

О напряжениях в полосе, загруженной на продольных кромках сосредоточенными усилиями

Ю. М. Даль

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Даль Ю. М. О напряжениях в полосе, загруженной на продольных кромках сосредоточенными усилиями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 2. С. 318–328.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.214>

Исследована задача плоской теории упругости о напряженном состоянии полосы S постоянной ширины $2c$, загруженной на противоположных кромках сосредоточенными усилиями. Аналитическое решение этой задачи найдено методами теории функций комплексного переменного. Компоненты напряжения в произвольной точке полосы определены через две регулярные функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$. Для нахождения этих функций использовано конформное отображение области S на нижнюю полуплоскость ζ . Задача о полуплоскости решена классическим способом, основанным на аппарате интегралов типа Коши. Установлены точные аналитические выражения для функций $\Phi(\zeta)$ и $\Psi_1(\zeta)$, которые трансформированы обратным конформным преобразованием в искомые формулы для $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$. Поскольку функции $\Psi_1(z)$ и $\Phi'(z)$ оказались связанными между собой, напряжения в полосе S определялись функцией $\Phi(z)$ и производной $\Phi'(z)$. Приведены графики нормальных и касательных напряжений на линиях, параллельных кромкам полосы. Выполнено сравнение величин напряжений на оси полосы с данными Файлона. Полученное решение удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия, краевым условиям и уравнению неразрывности.

Ключевые слова: плоская задача теории упругости, бесконечная полоса, комплексная переменная, конформное отображение, формулы Колосова.

1. Введение. Аналитическое определение напряжений в бесконечной полосе, загруженной на продольных кромках, донныне остается камнем преткновения теории упругости. Как правило, публикации по этому вопросу (см. [1–3] и др.) содержат вывод теоретических зависимостей, на основе которых «фактическое нахождение величин напряжений требует выполнения численных квадратур» [4, с. 358]. Подобные решения, приемлемые при достаточно гладких непрерывно распределенных усилиях, оказываются сомнительными, когда на границах полосы действуют сосредоточенные силы, моменты или локально распределенные нагрузки большого градиента. Точное решение проблемы, вынесенной в заголовок предлагаемой работы, излагается ниже.

2. Постановка задачи. Рассмотрим в плоскости $xу$ бесконечную полосу S шириной $2c = \text{const}$. Совместим ось x декартовой системы координат с верхней кромкой полосы L_1 , нижней кромке припишем индекс L_2 . Внутренние точки области S будем обозначать переменной $z = x + iy$, граничные (принадлежащие L_1 и L_2) — перемен-

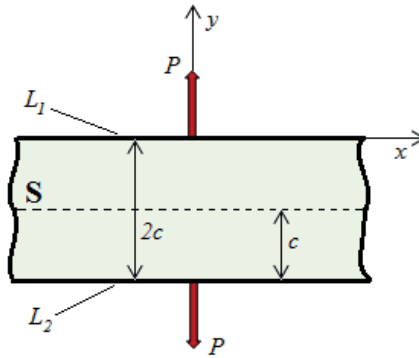


Рис. 1. Бесконечная полоса S , нагруженная силами P .

ной t . Пусть в точках $t = (0, 0)$ и $t = (0, -i2c)$ действуют силы P , направленные по внешним нормальям к линиям L_1 и L_2 (рис. 1). Требуется определить компоненты напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ в произвольной точке $z \in S$.

Согласно [5, с. 69] имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] = 4\operatorname{Re}\Phi(z), \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2[2x\Phi'(z) + \Psi_1(z)],\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ — регулярные в S функции. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\operatorname{Re}\Phi(z) - [2x\operatorname{Re}\Phi'(z) + \operatorname{Re}\Psi_1(z)], \\ \sigma_{yy} &= 2\operatorname{Re}\Phi(z) + [2x\operatorname{Re}\Phi'(z) + \operatorname{Re}\Psi_1(z)], \\ \sigma_{xy} &= 2x\operatorname{Im}\Phi'(z) + \operatorname{Im}\Psi_1(z);\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$\sigma_{yy} + i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + 2x\Phi'(z) + \Psi_1(z).\quad (2.3)$$

Полагая в предыдущем уравнении $z \rightarrow t$, выводим граничные условия для функций $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + 2x\Phi'(t) + \Psi_1(t) = P[\delta(t) + \delta(t + i2c)],\quad (2.4)$$

здесь $\delta(t)$ и $\delta(t + i2c)$ — дельта-функции Дирака.

3. Метод решения. Воспользуемся конформным отображением полосы на нижнюю полуплоскость:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{2c}{\pi} \ln \zeta.\quad (3.1)$$

Представив левую часть этой формулы в декартовых координатах ($z = x + iy$), правую — в полярных ($\zeta = \rho e^{i\theta}$), находим

$$x = \frac{2c}{\pi} \ln \rho, \quad y = \frac{2c\theta}{\pi}, \quad \text{где } -\pi \leq \theta \leq 0, \quad \rho = |\zeta| \geq 0.\quad (3.2)$$

Из выражений (3.2) следуют высказывания (рис. 2).

