eh(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11})}{1 - \nu^2}, \quad \sigma_{12} = \frac{Eh \varepsilon_{12}}{2(1 + \nu)}, \\ \varepsilon_{11}^0 &= \frac{T(\sigma_{11}^0 - \nu \sigma_{22}^0)}{Eh}, \quad \varepsilon_{22}^0 = \frac{T(\sigma_{22}^0 - \nu \sigma_{11}^0)}{Eh}, \quad \varepsilon_{12}^0 = \frac{2T(1 + \nu) \sigma_{12}^0}{Eh}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $\sigma_{ij}^0$  — решение плоской задачи при  $T = 1$  (см. рис. 1).

Ограничиваясь одномодовым приближением, положим  $W = (c^0 + c)w$ , где  $w = w_1(x, y)$  — собственная функция задачи (2.12) при  $T_k = T_1$  (считаем, что  $w_1(0, 0) = 1$ ),  $c^0 = c_1^0$  — заданная малая амплитуда начальной непрямолинейности по форме  $w_1$ ,  $c = c_1$  — искомая амплитуда дополнительного прогиба.

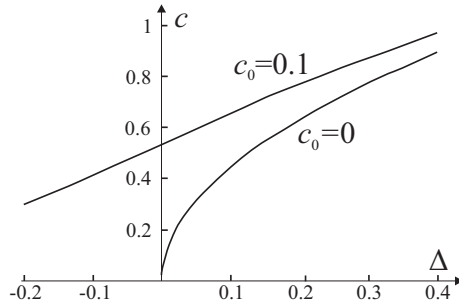


Рис. 2. Амплитуда дополнительного прогиба.

Перепишем выражение для энергии (3.2) в виде

$$\Pi = \Pi_u - \Pi_{uw} + \Pi_w + \Pi_b = \frac{T^2}{2Eh} \Pi_u^0 - \frac{T(c^0 + c)^2}{2} \Pi_{uw}^0 + \frac{Ehc^2(c^0 + c)^2}{8(1 - \nu^2)} \Pi_w^0 + \frac{Dc^2}{2} \Pi_b^0, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_u^0 &= \iint ((\sigma_{11}^0)^2 - \nu\sigma_{11}^0\sigma_{22}^0 + (\sigma_{22}^0)^2 + 2(1 + \nu)(\sigma_{12}^0)^2) dx dy, \\ \Pi_{uw}^0 &= \iint (\sigma_{11}^0(w_x^0)^2 + 2\sigma_{12}w_x^0w_y^0 + \sigma_{22}^0(w_y^0)^2) dx dy, \\ \Pi_w^0 &= \iint ((w_x^0)^2 + (w_y^0)^2)^2 dx dy, \\ \Pi_b^0 &= \iint ((\Delta w^0)^2 + 2(1 - \nu)(w_{xy}^0)^2 - w_{xx}^0w_{yy}^0) dx dy. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Множитель  $c^2(c + c_0)^2$  в выражении для  $\Pi_w$  связан с тем, что в первом сомножителе произведения  $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$  начальные неправильности не входят, а во втором — входят. Также они не входят в выражение для энергии  $\Pi_b$  изгибной деформации.

Положим  $T = T_1(1 + \Delta)$ , где  $T_1 = D\Pi_b^0/(a^2\Pi_{uw}^0)$  — критическая нагрузка (2.7).

Минимизация энергии (3.4) по амплитуде  $c$  приводит к кубическому уравнению

$$(1 + \Delta)(c + c_0) = c + \frac{g}{h^2}c(c + c_0)(2c + c_0), \quad g = \frac{3\Pi_b^0}{\Pi_w^0}. \quad (3.6)$$

Или, вычисляя прогибы в долях толщины ( $c = h\hat{c}$ ,  $c_0 = h\hat{c}_0$ ), получим

$$(1 + \Delta)(\hat{c} + \hat{c}_0) = \hat{c} + g\hat{c}(\hat{c} + \hat{c}_0)(2\hat{c} + \hat{c}_0). \quad (3.7)$$

В частности, при отсутствии неправильности ( $c_0 = 0$ ) имеем  $c = h\sqrt{\Delta/(2g)}$ .

На рис. 2 при  $g = 0.25$  показан график зависимости  $c(\Delta)$  при  $c_0 = 0.1$  и при отсутствии вмятины  $c_0 = 0$ .

