УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 2
MSC 60E15

Об оценках для вероятностей комбинаций событий, формуле Жордана и неравенствах Бонферрони*

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Фролов А. Н.* Об оценках для вероятностей комбинаций событий, формуле Жордана и неравенствах Бонферрони // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 2. С. 253–264. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.207

Обсуждается метод получения оптимальных оценок снизу и сверху вероятностей и условных вероятностей (относительно некоторой σ-алгебры) различных комбинаций событий. Оптимальность понимается как возможность превращения неравенств в равенства для некоторых наборов событий. Получены новые обобщения формулы Жордана и неравенств Бонферрони. Соответствующие условные варианты этих результатов также рассмотрены.

Ключевые слова: неравенства Бонферрони, формула Жордана, вероятности комбинаций событий, вероятности осуществления нескольких событий.

1. Введение. В работах автора [1, 2] были получены оценки сверху и снизу для вероятностей (в том числе условных) осуществления не менее r и ровно r из n событий. Целью настоящей работы является совершенствование метода получения подобных оценок из [1, 2] и более ранних работ [3, 4], а также доказательство новых неравенств для указанных вероятностей. При этом если в предыдущих работах мы концентрировались на получении оценок, основанных на небольшом количестве моментов (обычно двух или трех) суммы индикаторов событий, то в этой работе мы показываем возможности нашего метода в случае большого числа используемых моментов. В итоге мы получим обобщения формулы Жордана и неравенств Бонферрони.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и σ-алгебра событий $\mathcal{A}$ такая, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события. Для $i = 0, 1, \ldots, n$ через B_i обозначим событие, состоящее в том, что происходит ровно i из n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а через U_r — событие, состоящее в том, что происходит не менее r из указанных событий, где $r = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что для всех r выполняется соотношение

$$U_r = \bigcup_{i=r}^{n} B_i.$$

Наша цель — получить оценки сверху и снизу для вероятностей (обычных и условных относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$) событий U_r и B_r, основанные на моментных харак-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00393).

теристиках случайной величины

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i},$$

где I_{A_i} — индикатор события A_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как по своему определению ξ_n — число происшедших событий, мы имеем $B_i = \{\xi_n = i\}$ при всех $i = 0, 1, \ldots, n$ и $U_r = \{\xi_n \geqslant r\}$ при всех $r = 1, 2, \ldots, n$.

Положим

$$p_i = \mathbf{P}(B_i) \quad \text{и} \quad p_i^{\mathcal{A}} = \mathbf{P}(B_i|\mathcal{A}), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

В настоящей статье мы получим новые представления и оценки сверху и снизу для вероятностей p_r, $p_r^{\mathcal{A}}$,

$$P_r = P(U_r) = \sum_{i=r}^{n} p_i \quad \text{и} \quad P_r^{\mathcal{A}} = P(U_r|\mathcal{A}) = \sum_{i=r}^{n} p_i^{\mathcal{A}}, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant r \leqslant n,$$

в терминах моментов случайной величины ξ_n.

Одним из давно и широко известных результатов подобного типа является формула Жордана:

$$P_r = \sum_{i=r}^{n} (-1)^{i-r} C_{i-1}^{r-1} \frac{1}{i!} \mathbf{E}(\xi_n)_i,$$

где $\mathbf{E}(\xi_n)_i$ — факториальный момент i-го порядка ξ_n. Здесь и далее мы полагаем

$$C_m^k = \frac{(m)_k}{k!} \quad \text{и} \quad (m)_k = m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)$$

для всех $m, k \in \mathbb{N}$, а $(m)_0 = 1$ для всех $m + 1 \in \mathbb{N}$.

Неравенства Бонферрони, также давно и широко известные, получаются из формулы Жордана отбрасыванием некоторого числа последних слагаемых. При этом, если первое отброшенное слагаемое положительно, то оставшаяся сумма будет оценкой снизу для P_r. Если первое отброшенное слагаемое отрицательно, то оставшаяся сумма станет оценкой сверху. Кроме того, известны аналоги этих формул для p_r. Доказательства этих результатов можно найти, например, в книге [5], а также в цитированной там литературе. Различные обобщения этих результатов можно найти в [6–16] и работах из их библиографий.

Подобные формулы и неравенства находят широкое применение в теории вероятностей и ее различных приложениях (см., например, [17–27]). Особенно важны оценки для вероятностей объединений событий P_1, которые, в частности, используются для получения обобщений и уточнений леммы Бореля — Кантелли. Отметим, также, что многие работы посвящены оценкам, основанным на малом числе моментов низкого порядка. Такие оценки зачастую легче использовать.

2. Представления вероятностей p_r, $p_r^{\mathcal{A}}$, P_r и $P_r^{\mathcal{A}}$. Положим $J_0 = \{0\}$, $J_d = \{j = (j_1, \ldots, j_d) : \ j_k \in \mathbb{N} \text{ и } 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_d \leqslant n \text{ при всех } 1 \leqslant k \leqslant d\}$ для всех $d \in \mathbb{N}$. Нам потребуется следующий результат из работы [1].

