

О стабилизации тройного перевернутого маятника с помощью вибрации точки опоры произвольной частоты

И. М. Архипова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Архипова И. М.* О стабилизации тройного перевернутого маятника с помощью вибрации точки опоры произвольной частоты // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 2. С. 281–287. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.210>

В работе рассмотрена возможность стабилизации верхнего неустойчивого положения тройного перевернутого маятника с помощью вибрации точки подвеса. Приводятся результаты исследования, полученные с помощью метода многих масштабов, а также численные результаты согласно теории Флоке. Построены амплитудно-частотные диаграммы для параметров вибрации и показано, что стабилизация возможна при низких, средних и высоких частотах возбуждения. Проанализировано влияние параметров системы на зоны стабилизации верхнего неустойчивого положения маятника.

Ключевые слова: вибрационная стабилизация, тройной маятник.

1. Введение. Изучению стабилизации статически неустойчивых систем уделяется большое внимание. Однако в большинстве работ рассматривается высокочастотная стабилизация. Еще в 1908 г. А. Стефенсон показал, что одно-, двух- и трехзвенный маятники в своем верхнем положении могут быть стабилизированы с помощью вибрации точки подвеса достаточно большой частоты [1, 2]. В работе [3] с помощью анализа мультипликаторов Флоке были получены условия устойчивости статически неустойчивых систем для произвольной частоты возмущения опоры. В частности, для двойного маятника была получена нижняя граница области стабилизации. В работе [4] использование метода многих масштабов позволило получить не только нижнюю границу области стабилизации двойного перевернутого маятника, но и верхнюю. В работах [5, 6] с помощью метода многих масштабов получены условия стабилизации статически неустойчивых систем, близких к критическим, а для анализа полученных теоретических результатов в качестве численного примера рассмотрена стабилизация тройного перевернутого маятника с равными массами. В данной работе рассматривается вибрационная стабилизация верхнего положения тройного перевернутого маятника более детально. Приведены результаты для маятника с неравными массами.

2. Постановка задачи. Рассмотрим перевернутый тройной маятник (рис. 1), состоящий из трех сосредоточенных масс m_1 , m_2 и m_3 , соединенных жесткими безмассовыми стержнями равной длины l с шарнирами жесткости c . Основание маятника совершает вертикальные гармонические колебания $z = a \cos \Omega^* t$ с частотой Ω^* и амплитудой $a \ll l$.

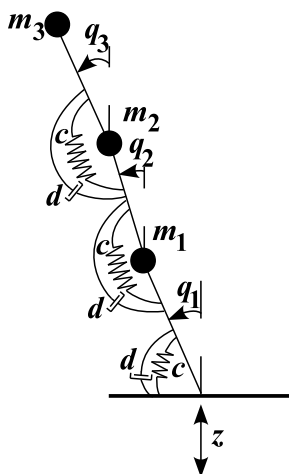


Рис. 1. Перевернутый тройной маятник с периодическим возмущением основания.

Учитывая линейные силы вязкого трения в шарнирах, определяемые диссипативной функцией

$$F = \frac{1}{2}d (\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_3 - \dot{q}_2)^2), \quad (1)$$

и используя уравнения Лагранжа II рода, линейную систему уравнений движения около неустойчивого положения равновесия $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ в безразмерной форме можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \gamma\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}(p) + \delta\Omega^2 \cos \Omega t \mathbf{B}) \mathbf{q} = 0, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 + \eta_1 + \eta_2 & 1 + \eta_2 & 1 \\ & 1 + \eta_2 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 + \eta_1 + \eta_2 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 + \eta_2 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2p - 1 - \eta_1 - \eta_2 & p & 0 \\ p & -2p - 1 - \eta_2 & p \\ 0 & p & -p - 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \sqrt{g/l}t$, g — ускорение свободного падения, а безразмерные параметры имеют следующий смысл:

$$\delta = \frac{a}{l}, \quad p = -\frac{c}{m_3gl}, \quad \Omega = \Omega^* \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \eta_1 = \frac{m_1}{m_3}, \quad \eta_2 = \frac{m_2}{m_3}, \quad \gamma = \frac{d}{m_3l^2} \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4)$$

Определим критический параметр отрицательной жесткости p_0 таким образом, чтобы автономная консервативная система ($\delta = \gamma = 0$) была устойчива при $p < p_0$ и неустойчива при $p > p_0$. Система будет устойчива тогда и только тогда, когда матрица \mathbf{C} будет положительно определена. Согласно критерию Сильвестра получим

систему из трех неравенств:

$$-2p - 1 - \eta_1 - \eta_2 > 0, \quad \begin{vmatrix} -2p - 1 - \eta_1 - \eta_2 & p \\ p & -2p - 1 - \eta_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \det \mathbf{C} > 0. \quad (5)$$

Анализ значений параметра p , обращающих выписанные неравенства в равенства, показывает, что параметр p_0 будет равен наименьшему корню кубического уравнения $\det \mathbf{C} = 0$.