В силу формул (3.3), (3.1) напряжение  $\sigma_{yy}$  при нелинейном подходе определяется как

$$\sigma_{yy} = T\sigma_{yy}^0 + \frac{Ehc^2}{2(1 - \nu^2)}(\nu w_x^2 + w_y^2). \quad (3.8)$$

В связи с тем, что второе слагаемое в формуле (3.8) положительно, напряжение  $\sigma_{yy}$ , растягивающее трещину, после потери устойчивости больше, чем до нее. Следовательно, потеря устойчивости повышает уровень растягивающих напряжений в кончике трещины и способствует росту трещины.

**4. Конечно-элементное моделирование послекритической деформации.** При помощи пакета ANSYS проводится конечно-элементный нелинейный анализ послекритической деформации пластины с трещиной при одноосном растяжении. В качестве расчетной модели выбрана пластинка из материала с модулем Юнга  $E = 70290$  МПа, а коэффициент Пуассона  $\nu = 0.345$ . Размеры пластины таковы: высота  $2H = 8$  мм, ширина  $2L = 8$  мм, толщина  $h = 0.01$  мм. Пластина ослаблена центральной прямолинейной трещиной длиной  $2a = 0.5$  мм ( $-a < x < a, y = 0$ ). Для обеспечения необходимой точности вычислений в окрестности концов трещины производится сгущение сетки с минимальным линейным размером элемента 0.005 мм. При растяжении пластины равномерно распределенным усилием, приложенным к верхней и нижней сторонам пластины ( $-L < x < L, y = \pm H$ ), при достижении критической нагрузки происходит ее выпучивание (потеря плоской формы деформирования).

В табл. 1 приведены критические нагрузки для первых трех форм потери устойчивости, найденные по линейной теории устойчивости.

Таблица 1. Критические нагрузки для первых форм потери устойчивости

Номер формы	Критическая нагрузка $N/mm$
1	1.6707
2	2.3344
3	5.9132

Для оценки напряженно-деформированного состояния пластинки в послекритическом состоянии задача решается в нелинейно-упругой постановке.

Следуя алгоритму построения решения задачи нелинейного выпучивания, задаются начальные несовершенства пластины, пропорциональные сумме перемещений  $w$  по трем первым формам и равные 5% толщины пластины, растягивающая на-

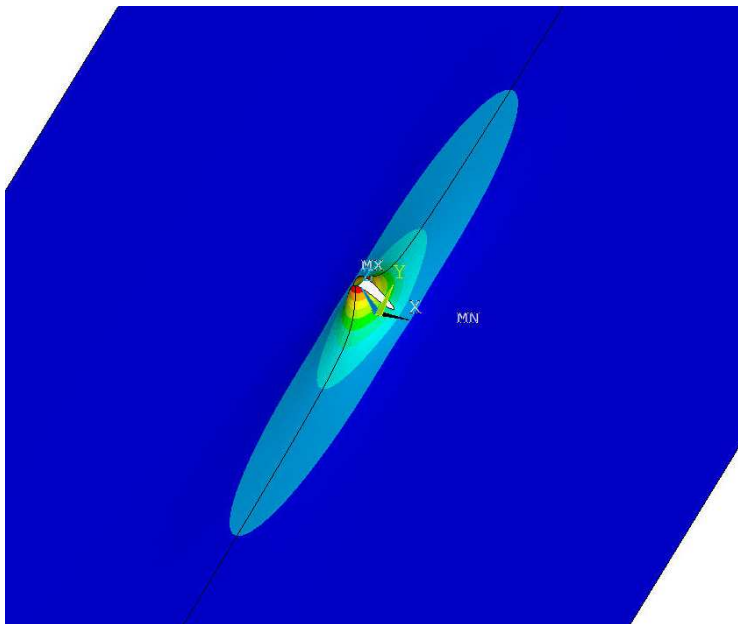


Рис. 3. Выпучивание пластины при растягивающем усилии  $2N/mm$ .