Лемма 1. *Пусть d — фиксированное целое число такое, что $0 \leqslant d \leqslant r$. Положим $p_{i,j}^{\mathcal{A}} = \mathbf{P}(B_i A_{j_1} \ldots A_{j_d}|\mathcal{A})$ для всех $j \in J_d$ при $d \geqslant 1$ и $p_{i,j}^{\mathcal{A}} = p_i^{\mathcal{A}} = \mathbf{P}(B_i|\mathcal{A})$ для*

$j \in J_0$ при $d = 0$. Положим также $p_{i,j} = \mathbf{P}(B_i A_{j_1} \ldots A_{j_d})$ для всех $j \in J_d$ при $d \geqslant 1$ и $p_{i,j} = p_i = \mathbf{P}(B_i)$ для $j \in J_0$ при $d = 0$.

Тогда

$$p_r = \sum_{j \in J_d} \frac{1}{C_r^d} \, p_{r,j}, \quad P_r = \sum_{j \in J_d} \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{C_i^d} \, p_{i,j}. \tag{1}$$

При замене p_r на $p_r^{\mathcal{A}}$, P_r на $P_r^{\mathcal{A}}$ и $p_{i,j}$ на $p_{i,j}^{\mathcal{A}}$ равенства в (1) имеют место с вероятностью 1.

3. Числовые неравенства. Далее мы используем следующие обозначения. Все векторы из $\mathbb{R}^k$ мы считаем столбцами за исключением $j \in J_d$, являющегося числом при $d \leqslant 1$. Для любого $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ обозначим через v_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, его координаты. Запись $\mathbf{v} \leqslant \mathbf{u}$ для $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ является сокращением записи $v_i \leqslant u_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Положим $\mathbf{0}_k = (0, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^k$ и $\mathbf{1}_k = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$, где T обозначает транспонирование.

Наш метод основан на следующем результате, обобщающем теорему 1 из работы автора [1].

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{z}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}_n$ и $\mathbf{F} = \|f_{ki}\|_{k=1,i=1}^{\ell,n}$ — вещественная матрица, где $2 \leqslant \ell \leqslant n$. Положим $Z = \mathbf{z}^T \mathbf{v}$ и*

$$\mathbf{s} = \mathbf{F}\mathbf{z}. \tag{2}$$

Пусть для некоторого $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^\ell$ такого, что $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leqslant n$, вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^\ell$ является решением следующей системы линейных уравнений:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^T \mathbf{a} = \mathbf{v}_{\mathbf{i}}, \tag{3}$$

где $\mathbf{F}_{\mathbf{i}} = \|f_{k i_q}\|_{k=1,q=1}^{\ell,\ell}$ и $\mathbf{v}_{\mathbf{i}} = (v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_\ell})^T$. Пусть $\mathbf{z}^* \in \mathbb{R}^n$ — вектор такой, что его подвектор $\mathbf{z}_{\mathbf{i}}^* = (z_{i_1}^*, z_{i_2}^*, \ldots, z_{i_\ell}^*)^T$ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}} \mathbf{z}_{\mathbf{i}}^* = \mathbf{s} \tag{4}$$

и $z_i^* = 0$ для всех $i \neq i_q$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant \ell$.

Если $\mathbf{F}^T \mathbf{a} \leqslant \mathbf{v}$, то $Z \geqslant Z^* = (\mathbf{z}^*)^T \mathbf{v} = \mathbf{s}^T \mathbf{a}$. Если $\mathbf{F}^T \mathbf{a} \geqslant \mathbf{v}$, то $Z \leqslant Z^*$.

Доказательство. Для любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^\ell$ такого, что $\mathbf{F}^T \mathbf{a} \leqslant \mathbf{v}$, с учетом соотношения (2) мы имеем

$$Z = \mathbf{z}^T \mathbf{v} \geqslant \mathbf{z}^T \mathbf{F}^T \mathbf{a} = \mathbf{s}^T \mathbf{a}.$$

Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{z}_{\mathbf{i}}^*$ — решения систем (3) и (4) соответственно, то мы получим

$$\mathbf{s}^T \mathbf{a} = (\mathbf{z}_{\mathbf{i}}^*)^T \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^T \mathbf{a} = (\mathbf{z}_{\mathbf{i}}^*)^T \mathbf{v}_{\mathbf{i}} = (\mathbf{z}^*)^T \mathbf{v} = Z^*.$$

Следовательно, $Z \geqslant Z^*$. Второе неравенство доказывается аналогично. $\square$

Теорема 1 позволяет получать оценки для различных линейных комбинаций вектора $\mathbf{z}$. Если вектор $\mathbf{v}$ взять, например, равным

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{r-1} \\ \mathbf{1}_{n-r+1} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{r-1} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{n-r} \end{pmatrix},$$

где $1 \leqslant r \leqslant n$, то в первом случае Z превращается в $\sum_{i=r}^{n} z_i$, а во втором — в z_r.

При $r=1$ и $\mathbf{v}=\mathbf{1}_n$ полученный результат превращается в теорему 1 из [1].

Отметим, что система (3) в условии теоремы соотносится с тем, что экстремум линейной функции $\mathbf{s}^T\mathbf{a}$ при линейных ограничениях $\mathbf{F}^T\mathbf{a} \leqslant \mathbf{v}$ достигается (если это возможно) тогда, когда ℓ неравенств превращаются в равенства.