Полагая $p = p_0 + \Delta p$, где Δp — малое положительное число ($\Delta p > 0$), запишем матрицу \mathbf{C} в виде $\mathbf{C}(p) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \Delta p$, где

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}(p_0), \quad \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

При $p = p_0$ найдем собственные частоты ($\omega_1 = 0, \omega_2, \omega_3$) и моды колебаний ($\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$), удовлетворяющие условиям нормировки $\mathbf{U}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{U} = \text{diag}(0, \omega_2^2, \omega_3^2)$ и $\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{I}$, где $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ — матрица, составленная из собственных векторов системы, и \mathbf{I} — единичная матрица.

3. Методы исследования. Метод многих масштабов (МММ) [7] позволяет получить условия стабилизации верхнего неустойчивого положения маятника. Поскольку коэффициенты Δp , δ и γ малы, вводится малое положительное число ε и производится масштабирование $\Delta p \rightarrow \varepsilon^2 \Delta p$, $\delta \rightarrow \varepsilon \delta$, $\gamma \rightarrow \varepsilon \gamma$. Аналитические условия вибронной стабилизации статически неустойчивых систем с конечным числом степеней свободы, описываемых уравнениями (2), были получены в предыдущих совместных работах автора [5, 6]. Анализ системы в случае отсутствия каких-либо резонансов между частотой вибрации Ω и собственными частотами ω_2 и ω_3 позволяет аналитически определить нижнюю границу области стабилизации на плоскости параметров (Ω, δ) , а исследование системы вблизи резонансов $\Omega = \omega_2, \omega_3, 2\omega_2, 2\omega_3, \omega_2 + \omega_3, \omega_2/2, \omega_3/2$ — верхнюю границу области. Причем при исследовании случаев $\Omega = \omega_2, \omega_3$ используется нестандартная версия метода возмущений с разложением по дробным степеням малого параметра ε , в то время как во всех остальных случаях используется стандартный метод многих масштабов с разложением по целым степеням ε .

Области стабилизации могут быть найдены численно с помощью метода Флоке [8]. Для системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (2) строится фундаментальная матрица $\mathbf{X}(t)$, удовлетворяющая начальным условиям $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$. Далее для каждой пары параметров (Ω, δ) матрицы монодромии $F = \mathbf{X}(2\pi/\Omega)$ вычисляются характеристические числа (мультипликаторы) ρ и проверяется условие $|\rho| < 1$.

4. Результаты исследования. Рассмотрим перевернутый тройной маятник с параметрами $\eta_1 = \eta_2 = 1/2$. В этом случае $p_0 = -6.54$, и система имеет собственные частоты $\omega_2 = 4.35$, $\omega_3 = 10.89$. На рис. 2 в плоскости параметров (Ω, δ) показаны области стабилизации неустойчивого верхнего положения маятника, когда $\Delta p = 0.1$ и $\gamma = 0.01$. Черные линии соответствуют нижней границе области стабилизации и верхней границе области вблизи резонансов $\Omega = 2\omega_2, \omega_2 + \omega_3, 2\omega_3$, полученным с помощью МММ, а серые области — областям стабилизации, вычисленным численно с помощью метода Флоке. На рис. 3 показаны области стабилизации вблизи резонансов $\Omega = \omega_3/2$ (рис. 3, а), $\Omega = \omega_2$ (рис. 3, б), $\Omega = \omega_3$ (рис. 3, в), полученные с помощью