1. Линии $y = \text{const}$ ($-2c \leq y \leq 0$) полосы S отображаются в лучи $\theta = \pi y/2c = \text{const}$ полуплоскости.

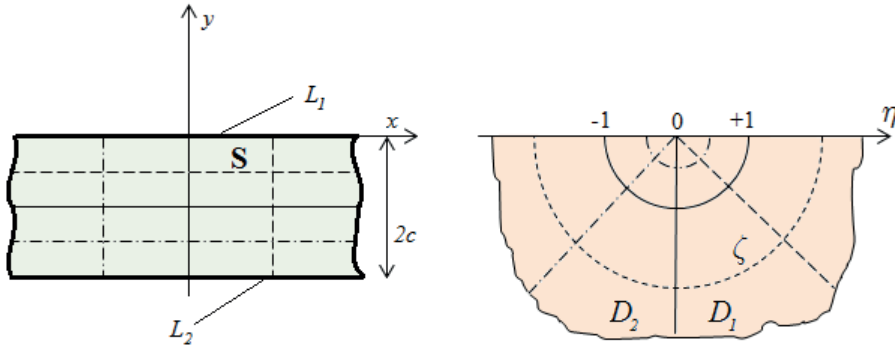


Рис. 2. Отображение полосы S на нижнюю полу плоскость ζ .

2. Отрезки $x = \text{const}$ с концами на прямых $y = 0$ и $y = -2c$ преобразуются в нижние полуокружности радиусов $\rho = e^{x\pi/2c} = \text{const}$.

3. Верхняя половина полосы ($-\infty \leq x \leq +\infty, -c \leq y \leq 0$) отображается на правый квадрант D_1 полу плоскости, нижняя половина ($-\infty \leq x \leq +\infty, -2c \leq y \leq -c$) – на левый квадрант D_2 .

4. Обратив формулу (3.1), будем иметь $\zeta = e^{z\pi/2c} = e^{(x\pi+iy\pi)/2c}$. Считая в показателе функции $y = 0$ и $y = -2c$, приходим к выводу, что кромки полосы L_1 ($-\infty < x < +\infty, y = 0$) и L_2 ($-\infty < x < +\infty, y = -2c$) переходят соответственно в положительную $\eta > 0$ и отрицательную $\eta < 0$ части границы η полу плоскости. Точки приложения сосредоточенных сил определяются координатами $\eta_1 = +1, \eta_{-1} = -1$.

Трансформация двух параллельных краев полосы S в прямолинейную границу полу плоскости ζ связана, во-первых, с уменьшением их длин и, во-вторых, с поворотом кромки L_2 на угол $\theta = -\pi$. При этом, заметим, направление силы P в точке η_{-1} оказывается противоположным тому, которое было на L_2 в точке $t = (0, -i2c)$.

Введем обозначения $\Phi(\zeta) = \Phi(\omega(\zeta)), \Psi_1(\zeta) = \Psi_1(\omega(\zeta))$. Учитывая формулы (3.2) и содержащее пп. 1–4, запишем уравнение (2.3) в терминах комплексной переменной ζ :

$$\sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{\rho\theta} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \left[\frac{4c}{\pi} \ln \rho \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \Psi_1(\zeta) \right] e^{2i\theta}.$$

Устремив в этом равенстве $\theta \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow -\pi$, зададим условия на границе нижней полу плоскости:

– для $\eta > 0$

$$\Phi(\eta) + \overline{\Phi(\eta)} + \frac{4c}{\pi} \ln \eta \frac{\Phi'(\eta)}{\omega'(\eta)} + \Psi_1(\eta) = P [-\delta(\omega(\eta)) + \delta(\omega(\eta) + i2c)];$$

– при $\eta < 0$

$$\Phi(\eta) + \overline{\Phi(\eta)} + \frac{4c}{\pi} [\ln |\eta|] \frac{\Phi'(\eta)}{\omega'(\eta)} + \Psi_1(\eta) = P [-\delta(\omega(\eta)) + \delta(\omega(\eta) + i2c)].$$

Отсюда, используя свойство дельта-функции [6, с. 186]

$$\delta(f(\eta)) = \delta(\eta - \eta_0) / |f'(\eta_0)|, \quad \text{где } \eta_0 \text{ – корень } f(\eta),$$

окончательно устанавливаем:

— в случае $\eta > 0$

$$\Phi(\eta) + \overline{\Phi(\eta)} + \frac{4c}{\pi} \ln \eta \frac{\Phi'(\eta)}{\omega'(\eta)} + \Psi_1(\eta) = P \frac{\pi}{2c} [-\delta(\eta - 1) + \delta(\eta + 1)];$$