Поскольку матрицы систем (3) и (4) являются результатом транспонирования друг друга, решать нужно лишь одну из двух систем — вторую. Действительно, решив вторую систему, мы получим в случае обратимости матрицы $\mathbf{F_i}$ равенство

$$\mathbf{z}_\mathbf{i}^* = \mathbf{F}_\mathbf{i}^{-1}\mathbf{s}.$$

Заметим, что компоненты вектора $\mathbf{i}$ могут зависеть от некоторого параметра, оптимизацию по которому можно проводить с использованием естественных свойств вектора $\mathbf{z}_\mathbf{i}^*$. Далее мы выразим Z^* через $\mathbf{s}$:

$$Z^* = (\mathbf{z}^*)^T\mathbf{v} = \mathbf{s}^T\mathbf{a}.$$

Это дает нам вектор $\mathbf{a}$ и возможность проверить условия на $\mathbf{F}^T\mathbf{a}$. Разумеется, если решать системы с помощью отыскания обратной матрицы, то порядок значения не имеет. Особенно если нет необходимости в вышеупомянутой оптимизации.

Если $\mathbf{z}^* \geqslant \mathbf{0}_n$, то доказанную теорему можно рассматривать как способ построения вектора $\mathbf{z}^*$ с таким же набором моментов $\mathbf{s}$ как у вектора $\mathbf{z}$, но имеющего некоторое количество нулевых координат и не большее, чем у $\mathbf{z}$, значение некоторой линейной комбинации компонент. Отсюда следует, что существуют примеры, когда неравенства превращаются в равенства.

Сделаем одно важное замечание, связанное с тем, что матрица $\mathbf{F}$ зачастую бывает подматрицей обратимой матрицы $n \times n$. В этом случае проверка условий теоремы 1 может быть заменена непосредственной проверкой доказываемых неравенств.

Замечание 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\mathbf{F}$ — подматрица вещественной обратимой $(n \times n)$-матрицы $\mathbf{G}$. Тогда $\mathbf{s}$ — подвектор n-мерного вектора $\mathbf{t} = \mathbf{G}\mathbf{z}$ и $Z = \mathbf{t}^T(\mathbf{G}^T)^{-1}\mathbf{v}$. Поэтому вместо условий $\mathbf{F}^T\mathbf{a} \leqslant \mathbf{v}$ и $\mathbf{F}^T\mathbf{a} \geqslant \mathbf{v}$ можно проверять сами неравенства $Z \geqslant Z^*$ и $Z \leqslant Z^*$.

4. Формула Жордана, неравенства Бонферрони и их обобщения. Пусть $1 \leqslant r \leqslant n$ и $0 \leqslant d \leqslant r$. Для $j \in J_d$ положим $\mathbf{z}(j) = (z_1(j), \ldots, z_{n-d+1}(j))^T$, где

$$z_i(j) = \frac{p_{i+d-1,j}}{C_{i+d-1}^d} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n-d+1.$$

(Отметим, что $p_{0,j} = \cdots = p_{d-1,j} = 0$ по определению вероятностей $p_{i,j}$ для всех $j \in J_d$ и $d \geqslant 1$.) Выбрав подходящие векторы $\mathbf{v}$, с помощью теоремы 1 мы оценим суммы

$$Z(j) = (\mathbf{z}(j))^T\mathbf{v}$$

для всех $j \in J_d$. Подставив эти оценки в формулу (1), мы получим оценку для соответствующей вероятности комбинации событий. Выкладки для условных вероятностей аналогичны.

Отметим, что при $d > 0$ можно использовать разные матрицы $\mathbf{F}$ для различных $j \in J_d$. Мы этого делать не будем в виду необозримости различных вариаций соответствующих формул. Ниже выбор матрицы $\mathbf{F}$ обусловлен тем, что соответствующие моменты имеют целый порядок и выражаются в виде сумм вероятностей пересечений исходных событий. Используя такое же число моментов нецелого меньшего порядка, можно построить более точные оценки, но моменты не будут выражаться через вероятности пересечений событий.

Выберем максимально возможное $\ell = n-d+1$ и факториальные моменты. (Напомним, что ℓ — номер последнего используемого момента, т. е. максимальное число моментов, задействованных в оценке. Некоторые из них могут входить в оценку с нулевыми коэффициентами.) Это приводит в теореме 1 к $\mathbf{i} = (1, 2, \ldots, n-d+1)^T$, $\mathbf{F} = \mathbf{F_i}$, $\mathbf{v_i} = \mathbf{v}$, единственно возможному способу определения $\mathbf{z}^*$ и $\mathbf{a}$, имеющих максимальную размерность, и, как следствие, к равенству $Z(j) = Z^*(j)$. Формула Жордана соответствует $d = 0$.

Положим

$$\mathbf{F} = \|C_{i+d-1}^{k+d-1}\|_{k=1,i=1}^{n-d+1,n-d+1}. \tag{5}$$

Заметим, что $\mathbf{F}$ — треугольная матрица. Первая ее строка и главная диагональ состоят из единиц, а под ее главной диагональю расположены нули.

Лемма 2. *Если матрица $\mathbf{F}$ определена соотношением (5) и $\mathbf{s}(j) = \mathbf{F}\mathbf{z}(j)$, то*

$$s_k(j) = \frac{d!}{(k+d-1)!} \sum_{u_1 \neq \cdots \neq u_{k-1} \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j_1,\ldots,j_d\}} \mathbf{P}\left(A_{u_1} \ldots A_{u_{k-1}} A_{j_1} \ldots A_{j_d}\right) \tag{6}$$

при $1 \leqslant k \leqslant n-d+1$.

