УДК 539.3 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1
MSC 74K20

Двухмерная модель анизотропной пластины второго порядка точности*

П. Е. Товстик

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Товстик П. Е.* Двухмерная модель анизотропной пластины второго порядка точности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1. С. 157–169. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.112

В линейном приближении рассматривается деформация тонкой упругой анизотропной неоднородной по толщине пластины. С использованием асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости построена двухмерная модель второго порядка точности (ВПТ) по отношению к малому параметру толщины для пластины с анизотропией общего вида (описываемой 21 модулем упругости). Получена система уравнений, описывающих перемещения среднего слоя, имеющая дифференциальный порядок, совпадающий с порядком модели Тимошенко—Рейсснера. Построенная модель пригодна для исследования статики, динамики и устойчивости многослойных, а также функционально градиентных пластин. Ранее модели ВПТ были построены для изотропных пластин и пластин с частными видами анизотропии. Модель ВПТ для анизотропии общего вида рассматривается впервые.

Ключевые слова: анизотропная неоднородная пластина, модель второго порядка точности.

1. Введение. Вывод двухмерных приближенных моделей тонких пластин и оболочек — это одна из классических задач механики. Классическая модель Кирхгофа—Лява может быть получена из трехмерных уравнений теории упругости с использованием гипотез о прямой нормали [1, 2]. Более сложная и в ряде случаев более точная модель Тимошенко—Рейсснера учитывает поперечный сдвиг [3, 4]. Ряд уточненных моделей основан на разложении неизвестных функций по степеням толщины [5], по полиномам Лежандра [6, 7]. Также двухмерные уравнения могут быть написаны непосредственно как уравнения движения двухмерной упругой среды [8].

Многочисленные исследования посвящены выводу двухмерных уравнений с использованием асимптотических разложений по степеням малого параметра толщины [9–12] и др. Нулевое приближение соответствует гипотезам о прямой нормали и приводит к модели Кирхгофа—Лява. Первое приближение, появляется лишь для анизотропных пластин с наклонной анизотропией. В остальных случаях (для изотропных, ортотропных и моноклинных пластин, однородных и неоднородных по толщине) первое приближение отсутствует, и внимание было сосредоточено на построении второго приближения — на уточненных моделях второго порядка точности (ВПТ). При этом для неоднородных по толщине анизотропных пластин возникают дополнительные трудности.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00580-а, 16-51-52025 МНТ-а).

Для изотропных однородных по толщине пластин уравнения ВПТ были построены в работе [13]. Для трансверсально изотропных многослойных пластин указанная задача была решена в работе [14]. Найденный при этом эквивалентный модуль поперечного сдвига в работах [15–17] был использован для построения обобщенной модели Тимошенко—Рейсснера и для решения частных задач [18, 19].

Для анизотропных материалов общего вида (с 21 модулем упругости) асимптотическое интегрирование трехмерных уравнений приводит к громоздким формулам. В работе [20] построено нулевое приближение, которое не учитывает эффектов поперечного сдвига и обжатия нормального волокна. Это приближение имеет ту же точность и тот же порядок, что и классическая модель Кирхгофа—Лява. Для моноклинного материала (с 13 модулями упругости), к которому сводится задача о многослойной пластине с ортотропными слоями, повернутыми друг относительно друга, задача несколько упрощается, ибо в этом случае трансверсальные напряжения сдвига выражаются только через деформации поперечного сдвига. В работе [21] для однородного по толщине моноклинного материала получены уравнения ВПТ. Целью настоящей работы является вывод уравнений ВПТ для пластины из неоднородного анизотропного материала общего вида.

2. Основные предположения и уравнения. В линейном приближении рассмотрим деформацию тонкой упругой анизотропной пластины постоянной толщины h. В декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad i = 1,2,3, \qquad -\frac{h}{2} \le x_3 = z \le \frac{h}{2}, \tag{2.1}$$

где $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ — напряжения, $f_i(x_1, x_2, x_3)$ — интенсивности внешней нагрузки.

Тензорные обозначения не используются. Деформации ε_{ij} выражаются через перемещения $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1,2,3$, по формулам

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i \ne j, \quad i,j = 1,2,3. \tag{2.2}$$

Деформации и напряжения будем записывать как 6-мерные векторы. Тогда соотношения упругости принимают вид [5]

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{E} = (E_{ij})_{i,j=1,\dots,6}\,, \\ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T\,, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12})^T\,. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь и в дальнейшем T обозначает транспонирование, для векторов и матриц используются жирные буквы, точкой $(\cdot)$ обозначается произведение векторов и матриц. Матрица $\boldsymbol{E}$ модулей упругости в рассматриваемом случае анизотропии общего вида содержит 21 независимый упругий модуль, она симметричная и положительно определенная. Предполагается, что модули упругости E_{ij} не зависят от тангенциальных координат x_1, x_2, но могут зависеть от координаты $x_3 = z$. Зависимость модулей от координаты z имеет место для функционально градиентных пластин, а для многослойных пластин модули $E_{i,j}$ являются кусочно постоянными функциями от z.