— в случае $\eta < 0$

$$\Phi(\eta) + \overline{\Phi(\eta)} + \frac{4c}{\pi} [\ln \eta + i\pi] \frac{\Phi'(\eta)}{\omega'(\eta)} + \Psi_1(\eta) = P \frac{\pi}{2c} [-\delta(\eta - 1) + \delta(\eta + 1)].$$

Оба соотношения будут удовлетворены, если

$$\Phi(\eta) + \overline{\Phi(\eta)} = P \frac{\pi}{2c} [-\delta(\eta - 1) + \delta(\eta + 1)]. \quad (3.3)$$

$$\Psi_1(\eta) = -\frac{4c}{\pi} \ln \eta \frac{\Phi'(\eta)}{\omega'(\eta)} \quad (\eta > 0); \quad \Psi_1(\eta) = -\frac{4c}{\pi} [\ln \eta + i\pi] \frac{\Phi'(\eta)}{\omega'(\eta)} \quad (\eta < 0). \quad (3.4)$$

Поскольку главный вектор сил на границе полуплоскости конечен, то $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \Phi(\zeta) = 0$, что в свою очередь предопределяет условие регулярности $\Phi(\zeta)$ в виде [7, с. 272]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\Phi(\eta)}}{\eta - \zeta} d\eta = 0.$$

Внеся под интеграл значение $\overline{\Phi(\eta)}$ из равенства (3.3), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \zeta} d\eta = \frac{P}{4ci} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{-\delta(\eta - 1) + \delta(\eta + 1)}{\eta - \zeta} d\eta.$$

Отсюда

$$\Phi(\zeta) = -\frac{P}{i2c(1 - \zeta^2)},$$

но, согласно (3.1), переменная ζ равна $e^{z\pi/2c}$, стало быть

$$\Phi_B(z) = -\Phi_H(z) = i \frac{P}{2c} \frac{1}{(1 - e^{z\pi/c})}, \quad (3.5)$$

где $\Phi_B(z)$ и $\Phi_H(z)$ — значения функции $\Phi(z)$ в верхней ($-c \leq y \leq 0$) и нижней ($-2c \leq y \leq -c$) половинах полосы.

Чтобы отыскать функцию $\Psi_1(\zeta)$, умножим равенства (3.4) на дробь

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d\eta}{(\eta - \zeta)}$$

и затем проинтегрируем по η от $+\infty$ до $-\infty$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\Psi_1(\eta)}{\eta - \zeta} d\eta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{f(\eta)\Phi'(\eta)}{\omega'(\eta)(\eta - \zeta)} d\eta, \quad (3.6)$$

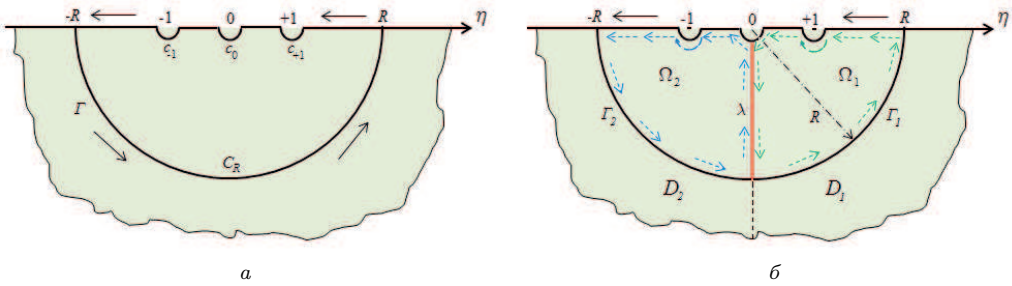


Рис. 3. Контур Γ (а); контуры Γ_1 и Γ_2 (б).

понимая несобственные интегралы в смысле главного значения по Коши [8, с. 111].
Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_1(\eta)}{\eta - \zeta} d\eta = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{+R}^{1+r} \frac{\Psi_1(\eta) d\eta}{\eta - \zeta} + \int_{1-r}^r \frac{\Psi_1(\eta) d\eta}{\eta - \zeta} + \int_{-r}^{-1+r} \frac{\Psi_1(\eta) d\eta}{\eta - \zeta} + \int_{-1-r}^{-R} \frac{\Psi_1(\eta) d\eta}{\eta - \zeta} \right] \right\}, \quad (3.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta)\Phi'(\eta) d\eta}{\omega'(\eta)(\eta - \zeta)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{+R}^{1+r} \frac{f(\eta)\Phi'(\eta) d\eta}{\omega'(\eta)(\eta - \zeta)} + \int_{1-r}^r \frac{f(\eta)\Phi'(\eta) d\eta}{\omega'(\eta)(\eta - \zeta)} + \int_{-r}^{-1+r} \frac{f(\eta)\Phi'(\eta) d\eta}{\omega'(\eta)(\eta - \zeta)} + \int_{-1-r}^{-R} \frac{f(\eta)\Phi'(\eta) d\eta}{\omega'(\eta)(\eta - \zeta)} \right] \right\}, \quad (3.8)$$