Доказательство. Мы имеем

$$s_k(j) = \sum_{i=k}^{n-d+1} C_{i+d-1}^{k+d-1} \frac{p_{i+d-1,j}}{C_{i+d-1}^{d}} = \frac{d!}{(k+d-1)!} \sum_{i=k}^{n-d+1} (i-1)_{k-1} p_{i+d-1,j}. \tag{7}$$

Далее, получаем

$$\sum_{i=k}^{n-d+1} (i-1)_{k-1} p_{i+d-1,j} = \sum_{u=k+d-1}^{n} (u-d)_{k-1} p_{u,j} = \sum_{u=d}^{n} (u-d)_{k-1} p_{u,j} =$$
$$= \sum_{u=d}^{n} (u-d)_{k-1} \mathbf{E} I_{B_u A_{j_1} \ldots A_{j_d}} = \mathbf{E}\left(\sum_{u=d}^{n} (u-d)_{k-1} I_{B_u A_{j_1} \ldots A_{j_d}}\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(\sum_{u=d}^{n} (\xi_n - d)_{k-1} I_{B_u A_{j_1} \ldots A_{j_d}}\right) = \mathbf{E}(\xi_n - d)_{k-1} \left(\sum_{u=d}^{n} I_{B_u A_{j_1} \ldots A_{j_d}}\right) =$$
$$= \mathbf{E}(\xi_n - d)_{k-1} I_{U_d A_{j_1} \ldots A_{j_d}} = \mathbf{E}(\xi_n - d)_{k-1} I_{A_{j_1} \ldots A_{j_d}}. \tag{8}$$

Покажем индукцией по k, что

$$(\xi_n - d)_{k-1} I_{A_{j_1} \ldots A_{j_d}} = \sum_{u_1 \neq \cdots \neq u_{k-1} \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j_1,\ldots,j_d\}} I_{A_{u_1} \ldots A_{u_{k-1}} A_{j_1} \ldots A_{j_d}} \tag{9}$$

при $k \leqslant n-d+1$. Докажем сначала, что это соотношение верно при $k = 2$ (база индукции). Мы имеем

$$(\xi_n - d) I_{A_{j_1} \ldots A_{j_d}} = \sum_{u=1}^{n} I_{A_u A_{j_1} \ldots A_{j_d}} - d I_{A_{j_1} \ldots A_{j_d}} = \sum_{u \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j_1,\ldots,j_d\}} I_{A_u A_{j_1} \ldots A_{j_d}}.$$

Теперь докажем возможность перехода от k и $k+1$ (индукционный переход). Мы имеем

$$
\begin{aligned}
&(\xi_n - d)_k I_{A_{j_1}\dots A_{j_d}} = (\xi_n - d)_{k-1} I_{A_{j_1}\dots A_{j_d}} (\xi_n - (d+k-1)) = \\
&= \sum_{u_1 \neq \dots \neq u_{k-1} \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_d\}} I_{A_{u_1}\dots A_{u_{k-1}} A_{j_1}\dots A_{j_d}} \left(\sum_{u_k=1}^{n} I_{A_{u_k}} - (d+k-1) \right) = \\
&= \sum_{u_k=1}^{n} \sum_{u_1 \neq \dots \neq u_{k-1} \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_d\}} I_{A_{u_1}\dots A_{u_k} A_{j_1}\dots A_{j_d}} - \\
&- (d+k-1) \sum_{u_1 \neq \dots \neq u_{k-1} \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_d\}} I_{A_{u_1}\dots A_{u_{k-1}} A_{j_1}\dots A_{j_d}} = \\
&= \sum_{u_1 \neq \dots \neq u_k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_d\}} I_{A_{u_1}\dots A_{u_k} A_{j_1}\dots A_{j_d}}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, соотношение (9) выполнено. Из соотношений (9), (8) и (7) вытекает равенство (6). □

Перейдем к получению аналогов формулы Жордана.

Теорема 2. *Выполняются следующие соотношения:*

$$
P_r = \sum_{j \in J_d} \sum_{i=r-d+1}^{n-d+1} (-1)^{i+d-r-1} C_{i+d-2}^{r-1} s_i(j), \tag{10}
$$

$$
p_r = \sum_{j \in J_d} \sum_{i=r-d+1}^{n-d+1} (-1)^{i+d-r-1} C_{i+d-1}^{r} s_i(j), \tag{11}
$$

где величины $s_i(j)$ вычисляются по формуле (6).

При замене вероятностей P_r и p_r условными вероятностями $P_r^{\mathcal{A}}$ и $p_r^{\mathcal{A}}$ и $s_i(j)$ на $s_i^{\mathcal{A}}(j)$ соотношения (10) и (11) выполняются с вероятностью 1, а случайные величины $s_i^{\mathcal{A}}(j)$ определяются по формуле (6) с заменой вероятности $\mathbf{P}$ условной вероятностью относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$.

При $d = 0$ мы получим из (10) формулу Жордана, приведенную выше.