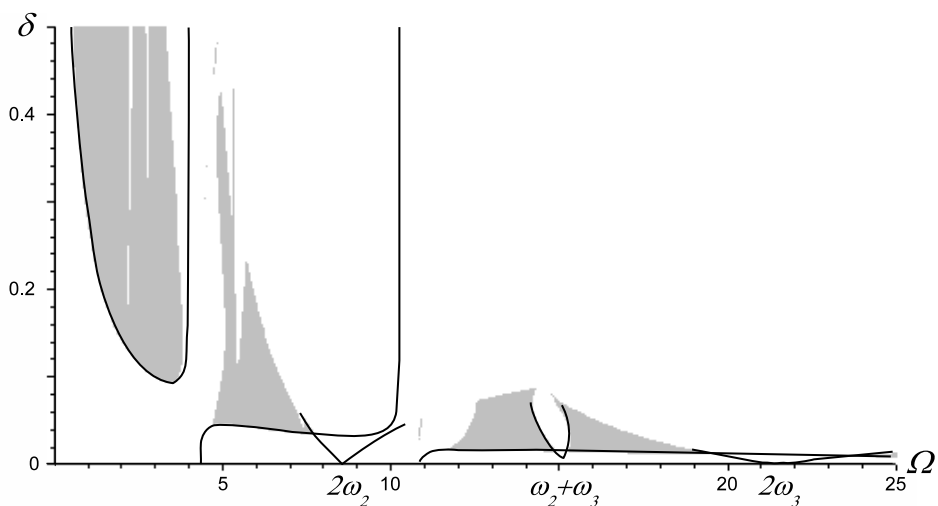


Рис. 2. Области стабилизации верхнего неустойчивого положения равновесия тройного маятника.

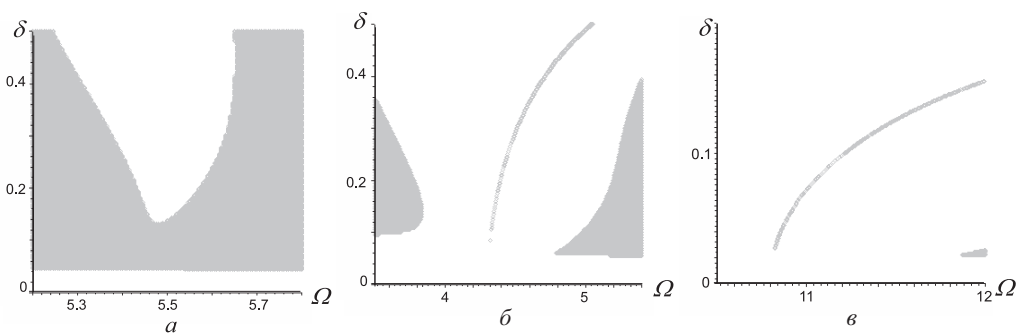


Рис. 3. Области стабилизации вблизи резонансов: а — $\Omega = \omega_3/2$, б — $\Omega = \omega_2$, в — $\Omega = \omega_3$.

МММ. Видно, что вибрационная стабилизация вне зон резонанса возможна при всех частотах возбуждения — низких, средних и высоких.

На рис. 4 показаны границы области стабилизации при разных значениях параметра Δp : черные линии соответствуют значению $\Delta p = 0.5$, красные — $\Delta p = 0.9$. С ростом Δp нижняя граница возрастает, в то время как верхняя немного сдвигается влево. Таким образом, низкочастотная стабилизация становится возможной при более высоких амплитудах δ , а средние области стабилизации значительно уменьшаются. Графики построены для случая $\gamma = 0.01$.

Подробный анализ влияния сопротивления на области стабилизации статически неустойчивых систем, близких к критическим, был проведен в работе [6]. Следует отметить некоторые моменты. Нижняя граница области не зависит от параметра сопротивления γ . В области резонансов $\Omega = 2\omega_j$ ($j = 2, 3$) с увеличением сопротивления верхние границы поднимаются, тем самым увеличивая зону стабилизации. На рис. 5 границы построены для значений параметра $\Delta p = 0.1$ и разных значений