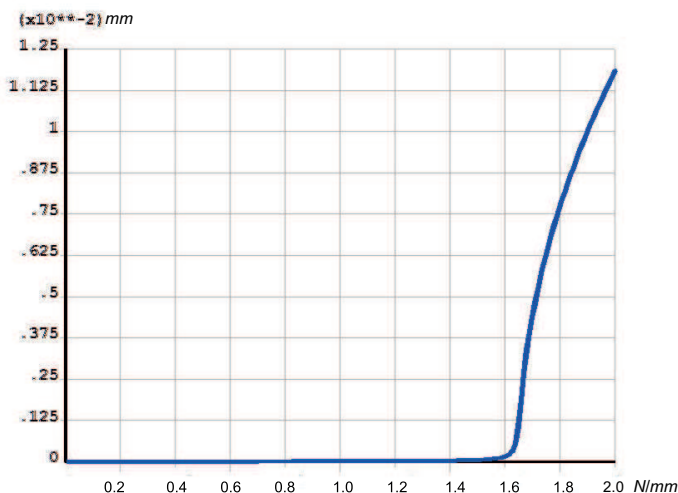


Рис. 4. Перемещение  $w$  центральной точки верхнего берега трещины ( $x = 0, y = +0$ ) при растягивающей нагрузке от 0 до  $2 N/mm$ .

грузка меняется от 0 до  $2 N/mm$ , что несколько превышает первую критическую нагрузку, полученную по линейной теории устойчивости. На рис. 3 представлено выпучивание пластины в окрестности трещины при нагрузке  $2.0 N/mm$ , т. е. за пределом устойчивости. Выход пластинки из плоскости соответствует первой форме потери устойчивости, полученной для задачи в линейной постановке.

Для иллюстрации нелинейного деформирования пластинки с начальными несовершенствами на рис. 4 представлено перемещение центральной точки трещины в зависимости от приложенной нагрузки.

Как следует из рис. 4, при наличии начальных несовершенств заметный рост прогибов наблюдается при нагрузке  $1.6 N/mm$ , меньшей первой критической нагрузки по линейной теории, что подтверждается и аналитическим решением (см. рис. 2).

Анализ послекритического состояния пластины в нелинейной постановке дает возможность оценить уровень напряжений в кончике трещины. В табл. 2 приведены максимальные растягивающие напряжения на элементе, примыкающем к вершине трещины при растягивающем усилии  $2 N/mm$  на расстоянии  $0.00125 mm$  от вершины. Для сравнения приведены напряжения в случае линейного деформирования пластины равномерно распределенным усилием  $2 N/mm$  без возможного выпучивания, в случае решения задачи в нелинейно-упругой постановке без возможного выпучивания, а также в случае решения задачи в нелинейно-упругой постановке при выпучивании.

Таблица 2. Максимальные растягивающие напряжения на расстоянии  $0.00125 mm$  от вершины

	Линейное решение	Нелинейное решение (плоская форма)	Нелинейное решение (выпучивание)
Напряжение $\sigma_{yy}(N/mm^2)$	3278	3379	3619

**5. Заключение.** Таким образом, проведенный анализ напряженного состояния в окрестности вершины центральной трещины при одноосном растяжении дает основания утверждать, что при возможной локальной потере устойчивости вблизи трещины происходит повышение уровня растягивающих напряжений в окрестности кончика трещины, и, как следствие, снижается нагрузка, приводящая к разрушению. Это подтверждается экспериментальными результатами Гузя А. М. и Дышеля М. Ш. [5, 7]. Несоответствие результатов приведенного анализа с экспериментальными результатами работы [8] может быть, по-видимому, объяснено тем, что материал, использовавшийся в экспериментах (бумага), имеет более сложную реологию.

## Литература

1. Cherepanov G. P. On the buckling under tension of a membrane containing holes // J. Appl. Math. Mech. 1963. Vol. 27, no. 2. P. 405–420.
2. Dixon J. R., Stranningan J. S. Stess distribution and buckling in thin sheets with central slits // Proc. 2nd Int. Conf. on Fracture. Brighton, 1969. London: Chapman and Hall, 1969.
3. Даль Ю. М. О местном изгибе растянутой пластины с трещиной // Механика твердого тела. 1978. № 4. С. 135–141.
4. Markström K., Storäkers B. Buckling of cracked members under tension // Int. J. Solids Structures. 1980. Vol. 16. P. 217–229.
5. Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Кулиев Г. Г., Милованова О. Б. Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. Киев.: Наукова думка, 1981.
6. Sih G. C., Lee Y. D. Tensile and compressive buckling of plates weakened by cracks // Theor. Appl. Fract. Mech. 1986. Vol. 6. P. 129–138.
7. Dyshel M. S. Stability and fracture of plates with a central and an edge crack under tension // Int. Appl. Mech. 2002. Vol. 38. P. 472–476.
8. Li Ch., Espinosa R., Stehle P. Fracture mechanics for membranes // Proc. XVth European Conf. on Fracture (ECF15), 2004, Stockholm. 2004.
9. Kopecki T. Numerical and experimental analysis of post-critical deformation states in a tensioned plate weakened by a crack // J. Theor. and Appl. Mechanics (Warsaw). 2010. Vol. 48, no. 1. P. 45–70.
10. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
11. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
12. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979.