Доказательство. Решая систему (4), мы получим

$$
z_k^*(j) = \sum_{i=k}^{n-d+1} (-1)^{i-k} C_{i+d-1}^{k+d-1} s_i(j), \quad k = 1, 2, \dots, n-d+1.
$$

Пусть $r \leqslant n+1$. Положив

$$
\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{r-d} \\ \mathbf{1}_{n-r+1} \end{pmatrix},
$$

мы имеем

$$
\begin{aligned}
Z^*(j) &= \sum_{k=r-d+1}^{n-d+1} z_k^*(j) = \sum_{i=r-d+1}^{n-d+1} \left(\sum_{k=r-d+1}^{i} (-1)^{i-k} C_{i+d-1}^{k+d-1} \right) s_i(j) = \\
&= \sum_{i=r-d+1}^{n-d+1} \left((-1)^{i+d-r-1} \sum_{v=r+1}^{i+d} (-1)^{r+1-v} C_{i+d-1}^{v-1} \right) s_i(j) =
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=r-d+1}^{n-d+1} \left((-1)^{i+d-r-1} \sum_{v=r+1}^{i+d} (-1)^{r+1-v} \left(C_{i+d-2}^{v-2} + C_{i+d-2}^{v-1} \right) \right) s_i(j) =$$

$$= \sum_{i=r-d+1}^{n-d+1} (-1)^{i+d-r-1} C_{i+d-2}^{r-1} s_i(j). \quad (12)$$

Здесь мы воспользовались легко проверяемым соотношением $C_{u-1}^{v-1} = C_{u-2}^{v-2} + C_{u-2}^{v-1}$.

Таким образом, $a_i = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r-d$ и

$$a_i = (-1)^{i+d-r-1} C_{i+d-2}^{r-1} \quad \text{при} \quad i = r-d+1, r-d+2, \ldots, n-d+1.$$

Это приводит нас к формуле (10).

Выбрав вместо рассмотренного выше вектора $\mathbf{v}$ вектор

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{r-d} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{n-r} \end{pmatrix},$$

мы получим

$$Z^*(j) = z_{r-d+1}^*(j) = \sum_{i=r-d+1}^{n-d+1} (-1)^{i-r+d-1} C_{i+d-1}^{r} s_i(j).$$

Поэтому $a_i = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r-d$ и

$$a_i = (-1)^{i+d-r-1} C_{i+d-1}^{r} \quad \text{при} \quad i = r-d+1, r-d+2, \ldots, n-d+1.$$

Отсюда следует соотношение (11).

Доказательство условных вариантов соотношений (10) и (11) проводится по той же схеме. Надо сначала зафиксировать варианты всех условных вероятностей. Конечное число исключительных множеств нулевой меры, которые могут меняться при осуществлении переходов к новым равенствам, можно объединить в одно множество. Если любое фиксированное элементарное событие было выбрано из дополнения этого последнего множества, то все выкладки превратятся в числовые выкладки, проведенные выше. □

Классические неравенства Бонферрони получаются из формулы Жордана отбрасыванием некоторого числа последних слагаемых. При этом, если первое отброшенное слагаемое отрицательно, то получится оценка сверху, а если положительно, то оценка снизу. Следующий результат показывает, что и в более общей ситуации ($d > 0$) имеют место аналогичные результаты.

Теорема 3. *Пусть $r-d+1 \leqslant N \leqslant n-d$. Выполняются следующие неравенства:*

$$P_r \geqslant \sum_{j \in J_d} \sum_{i=r-d+1}^{N} (-1)^{i+d-r-1} C_{i+d-2}^{r-1} s_i(j), \quad \text{\textit{если}} \quad N-r+d \quad \text{\textit{четно}}, \quad (13)$$

$$P_r \leqslant \sum_{j \in J_d} \sum_{i=r-d+1}^{N} (-1)^{i+d-r-1} C_{i+d-2}^{r-1} s_i(j), \quad \text{\textit{если}} \quad N-r+d \quad \text{\textit{нечетно}}, \quad (14)$$

где величины $s_i(j)$ вычисляются по формуле (6).

При замене вероятностей P_r условными вероятностями $P_r^{\mathcal{A}}$ и $s_i(j)$ на $s_i^{\mathcal{A}}(j)$ неравенства (13) и (14) выполняются с вероятностью 1, а случайные величины $s_i^{\mathcal{A}}(j)$ определяются по формуле (6) с заменой вероятности $\mathbf{P}$ условной вероятностью относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Доказательство. Здесь мы воспользуемся теоремой 1 для получения оценки $Z^*(j)$ и замечанием 1 для определения того, какую оценку мы получили (верхнюю или нижнюю). Роль матрицы $\mathbf{G}$ будет играть матрица из правой части (5), т. е. мы положим

$$\mathbf{G} = \|C_{i+d-1}^{k+d-1}\|_{k=1,i=1}^{n-d+1,n-d+1}.$$

Пусть $\ell = N$ и

$$\mathbf{F} = \|C_{i+d-1}^{k+d-1}\|_{k=1,i=1}^{N,n-d+1}.$$

Положим $\mathbf{i} = (1, 2, \ldots, N)$. Тогда мы имеем

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}} = \|C_{i+d-1}^{k+d-1}\|_{k=1,i=1}^{N,N}.$$

Эта матрица отличается от матрицы из соотношения (5) другим обозначением размерности. Поэтому формула (12) с заменой $n-d+1$ на N дает нам для $Z(j)$ следующую оценку:

$$Z^*(j) = \sum_{i=r-d+1}^{N} (-1)^{i+d-r-1} C_{i+d-2}^{r-1} s_i(j)$$

для всех $j \in J_d$. При этом само $Z(j)$ совпадает с выражением из (12).