где, в соответствии с (3.4), введено обозначение

$$f(\eta) = \left[\begin{array}{l} (4c/\pi) \ln \eta, \quad \eta > 0 \\ (4c/\pi)(\ln \eta + i\pi), \quad \eta < 0 \end{array} \right].$$

Для вычисления интегралов (3.7) и (3.8) рассмотрим вспомогательный контур Γ , образованный из следующих элементов (рис. 3, а):

- нижней полуокружности C_R радиуса $R \gg 1$ с центром в точке $\eta_0 = 0$;
- трех нижних полуокружностей c_1, c_0, c_{-1} одинакового радиуса $r \ll 1$ с центрами в точках $\eta_1 = +1, \eta_0 = 0, \eta_{-1} = -1$;
- четырех отрезков вещественной оси $[1+r, R], [r, 1-r], [-1+r, -r], [-R, -1-r]$.

Проведем внутри Γ прямолинейный разрез λ , соединяющий нижние точки полуокружностей C_R и c_0 . В результате получим две смежные области Ω_1 и Ω_2 , границы которых Γ_1 и Γ_2 включают в себя линию λ (рис. 3, б).

Видоизменим теперь уравнение (3.6) следующим образом:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\Psi_1(s)}{s - \zeta} ds \right] \right\} = - \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{f(s)\Phi'(s)}{\omega'(s)(s - \zeta)} ds \right] \right\}, \quad (3.9)$$

здесь и ниже s – аффикс линий Γ_1 и Γ_2 .

По интегральной формуле Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\Psi_1(s)}{s-\zeta} ds = \begin{cases} \Psi_1(\zeta), & \zeta \in \Omega_1 \\ 0, & \zeta \in \Omega_2 \end{cases}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\Psi_1(s)}{s-\zeta} ds = \begin{cases} 0, & \zeta \in \Omega_1 \\ \Psi_1(\zeta), & \zeta \in \Omega_2 \end{cases}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \frac{\Psi_1(s)}{s-\zeta} ds = \begin{cases} \Psi_1(\zeta), & \zeta \in \Omega_1 \\ \Psi_1(\zeta), & \zeta \in \Omega_2 \end{cases}. \quad (3.10)$$

Аналогично можем записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(s)\Phi'(s)}{\omega'(s)(s-\zeta)} ds &= \begin{cases} \frac{f(\zeta)\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{4c \ln \zeta}{\pi} \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, & \zeta \in \Omega_1 \\ 0, & \zeta \in \Omega_2 \end{cases}, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(s)\Phi'(s)}{\omega'(s)(s-\zeta)} ds &= \begin{cases} 0, & \zeta \in \Omega_1 \\ \frac{f(\zeta)\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{4c(\ln \zeta + i\pi)}{\pi} \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, & \zeta \in \Omega_2 \end{cases}; \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2+\Gamma_2} \frac{f(s)\Phi'(s)}{\omega'(s)(s-\zeta)} ds &= \begin{cases} \frac{4c \ln \zeta}{\pi} \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, & \zeta \in \Omega_1 \\ \frac{4c(\ln \zeta + i\pi)}{\pi} \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, & \zeta \in \Omega_2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Интегрирование по сумме контуров $\Gamma_1 + \Gamma_2$ эквивалентно интегрированию по контуру Γ (рис. 3, а) и дважды по разрезу λ , причем в противоположных направлениях (рис. 3, б). Так как подынтегральные функции в последних интегралах одинаковы, интегралы по λ взаимно сокращаются. Поэтому выражения (3.10) и (3.11) могут быть представлены в таком окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Psi_1(s)}{s-\zeta} ds &= \begin{cases} \Psi_1(\zeta), & \zeta \in \Omega_1 \\ \Psi_1(\zeta), & \zeta \in \Omega_2 \end{cases}, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)\Phi'(s)}{\omega'(s)(s-\zeta)} ds &= \begin{cases} \frac{4c \ln \zeta}{\pi} \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, & \zeta \in \Omega_1 \\ \frac{4c(\ln \zeta + i\pi)}{\pi} \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, & \zeta \in \Omega_2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Сказанное выше относится к контуру Γ , в котором радиусы полуокружностей C_R , c_1 , c_0 , c_{-1} конечны, однако только в том случае, когда $R \rightarrow \infty$ интеграл по полуокружности C_R стремится к нулю. Интегралы по полуокружностям c_1 , c_0 , c_{-1} радиусов r также стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$. Наконец, $\lim_{R \rightarrow \infty} (\lim_{r \rightarrow 0} \Omega_1) \rightarrow D_1$, $\lim_{R \rightarrow \infty} (\lim_{r \rightarrow 0} \Omega_2) \rightarrow D_2$ (рис. 3, б). Как видим, равенство (3.9) в пределе обращается в уравнение (3.6), что позволяет записать решение последнего так:

$$\Psi_1(\zeta) = \begin{cases} -\frac{4c \ln \zeta}{\pi} \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, & \zeta \in D_1 \\ -\frac{4c(\ln \zeta + i\pi)}{\pi} \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, & \zeta \in D_2 \end{cases}.$$