Статья поступила в редакцию 28 октября 2018 г.;  
после доработки 14 декабря 2018 г.;  
рекомендована в печать 20 декабря 2018 г.

### Контактная информация:

Морозов Никита Федорович — академик, д-р физ.-мат. наук, проф.; n.morozov@spbu.ru  
Семенов Борис Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; semenov@bs1892.spb.edu  
Товстик Петр Евгеньевич — д-р физ.-мат. наук, проф., peter.tovstik@mail.ru

## On the estimation of the level of performance of a stretchable plate weakened by a transverse crack

N. F. Morozov, B. N. Semenov, P. E. Tovstik

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Morozov N. F., Semenov B. N., Tovstik P. E. On the estimation of the level of performance of a stretchable plate weakened by a transverse crack. *Vestnik of Saint Petersburg*



A rectilinear crack in a thin elastic plate is considered. At tension of the plate in the perpendicular crack direction in the vicinity of the crack appear compressive stresses, which at a certain level of tension lead to loss of stability of the plane form of equilibrium plates. The purpose of the study is to clarify the issue of whether buckling promotes crack growth or leads to the stabilization of deformations. The stress state of the plate in the initial postcritical stage is investigated. The approximate analytical solution is suggested. The finite element method is used to solve the problem of stretching a plate after loss of stability. The effect of the loss of a plane form of deformation under tension of a plate with a central crack on the level of the stress state in the vicinity of the crack tip is estimated. An analysis of the stress state in the vicinity of the tip of the central crack under uniaxial tension shows that with possible local stability loss near the crack an increase in tensile stresses in the vicinity of the crack tip is observed, and, as a result, load leading to destruction should be reduced.

*Keywords:* stability loss, plates, finite element method.

## References

1. Cherepanov G. P., “On the buckling under tension of a membrane containing holes”, *J. Appl. Math. Mech.* **27**(2), 405–420 (1963).
2. Dixon J. R., Stranningan J. S., “Stress distribution and buckling in thin sheets with central slits”, *Proc. 2nd Int. Conf. on Fracture. Brighton, 1969* (Chapman and Hall, London, 1969).
3. Dahl Yu. M., “On the local bending of an elongated plate with a crack”, *Izvestia Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela* (4), 135–141 (1978).
4. Markström K., Storåkers B., “Buckling of cracked members under tension”, *Int. J. Solids Structures* **16**, 217–229 (1980).
5. Guz A. N., Dyshel M. Sh., Guliyev G. G., Milovanova O. B., *The destruction and ustojchivaost thin bodies* (Naukova Dumka Publ., Kiev, 1981). (In Russian)
6. Sih G. C., Lee Y. D., “Tensile and compressive buckling of plates weakened by cracks”, *Theor. Appl. Fract. Mech.* **6**, 129–138 (1986).
7. Dyshel M. S., “Stability and fracture of plates with a central and an edge crack under tension”, *Int. Appl. Mech.* **38**, 472–476 (2002).
8. Li Ch., Espinosa R., Stehle P., “Fracture mechanics for membranes”, *Proc. XVth European Conf. on Fracture (ECF15), 2004, Stockholm* (2004).
9. Kopecki T., “Numerical and experimental analysis of post-critical deformation states in a tensioned plate weakened by a crack”, *J. Theor. and Appl. Mechanics (Warsaw)* **48**(1), 45–70 (2010).
10. Muskhelishvili N. I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Basic equations, the plane theory of elasticity, torsion and bending* (5th ed., revised and enlarged, Nauka Publ., Moscow, 1966). (In Russian)
11. Morozov N. F., *Mathematical problems of crack theory* (Nauka Publ., Moscow, 1984).
12. Timoshenko S. P., Goodier J. N., *Theory of elasticity* (MacGraw Hill Book Company, 1951).

Received: October 28, 2018

Revised: December 14, 2018

Accepted: December 20, 2018

## Author's information:

Morozov Nikita F. — n.morozov@spbu.ru

Semenov Boris N. — semenov@bs1892.spb.edu

Tovstik Petr E. — peter.tovstik@mail.ru