Теперь мы определим условия, при которых оценка будет верхней или нижней.

Для всех $j \in J_d$ и $r-d+1 \leqslant N \leqslant n-d$ с учетом (10) мы имеем

$$Z(j) - Z^*(j) = (-1)^{N-r+d} \sum_{i=N+1}^{n-d+1} (-1)^{i-N-1} C_{i+d-2}^{r-1} s_i(j).$$

Покажем, что последняя сумма неотрицательна. Здесь мы воспользуемся тем, что

$$s_i(j) = \sum_{k=i}^{n-d+1} C_{k+d-2}^{i+d-2} Z_k, \quad \text{где} \quad Z_k = \sum_{i=k}^{n-d+1} z_i.$$

Мы имеем

$$\sum_{i=N+1}^{n-d+1} (-1)^{i-N-1} C_{i+d-2}^{r-1} s_i(j) = \sum_{i=N+1}^{n-d+1} (-1)^{i-N-1} C_{i+d-2}^{r-1} \sum_{k=i}^{n-d+1} C_{k+d-2}^{i+d-2} Z_k =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{n-d+1} Z_k \sum_{i=N+1}^{k} (-1)^{i-N-1} C_{i+d-2}^{r-1} C_{k+d-2}^{i+d-2} =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{n-d+1} Z_k \sum_{v=N+d-1}^{k+d-2} (-1)^{v-N-d+1} C_v^{r-1} C_{k+d-2}^{v} = \sum_{k=N+1}^{n-d+1} Z_k C_{k+d-2}^{r-1} C_{k+d-r-2}^{N+d-r-1} \geqslant 0.$$

При вычислении суммы в последнем равенстве мы воспользовались выделенной формулой на стр. 117 гл. IV книги [5] и утверждением после нее.

Отсюда следуют неравенства (13) и (14). Их условные аналоги доказываются с использованием тех же соображений, что и в доказательстве теоремы 2. Детали мы опускаем. □

Перейдем к неравенствам для p_r и $p_r^{\mathcal{A}}$.

Теорема 4. *Пусть $r-d+1 \leqslant N \leqslant n-d$. Выполняются следующие неравенства:*

$$p_r \geqslant \sum_{j\in J_d} \sum_{i=r-d+1}^{N} (-1)^{i+d-r-1} C_{i+d-2}^{r} s_i(j), \quad \text{если} \quad N-r+d \quad \text{четно}, \qquad (15)$$

$$p_r \leqslant \sum_{j\in J_d} \sum_{i=r-d+1}^{N} (-1)^{i+d-r-1} C_{i+d-2}^{r} s_i(j), \quad \text{если} \quad N-r+d \quad \text{нечетно}, \qquad (16)$$

где величины $s_i(j)$ вычисляются по формуле (6).

При замене вероятностей p_r условными вероятностями $p_r^{\mathcal{A}}$ и $s_i(j)$ на $s_i^{\mathcal{A}}(j)$ неравенства (15) и (16) выполняются с вероятностью 1, а случайные величины $s_i^{\mathcal{A}}(j)$ определяются по формуле (6) с заменой вероятности $\mathbf{P}$ условной вероятностью относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Доказательство этой теоремы проводится по тому же образцу, что и доказательство теоремы 3. При этом нужно использовать представление $s_k(j)$ через сами z_i, а не их суммы. Детали мы опускаем.

Отметим, что с ростом N точность оценок (13)–(16) увеличивается.

В теоремах 3 и 4 мы выбрали наиболее простой вариант, в котором N не зависит от $j \in J_d$. Разумеется, их заключения останутся справедливыми, если N заменить на N_j. При этом в оценках снизу нужно, чтобы все $N_j - r + d$ были четными, а в оценках сверху — нечетными.

Из обсуждения после теоремы 1 следует, что неравенства в теоремах 3 и 4 могут обращаться в равенства и являются в этом смысле точными. Кроме того, в правые части этих неравенств входят вероятности пересечений не более чем $N + d - 1$ событий. При малых d, r и N их достаточно просто вычислить.

В теоремах 3 и 4 мы привели обобщения неравенств Бонферрони. Однако в литературе имеются также некоторые их модификации (см., например, [10]) в следующем направлении. Например, формула (13) использует моменты до N-го. Модифицированная формула (см. леммы 3.1 и 3.2 в [10]) отличается другими коэффициентами при нескольких последних $s_i(0)$. Этого можно достичь в общей ситуации, используя другой способ выбора $\mathbf{i}$. Например, можно взять $\mathbf{i} = (1, 2, \ldots, N-1, n-d+1)$ в доказательстве теоремы 3. Это приведет к тому, что в матрице $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^T$ из системы (3) изменится последняя строка. Поэтому коэффициенты $a_1, \ldots, a_{N-1}$ останутся без изменений, а a_N выписывается из последнего уравнения следующим образом:

$$a_N = \frac{1}{C_n^{N+d-1}} \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} C_n^{i+d-1} a_i\right) = \frac{1}{C_n^{N+d-1}} \left(1 - \sum_{i=r-d+1}^{N-1} (-1)^{i+d-r-1} C_{i+d-2}^{r-1} C_n^{i+d-1}\right).$$

При $d = 0$ это дает V из леммы 3.1 в [10]. Следующий шаг состоит в том, чтобы выбрать $\mathbf{i} = (1, 2, \ldots, N-3, u, u+1, n-d+1)$, где $N-2 \leqslant u \leqslant n-d-1$. В этом случае уже придется проводить оптимизацию по u.