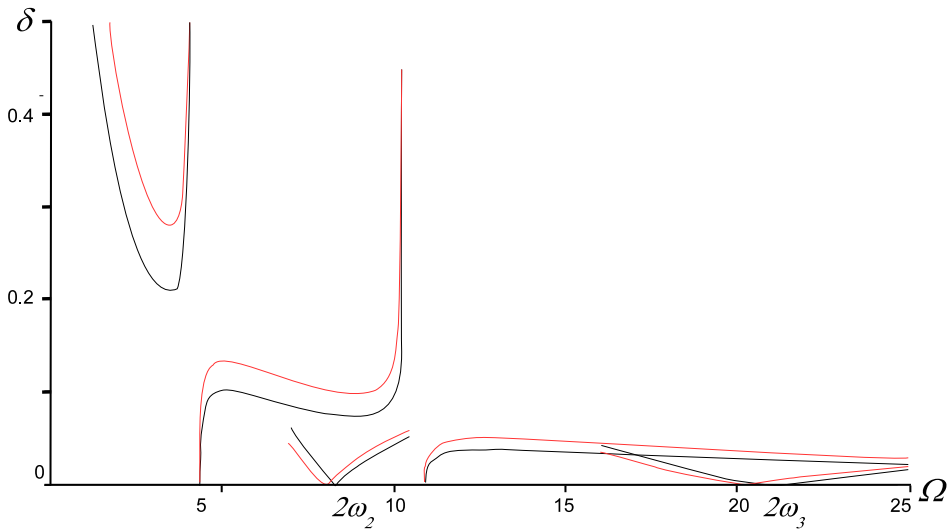


Рис. 4. Границы стабилизации при различных значениях Δp .

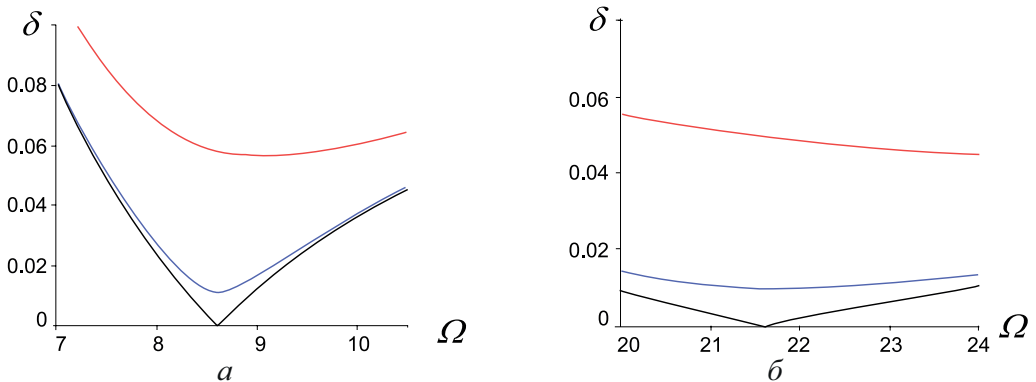


Рис. 5. Верхняя граница области стабилизации вблизи резонансов: $a - \Omega = 2\omega_2$, $b - \Omega = 2\omega_3$.

коэффициента сопротивления: значению $\gamma = 0$ соответствует кривая черного цвета, $\gamma = 0.1$ — синего и $\gamma = 0.5$ — красного.

В окрестности остальных резонансов зона стабилизации тройного маятника без сопротивления ($\gamma = 0$) уменьшается при введении малого сопротивления — наблюдается эффект дестабилизации. Дальнейшее увеличение параметра γ ведет к увеличению зоны стабилизации. На рис. 6 данный эффект продемонстрирован в окрестности комбинационного резонанса $\Omega = \omega_2 + \omega_3$ (графики построены при $\Delta p = 0.1$).

5. Заключение. Верхнее неустойчивое положение тройного маятника может быть стабилизировано с помощью вибрации точки подвеса. Вне зон резонанса стабилизация возможна при любых частотах возбуждения — низких, средних и высоких. С ростом отклонения параметров системы от критического параметра p_0 , определяющего границу устойчивости консервативной системы ($\delta = \gamma = 0$), нижняя граница области стабилизации поднимается, низкочастотная стабилизация становится

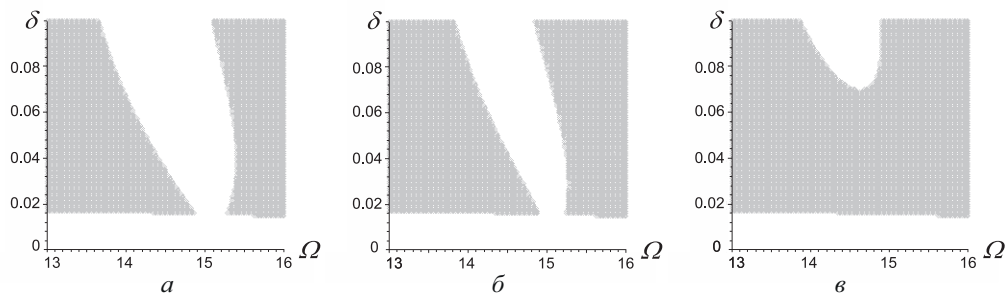


Рис. 6. Зона стабилизации вблизи резонанса $\Omega = \omega_2 + \omega_3$: $a - \gamma = 0$, $b - \gamma = 0.01$, $e - \gamma = 0.09$.