Отсюда, следуя (3.1), получаем

$$\Psi_1(z) = \begin{cases} -2z\Phi'_B(z), & -c \leq \text{Im}z \leq 0 \\ -2(z+2ci)\Phi'_H(z), & -2c \leq \text{Im}z \leq -c \end{cases}. \quad (3.12)$$

Подставив выражения (3.12) в равенства (2.2), устанавливаем следующее:

$$\begin{aligned}
 & (-c \leq \operatorname{Im} z \leq 0) & & (-2c \leq \operatorname{Im} z \leq -c) \\
 \sigma_{xx} &= 2\operatorname{Re}\Phi_B(z) - 2y\operatorname{Im}\Phi'_B(z), & & \sigma_{xx} = 2\operatorname{Re}\Phi_H(z) - 2(y+2c)\operatorname{Im}\Phi'_H(z), \\
 \sigma_{yy} &= 2\operatorname{Re}\Phi_B(z) + 2y\operatorname{Im}\Phi'_B(z), & (3.13) & \sigma_{yy} = 2\operatorname{Re}\Phi_H(z) + 2(y+2c)\operatorname{Im}\Phi'_H(z), & (3.14) \\
 \sigma_{xy} &= -2y\operatorname{Re}\Phi'_B(z); & & \sigma_{xy} = -2(y+2c)\operatorname{Re}\Phi'_H(z).
 \end{aligned}$$

Зарубежные авторы обычно называют зависимости (3.13) «формулами Вестергарда» (см. [9, 10] и др.). На самом деле, равенства (3.13) и, кстати сказать, (3.14) являются всего лишь частным случаем соотношений (2.2), упрощенных с учетом взаимосвязи функций Г. В. Колосова (3.12).

Внеся в уравнения (3.13) и (3.14) функцию (3.5), после соответствующих выкладок и преобразований имеем

$$\begin{aligned}
 & \underline{(-\infty < \tilde{x} < +\infty, -1 \leq \tilde{y} \leq 0)} \\
 \frac{\pi c \sigma_{xx}}{2P} &= \frac{\pi^2}{2} \left[-\frac{1}{\pi} \frac{e^{\tilde{x}\pi} \sin(\tilde{y}\pi)}{(1 - 2e^{\tilde{x}\pi} \cos(\tilde{y}\pi) + e^{2\tilde{x}\pi})} - \tilde{y} \frac{(e^{\tilde{x}\pi} + e^{3\tilde{x}\pi}) \cos(\tilde{y}\pi) - 2e^{2\tilde{x}\pi}}{(1 - 2e^{\tilde{x}\pi} \cos(\tilde{y}\pi) + e^{2\tilde{x}\pi})^2} \right], \\
 \frac{\pi c \sigma_{yy}}{2P} &= \frac{\pi^2}{2} \left[-\frac{1}{\pi} \frac{e^{\tilde{x}\pi} \sin(\tilde{y}\pi)}{(1 - 2e^{\tilde{x}\pi} \cos(\tilde{y}\pi) + e^{2\tilde{x}\pi})} + \tilde{y} \frac{(e^{\tilde{x}\pi} + e^{3\tilde{x}\pi}) \cos(\tilde{y}\pi) - 2e^{2\tilde{x}\pi}}{(1 - 2e^{\tilde{x}\pi} \cos(\tilde{y}\pi) + e^{2\tilde{x}\pi})^2} \right], & (3.15) \\
 \frac{\pi c \sigma_{xy}}{2P} &= \frac{\tilde{y}\pi^2}{2} \frac{(e^{\tilde{x}\pi} - e^{3\tilde{x}\pi}) \sin(\tilde{y}\pi)}{(1 - 2e^{\tilde{x}\pi} \cos \tilde{y}\pi + e^{2\tilde{x}\pi})^2}, \quad \text{здесь и ниже } \tilde{y} = \frac{y}{c}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{c}, \\
 & \underline{(-\infty < \tilde{x} < +\infty, -2 \leq \tilde{y} \leq -1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi c \sigma_{xx}}{2P} &= \frac{\pi^2}{2} \left[\frac{1}{\pi} \frac{e^{\tilde{x}\pi} \sin(\tilde{y}\pi)}{(1 - 2e^{\tilde{x}\pi} \cos(\tilde{y}\pi) + e^{2\tilde{x}\pi})} + (\tilde{y} + 2) \frac{(e^{\tilde{x}\pi} + e^{3\tilde{x}\pi}) \cos(\tilde{y}\pi) - 2e^{2\tilde{x}\pi}}{(1 - 2e^{\tilde{x}\pi} \cos(\tilde{y}\pi) + e^{2\tilde{x}\pi})^2} \right], \\
 \frac{\pi c \sigma_{yy}}{2P} &= \frac{\pi^2}{2} \left[\frac{1}{\pi} \frac{e^{\tilde{x}\pi} \sin(\tilde{y}\pi)}{(1 - 2e^{\tilde{x}\pi} \cos(\tilde{y}\pi) + e^{2\tilde{x}\pi})} - (\tilde{y} + 2) \frac{(e^{\tilde{x}\pi} + e^{3\tilde{x}\pi}) \cos(\tilde{y}\pi) - 2e^{2\tilde{x}\pi}}{(1 - 2e^{\tilde{x}\pi} \cos(\tilde{y}\pi) + e^{2\tilde{x}\pi})^2} \right], & (3.16) \\
 \frac{\pi c \sigma_{xy}}{2P} &= -\frac{(\tilde{y} + 2)\pi^2}{2} \frac{(e^{\tilde{x}\pi} - e^{3\tilde{x}\pi}) \sin \tilde{y}\pi}{(1 - 2e^{\tilde{x}\pi} \cos \tilde{y}\pi + e^{2\tilde{x}\pi})^2}.
 \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, найденные по формулам (3.15) и (3.16) нормальные напряжения оказываются симметричными функциями относительно срединной линии полосы, тогда как касательные, наоборот, антисимметричными. Графики этих функций приведены на рис. 4–6.