Отметим, что выбор вектора $\mathbf{i}$ мы здесь не обсуждаем, но планируем это сделать в одной из следующих работ.

Теорема 1 дает также возможность получать аналогичные результаты для других интересных линейных комбинаций p_i. Например, для их сумм с четными или нечетными индексами.

Неравенства для условных вероятностей после усреднения их левых и правых частей дают оценки для безусловных вероятностей. Такие оценки могут быть точнее. Численный пример с двумя такими оценками для вероятности объединения четырех событий приведен в работе [26]. Там события определяются первой компонентой дискретного двумерного вектора, а σ-алгебра порождена его второй компонентой. Это, на наш взгляд, также демонстрирует один из возможных естественных способов появления σ-алгебры $\mathcal{A}$, которая в наших абстрактных построениях произвольна.

Автор выражает свою благодарность анонимным рецензентам, замечания которых способствовали улучшению текста статьи.

Литература

1. *Фролов А. Н.* О неравенствах для вероятностей осуществления не менее r из n событий // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 477–488. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.310

2. *Фролов А. Н.* О неравенствах для вероятностей совместного осуществления нескольких событий // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 464–476. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.310

3. *Frolov A. N.* Bounds for probabilities of unions of events and the Borel — Cantelli lemma // Statist. Probab. Lett. 2012. Vol. 82. P. 2189–2197.

4. *Frolov A. N.* On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel — Cantelli lemma // Studia Sci. Math. Hungarica. 2015. Vol. 52, no. 1. P. 102–128.

5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2-х томах. Т. 1. М.: Мир, 1967.

6. *Galambos J.* Bonferroni inequalities // Ann. Probab. 1977. Vol. 5. P. 577–581.

7. *Galambos J., Simonelli I.* Bonferroni-type inequalities with applications. New York: Springer-Verlag, 1996.

8. *Hoppe F. M., Seneta E.* A Bonferroni-type identity and permutation bounds // Intern. Statist. Rewiev. 1990. Vol. 58. P. 253–261.

9. *Kounias S., Marin J.* Best linear Bonferroni bounds // SIAM J. Appl. Math. 1976. Vol. 30, no. 2. P. 307–323.

10. *Kounias S., Sotirakoglou K.* Upper and lower bounds for the probability that r events occur // J. Math. Programming. Oper. Research. 1993. Vol. 27, no. 1–2. P. 63–78.

11. *Margaritescu E.* Improved Bonferroni inequalities // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1988. Vol. 33. P. 509–515.

12. *Móri T. F., Székely G. J.* A note on the background of several Bonferroni — Galambos-type inequalities // J. of Appl. Probab. 1985. Vol. 22. P. 836–843.

13. *Prékopa A.* Boole — Bonferroni inequalities and linear programming // Oper. Research. 1988. Vol. 36. P. 145–162.

14. *Recsei E., Seneta E.* Bonferroni-type inequalities // Adv. Appl. Probab. 1987. Vol. 19. P. 508–511.

15. *Sobel M., Uppuluri V. R. R.* On Bonferroni-type inequalities of the same degree for probabilities of unions and intersections // Ann. Math. Statist. 1972. Vol. 43. P. 1549–1558.

16. *Walker A. M.* On the classical Bonferroni inequalities and the corresponding Galambos inequalities // J. Appl. Probab. 1981. Vol. 18. P. 757–763.

17. *Chung K. L., Erdős P.* On the application of the Borel — Cantelli lemma // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 72. P. 179–186.

18. *Dawson D. A., Sankoff D.* An inequality for probabilities // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 18. P. 504–507.

19. *Kounias E. G.* Bounds for the probability of a union, with applications // Ann. Math. Statist. 1968. Vol. 39. P. 2154–2158.

20. *Kwerel S. M.* Bounds on the probability of the union and intersection of m events // Adv. Appl. Probab. 1975. Vol. 7. P. 431–448.

21. *Boros E., Prékopa A.* Closed form two-sided bounds for probabilities that at least r and exactly r out of n events occurs // Math. Oper. Research. 1989. Vol. 14. P. 317–342.

22. *de Caen D.* A lower bound on the probability of a union // Discrete Math. 1997. Vol. 169. P. 217–220.

23. *Kuai H., Alajaji F., Takahara G.* A lower bound on the probability of a finite union of events // Discrete Math. 2000. Vol. 215. P. 147–158.

24. *Фролов А. Н.* О неравенствах для вероятностей объединений событий и лемме Бореля — Кантелли // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1(59). Вып. 2. С. 201–210.

25. *Фролов А. Н.* Об оценивании вероятностей объединений событий с приложениями к лемме Бореля — Кантелли // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2 (60). Вып. 3. С. 399–404.

26. *Фролов А. Н.* О неравенствах для условных вероятностей объединений событий и условной лемме Бореля — Кантелли // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 651–662. https:/doi/org/10.21638/11701/spbu01.2016.415

27. *Frolov A. N.* On inequalities for values of first jumps of distribution functions and Hölder's inequality // Statist. Probab. Lett. 2017. Vol. 126. P. 150–156.