возможной при более высоких амплитудах вибрации, а средние зоны стабилизации уменьшаются. Трение оказывает двойное действие на границы зоны стабилизации. Положительный эффект наблюдается в области резонансов $\Omega = 2\omega_j$ ($j = 2, 3$), где с ростом сопротивления верхние границы области стабилизации поднимаются, увеличивая область. В окрестности резонансов $\Omega = \omega_j/2$, ω_j ($j = 2, 3$) и $\omega_2 + \omega_3$ введение малых диссипативных сил приводит к эффекту дестабилизации, когда области стабилизации уменьшаются по сравнению с системой без демпфирования. С дальнейшим ростом сопротивления зоны стабилизации увеличиваются.

Литература

1. Stephenson A. On a New Type of Dynamical Stability // Mem. Proc. Manchester Literary and Philos. Soc. 1908. Vol. 52, N 8. P. 1–10.
2. Stephenson A. On Induced Stability // Philos. Mag. 1909. Vol. 17. P. 765–766.
3. Сейранян А. П., Майлыбаев А. А. Вибрационная стабилизация статически неустойчивых систем // Доклады Академии наук. 2009. Т. 426, № 4. С. 480–486.
4. Arkhipova I. M., Luongo A., Seyranian A. P. Vibrational stabilization of the upright statically unstable position of a double pendulum // J. Sound Vib. 2012. Vol. 331. P. 457–469.
5. Arkhipova I. M., Luongo A. Stabilization via parametric excitation of multi-dof statically unstable systems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. Vol. 19. P. 3913–3926.
6. Arkhipova I. M., Luongo A. On the effect of damping on the stabilithation of mechanical systems via parametric excitation // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2016. Vol. 67, N 3. P. 69.
7. Nayfeh A. H. Perturbation Methods. New York: Wiley, 1973.
8. Меркин Д. П. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.

Статья поступила в редакцию 10 ноября 2018 г.;
 после доработки 17 декабря 2018 г.;
 рекомендована в печать 20 декабря 2018 г.

Контактная информация:

Архипова Инга Михайловна — канд. физ.-мат. наук, доцент; inga_ma@mail.ru

On stabilization of a triple inverted pendulum via vibration of a support point with an arbitrary frequency

I. M. Arkhipova

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Arkhipova I. M. On stabilization of a triple inverted pendulum via vibration of a support point with an arbitrary frequency. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 2, pp. 281–287.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.210> (In Russian)

The stabilization of the upper statically unstable position of a triple inverted pendulum via parametric excitation of the support is studied. The reported results are obtained by using the multiple scale method and the Floquet theory. The stability diagrams in the excitation parameters space (amplitude and frequency of the support excitation) are plotted. It is shown that the stabilization is possible for low, medium and high excitation frequencies. The influence of the deviation of system parameters from the critical parameter, which sets the stability limit of a conservative system, and the effect of damping on the stabilization domains are discussed.

Keywords: vibrational stabilization, triple pendulum

References

1. Stephenson A., “On a New Type of Dynamical Stability”, *Mem. Proc. Manchester Literary and Philos. Soc.* **52** (8), 1–10 (1908).
2. Stephenson A., “On Induced Stability”, *Philos. Mag.* **17**, 765–766 (1909).
3. Seyranian A. P., Mailybaev A. A., “Vibrational stabilization of statically unstable systems”, *Doklady Physics* **54** (6), 294–300 (2009).
4. Arkhipova I. M., Luongo A., Seyranian A. P., “Vibrational stabilization of the upright statically unstable position of a double pendulum”, *J. Sound Vib.* **331**, 457–469 (2012).
5. Arkhipova I. M., Luongo A., “Stabilization via parametric excitation of multi-dof statically unstable systems”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **19**, 3913–3926 (2014).
6. Arkhipova I. M., Luongo A., “On the effect of damping on the stabilithation of mechanical systems via parametric excitation”, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik* **67** (3), 69 (2016).
7. Nayfeh A. H., *Perturbation Methods* (Wiley, New York, 1973).
8. Merkin D. R., *Introduction to the Theory of Stability* (Springer, New York, 1997).

Received: November 10, 2018

Revised: December 17, 2018

Accepted: December 20, 2018

Author's information:

Inga M. Arkhipova — inga_ma@mail.ru