Полагая в зависимостях (3.15) параметр $c \rightarrow \infty$, разложим тригонометрические и показательные функции в степенные ряды (с точностью до малых второго порядка). В результате получим формулы для напряжений в упругой полуплоскости, нагруженной на границе сосредоточенной силой (задача Фламана):

$$\sigma_{xx} = \frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{2P}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{xy} = \frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

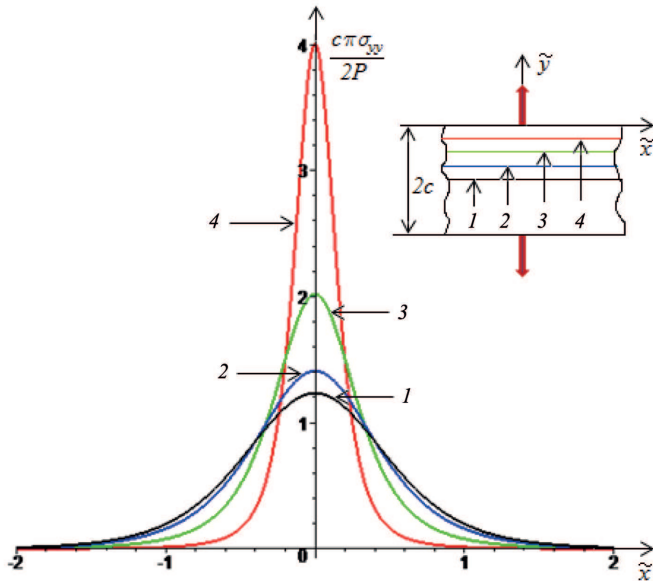


Рис. 4. Распределение функции $\pi c \sigma_{yy} / 2P$ на линиях $\tilde{y} = y/c = \text{const}$. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $\tilde{y} = -1, -0.75, -0.50, -0.25$.

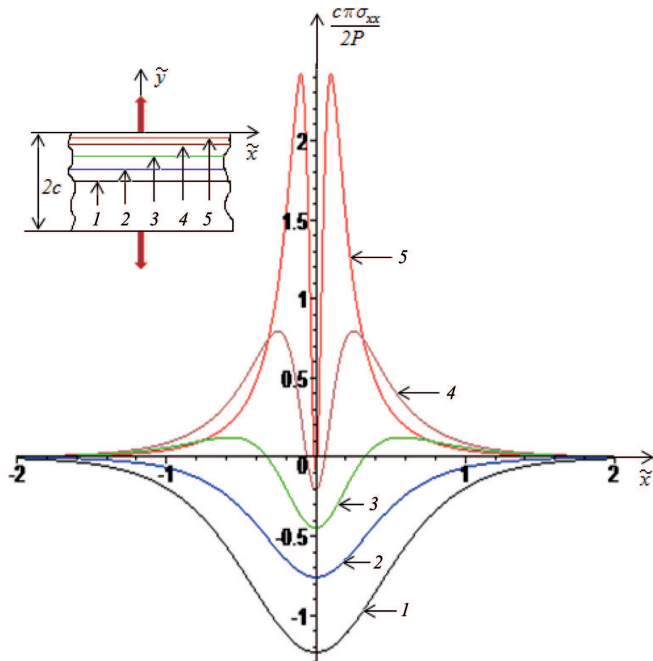


Рис. 5. Графики функций $\pi c \sigma_{xx} / 2P$ на линиях $\tilde{y} = y/c = \text{const}$. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 отвечают значениям $\tilde{y} = -1, -0.75, -0.50, -0.25, -0.10$.