Статья поступила в редакцию 4 ноября 2018 г.;
после доработки 12 декабря 2018 г.;
рекомендована в печать 20 декабря 2018 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Фролов Андрей Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.frolov@spbu.ru

On estimates for probabilities of combinations of events, the Jordan formula and the Bonferroni inequalities

A. N. Frolov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Frolov A. N. On estimates for probabilities of combinations of events, the Jordan formula and the Bonferroni inequalities. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 2, pp. 253–264.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.207 (In Russian)

We discuss the method which allows us to derive optimal upper and lower bounds for probabilities and conditional probabilities given a σ-field for various combinations of events. We define the optimality as the possibility of bounds to be equalities for some sets of events. We derive new generalizations of the Jordan formula and the Bonferroni inequalities. Conditional variants of these results are discussed as well.

Keywords: Bonferroni inequalities, Jordan formula, probabilities of combinations of events, probabilities of several events occuring.

References

1. Frolov A. N., "On inequalities for probabilities wherein at least r from n events occur", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **50**, issue 3, 287–296 (2017). https://doi.org/10.3103/S1063454117030074

2. Frolov A. N., "On Inequalities for Probabilities of Joint Occurrence of Several Events", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **51**, issue 3, 286–295 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118030032

3. Frolov A. N., "Bounds for probabilities of unions of events and the Borel — Cantelli lemma", *Statist. Probab. Lett.* **82**, 2189–2197 (2012).

4. Frolov A. N., “On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel — Cantelli lemma”, *Studia Sci. Math. Hungarica* **52** (1), 102–128 (2015).

5. Feller W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, in *Series in Probability and Statistics* **1** (Wiley, New York, 1968).

6. Galambos J., “Bonferroni inequalities”, *Ann. Probab.* **5**, 577–581 (1977).

7. Galambos J., Simonelli I., *Bonferroni-type inequalities with applications* (Springer-Verlag, New York, 1996).

8. Hoppe F. M., Seneta E., “A Bonferroni-type identity and permutation bounds”, *Intern. Statist. Rewiev* **58**, 253–261 (1990).

9. Kounias S., Marin J., “Best linear Bonferroni bounds”, *SIAM J. Appl. Math.* **30** (2), 307–323 (1976).

10. Kounias S., Sotirakoglou K., “Upper and lower bounds for the probability that r events occur”, *J. Math. Programming. Oper. Research* **27** (1–2), 63–78 (1993).

11. Margaritescu E., “Improved Bonferroni inequalities”, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* **33**, 509–515 (1988).

12. Móri T. F., Székely G. J., “A note on the background of several Bonferroni — Galambos-type inequalities”, *J. of Appl. Probab.* **22**, 836–843 (1985).

13. Prékopa A., “Boole — Bonferroni inequalities and linear programming”, *Oper. Research* **36**, 145–162 (1988).

14. Recsei E., Seneta E., “Bonferroni-type inequalities”, *Adv. Appl. Probab.* **19**, 508–511 (1987).

15. Sobel M., Uppuluri V. R. R., “On Bonferroni-type inequalities of the same degree for probabilities of unions and intersections”, *Ann. Math. Statist.* **43**, 1549–1558 (1972).

16. Walker A. M., “On the classical Bonferroni inequalities and the corresponding Galambos inequalities”, *J. Appl. Probab.* **18**, 757–763 (1981).

17. Chung K. L., Erdős P., “On the application of the Borel — Cantelli lemmaf”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, 179–186 (1952).

18. Dawson D. A., Sankoff D., “An inequality for probabilities”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **18**, 504–507 (1967).

19. Kounias E. G., “Bounds for the probability of a union, with applications”, *Ann. Math. Statist.* **39**, 2154–2158 (1968).

20. Kwerel S. M., “Bounds on the probability of the union and intersection of m events”, *Adv. Appl. Probab.* **7**, 431–448 (1975).

21. Boros E., Prékopa A., “Closed form two-sided bounds for probabilities that at least r and exactly r out of n events occurs”, *Math. Oper. Research* **14**, 317–342 (1989).

22. de Caen D., “A lower bound on the probability of a union”, *Discrete Math.* **169**, 217–220 (1997).

23. Kuai H., Alajaji F., Takahara G., “A lower bound on the probability of a finite union of events”, *Discrete Math.* **215**, 147–158 (2000).

24. Frolov A. N., “On inequalities for probabilities of unions of events and the Borel—Cantelli lemma”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **47**, issue 2, 68–75 (2014). https:/doi.org/10.3103/S1063454114020034

25. Frolov A. N., “On estimation of probabilities of unions of events with applications to the Borel — Cantelli lemmaf”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **48**, issue 3, 175–180 (2015). https:/doi.org/10.3103/S1063454115030036

26. Frolov A. N., “On inequalities for conditional probabilities of unions of events and the conditional Borel — Cantelli lemma”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **49**, issue 4, 379–388 (2016). https:/doi.org/10.3103/S1063454116040063

27. Frolov A. N., “On inequalities for values of first jumps of distribution functions and Hölder’s inequality”, *Statist. Probab. Lett.* **126**, 150–156 (2017).

Received: November 4, 2018
Revised: December 12, 2018
Accepted: December 20, 2018

Author’s information:

Andrei N. Frolov — a.frolov@spbu.ru