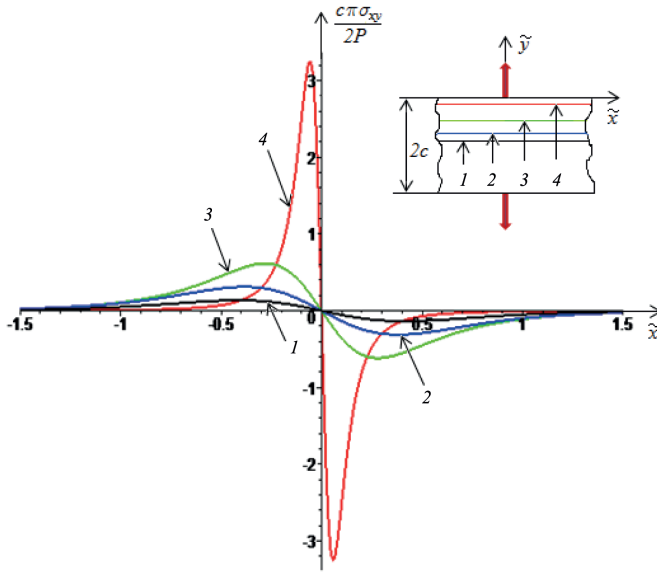


Рис. 6. Функции $\pi c \sigma_{xy} / 2P$ на линиях $\tilde{y} = y/c = \text{const}$. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $\tilde{y} = -0.90, -0.75, -0.50, -0.10$.

Приняв в (3.15) или (3.16) переменную $\tilde{y} = -1$, находим напряжения σ_{yy} на оси рассматриваемой полосы:

$$\frac{\pi c \sigma_{yy}}{2P} = \frac{\pi^2}{2} \frac{e^{\tilde{x}\pi}}{(1 + e^{\tilde{x}\pi})^2}. \quad (3.17)$$

Уместно отметить, что в работе [11] эти напряжения вычисляются посредством интеграла

$$\frac{\pi c \sigma_{yy}}{2P} = \int_0^{\infty} \frac{\text{sh} u + u \text{ch} u}{\text{sh} 2u + 2u} \cos u \tilde{x} du. \quad (3.18)$$

В приведенной ниже таблице представлены величины функций (3.18) и (3.17).

Значения функции $\pi c \sigma_{yy} / 2P$							
$\pi c \sigma_{yy} / 2P$ (3.18)	\tilde{x}	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
Данные статьи [11]		1.4444	0.7412	0.1125	-0.0300	-0.0252	-0.0036
(3.17)		1.2337	0.6692	0.1709	0.0349	0.0068	0.0002

Функция $\Phi(z)$, определяемая формулой (3.5), является периодической с мнимым основным периодом $2ci$. Учитывая данное обстоятельство, покажем, что компоненты напряжений, заданные выражениями (3.13), (3.14), удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия внутри полосы

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

и граничным условиям (2.4) на ее кромках.

Действительно, переходя к переменным $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, запишем предыдущие уравнения в виде равенства [12]:

$$\frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial z} - \frac{\partial(\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy})}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Подстановка в него вместо компонент напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} соответствующих выражений из формул (3.13) и (3.14) приводит к тождеству $0 \equiv 0$.

Граничные условия (2.4) на верхней ($y = 0$) и нижней ($y = -2c$) кромках полосы также выполняются, это легко усматривается из (3.15) и (3.16).

Что касается уравнения неразрывности

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \quad \text{где} \quad \Delta() = \frac{\partial^2()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2()}{\partial y^2},$$

то оно заведомо выполняется, поскольку согласно (2.1) имеем $\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 4\text{Re}\Phi(z) = 0$, ибо $\text{Re}\Phi(z) = u(x, y)$ — гармоническая функция.

В заключение отметим, что статьи автора [13, 14] являются, образно говоря, промежуточными ступенями данной работы.

Приношу глубокую благодарность моим ученицам Д. А. Морщениной и А. А. Морщениной за помощь в работе.

Литература

1. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 672 с.
2. Папкович П. Ф. Теория упругости. Л.; М.: Оборонгиз, 1939. 639 с.
3. Белоносов С. М. Плоская задача теории упругости для бесконечной полосы при заданных на границе напряжениях или смещениях // ДАН СССР. 1960. Т. 131, №6. С. 1291–1293.
4. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 711 с.
5. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. Л.; М., 1935. 215 с.
6. Зельдович Я. Б., Мышкис Ф. Д. Элементы прикладной математики. 1972. М.: Наука, 592 с.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
8. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, часть вторая. М.: Наука, 1969. 672 с.
9. Westergaard Y. M. Bearing pressures and cracks // Journal Applied Mechanics. 1939. Vol. 6, N 2. P. 49–53.
10. Eftis J., Liebowitz H. On the Modified Westergaard Equations for Certain Plane Problems // International Journal of Fracture Mechanics. 1972. Vol. 8, N 4. P. 383–392.
11. Filon L. N. G. On approximate solution for the bending of beam of rectangular cross-section under any system of load, with special reference to points of concentrated or discontinuous loading // Philosophical Transaction of the Royal Society of London Series A. 1903. Vol. 201, N 334. P. 65–154.
12. Даль Ю. М. О формулах Г. В. Колосова в плоской задаче теории упругости при наличии периодических разрезов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Т. 1 (59). Вып. 2. С. 228–236.
13. Даль Ю. М. Плоская задача теории упругости для полосы, сжатой на границе взаимно противоположными силами // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2001. Вып. 1, № 1. С. 73–78.
14. Даль Ю. М. Упругая полоса, нагруженная на границе двумя сосредоточенными силами // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сб. статей к 75-летию Е. И. Шемякина / под ред. Д. Д. Ивлева и Н. Ф. Морозова. М.: Физматлит, 2006. С. 243–248.

Статья поступила в редакцию 12 апреля 2018 г.;
после доработки 3 сентября 2018 г.;
рекомендована в печать 27 сентября 2018 г.

Контактная информация:

Даль Юрий Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; ymdahl@yandex.ru

About stresses in elastic stripe under normal forces on longitudinal borders

Yu. M. Dahl

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Dahl Yu. M. About stresses in elastic stripe under normal forces on longitudinal borders. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 2, pp. 318–328. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.214> (In Russian)

The problem of stresses in the flat stripe S with constant wide $2c$ which borders loaded concentrated forces was analyzed. The analytical solution of this problem was founded in the terms of the function of complex variable. The stresses in arbitrary point of the strip determined by means of two regular functions $\Phi(z)$ and $\Psi_1(z)$. These functions are founded by the use of conform reflection of the region S on the lower half plane ζ . The problem of this half plane solved analytical (method Cauchy's integrals). The exact mathematical expressions of the functions $\Phi(z)$ and $\Psi_1(z)$ are obtained. The inversely conform reflection reduce to known quantity $\Phi(z)$ and $\Psi_1(z)$. The function $\Psi_1(z)$ is coupled with $\Phi'(z)$, and so stresses are defined by means of $\Phi(z)$ and its derivative $\Phi'(z)$. The graphics of the normal and tangent stresses on the lines parallel strip's borders are produced. The comparison of stresses on the axis of strip and Filon's data were investigated. The solutions satisfy differential equations of equilibrium, border's conditions and the equation of continuous.

Keywords: plane problem of the theory of elasticity, infinite stripe, complex variable, Kolosov's formulas.

References

1. Timoshenko S. P., Goodier J. N., *Theory of elasticity* (Nauka, Moscow, 1979). (In Russian)
2. Papkovich P. F., *Theory of elasticity* (Oborongiz, Leningrad, Moscow, 1939). (In Russian)
3. Belonovos S. M., "The plane problem theory of elasticity for infinity band under any stresses or displacements on their borders", *DAN SSSR*, **131**(6), 1291–1293 (1960). (In Russian)
4. Rabotnov Yu. N., *Mechanics of deformed solids* (Nauka, Moscow, 1988). (In Russian)
5. Kolosov G. V., *Application of complex variable to theory of elasticity* (Leningrad, Moscow, 1935). (In Russian)
6. Zeldovich Ya. B., Mishkis F. D., *The elements of applied mathematics* (Nauka, Moscow, 1979). (In Russian)
7. Muschelishvili N. I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity* (Nauka, Moscow, 1979). (In Russian)
8. Smirnov V. V., *Course of higher mathematics. III*, part two (Nauka, Moscow, 1969). (In Russian)
9. Westergaard Y. M., "Bearing pressures and cracks", *J. Appl. Mech.* **6**(2), 49–53 (1939).
10. Eftis J., Liebowitz H., "On the Modified Westergaard Equations for Certain Plane Problems" *Intern. J. Fract. Mech.* **8**(4), 383–392 (1972).
11. Filon L. N. G., "On approximate solution for the bending of beam of rectangular gross-section under any system of load, with special reference to points of concentrated or discontinuous loading" *Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A* **201**(334), 65–154 (1903).
12. Dahl Yu. M., "About Kolosov's formulas in plane problem of the theory of elasticity in the presence of periodical cuts", *Vestnik St. Petersburg Univ. Ser.1* **1**(59), issue 2, 228–236 (2014). (In Russian)
13. Dahl Yu. M., "Plane problem the theory of elasticity for band under two forces on their borders", *Vestnik St. Petersburg Univ. Ser. 1*, issue 1, 73–78 (2001). (In Russian)
14. Dahl Yu. M., "The elastic plane under two forces on their borders", *The problems of the mechanics of solids and mining rocks* (eds. D. D. Ivlev, N. F. Morosov, Fizmatlit, Moscow, 2006, 243–248). (In Russian)

Received: April 12, 2018

Revised: September 3, 2018

Accepted: September 27, 2018

Author's information:

Yuriy M. Dahl — ymdahl@yandex.ru