Как и в работах [14, 15], удобно разделить напряжения и деформации на группы тангенциальных $\boldsymbol{\sigma}_t,\ \boldsymbol{\varepsilon}_t$ и трансверсальных $\boldsymbol{\sigma}_n,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n$ напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_t &= (\sigma_{11},\, \sigma_{22},\, \sigma_{12})^T\,, \qquad && \boldsymbol{\sigma}_n = (\sigma_{13},\, \sigma_{23},\, \sigma_{33})^T\,,\\
\boldsymbol{\varepsilon}_t &= (\varepsilon_{11},\, \varepsilon_{22},\, \varepsilon_{12})^T\,, \qquad && \boldsymbol{\varepsilon}_n = (\varepsilon_{13},\, \varepsilon_{23},\, \varepsilon_{33})^T\,.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Тогда соотношения упругости (2.3) запишутся в виде

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{B}^T\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_n, \tag{2.5}$$

где

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16}\\ E_{12} & E_{22} & E_{26}\\ E_{16} & E_{26} & E_{66}\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} E_{15} & E_{25} & E_{56}\\ E_{14} & E_{24} & E_{46}\\ E_{13} & E_{23} & E_{36}\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} E_{55} & E_{45} & E_{35}\\ E_{45} & E_{44} & E_{34}\\ E_{35} & E_{34} & E_{33}\end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Исключение трансверсальных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ из соотношений (2.5) дает

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{C}^{-1}\cdot\mathbf{B}^T\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_t, \tag{2.7}$$

где

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}^T. \tag{2.8}$$

Пренебрегая малыми напряжениями $\boldsymbol{\sigma}_n$, получаем приближенные соотношения упругости

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_t, \tag{2.9}$$

связывающие тангенциальные напряжения и деформации. Эти соотношения соответствуют классической модели Кирхгофа—Лява. Построенную в работе [20] на основе соотношений (2.8) приближенную модель изгиба анизотропной пластины будем называть нулевым приближением. Оно приведено в п. 4 настоящей статьи.

Лицевые плоскости пластины $z = \pm h/2$ считаем свободными, что дает граничные условия

$$\sigma_{i3} = 0,\ i = 1,2,3, \quad z = \pm h/2. \tag{2.10}$$

Если приложены поверхностные силы, их включаем в выражение для объемных сил, используя дельта-функцию.

3. Преобразование системы уравнений. Введем безразмерные величины (со значком $\sim$) по формулам

$$\begin{aligned}
&\{x_1, x_2, u_1, u_2, u_3\} = l\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, w\}, \quad \{E_{ij}, \sigma_{ij}\} = E\{\tilde{E}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}\},\\
&x_3 = hz, \quad \mu = \frac{h}{l}, \quad f_i = \frac{E}{l}\tilde{f}_i,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где l, E — характерные значения длины волны деформации в тангенциальных направлениях и модулей упругости. Предполагаем, что $l \gg h$, поэтому μ — малый параметр. В дальнейшем значок $\sim$ опускаем.

Уравнения (2.1), (2.2) приводят к системе уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial z} = \mu\varepsilon_{33},\\
&\frac{\partial u_k}{\partial z} = -\mu(p_k w - \varepsilon_{k3}), \qquad p_k = \frac{\partial()}{\partial x_k},\\
&\frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial z} = -\mu(p_1\sigma_{1k} + p_2\sigma_{2k} + f_k), \quad k = 1,2,\\
&\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = -\mu(p_1\sigma_{13} + p_2\sigma_{23} + f_3).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

В системе (3.2) основными неизвестными функциями являются функции $w, u_1, u_2, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$. Деформации $\varepsilon_{i3},\ i = 1,2,3$, и напряжения $\sigma_{ij},\ i,j = 1,2$, входящие в систему (3.2), определяются из соотношений (2.7).

Предположим, что все модули упругости имеют один и тот же порядок и неизвестные функции не меняют порядок при дифференцировании. Тогда, принимая, что $w \sim 1$, находим порядки остальных неизвестных функций в системе (3.2):

$$
w \sim 1, \quad \{u_i, \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\sigma}_t\} \sim \mu, \quad \{\sigma_{13}, \sigma_{23}\} \sim \mu^2, \quad \sigma_{33} \sim \mu^3. \tag{3.3}
$$

Оценки (3.3) будут выполнены, если нагрузки удовлетворяют оценкам

$$
\{f_1, f_2\} \sim \mu, \quad f_3 \sim \mu^2, \tag{3.4}
$$

что и предполагается.

Для краткости записи введем двухмерные векторы

$$
\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^T, \quad \boldsymbol{\sigma}_s = (\sigma_{13}, \sigma_{23})^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = (\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})^T, \quad \boldsymbol{f}_t = (f_1, f_2)^T, \tag{3.5}
$$

дифференциальные операторы

$$
\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)^T, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & p_2 & p_1 \end{pmatrix}^T \tag{3.6}
$$

и интегральные операторы

$$
\boldsymbol{I}_a(Z) \equiv \int_{-1/2}^{1/2} Z dz, \quad \boldsymbol{I}(Z) \equiv \int_{-1/2}^{z} Z(z)\,dz, \quad \boldsymbol{I}_0(Z) \equiv \int_0^z Z(z)\,dz. \tag{3.7}
$$

В этих обозначениях получим $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\sigma}_n = (\boldsymbol{\sigma}_s^T, \sigma_{33})^T$.

Запишем уравнения (3.2) в форме интегральных соотношений:

$$
\begin{aligned}
&w = w_0 + \mu\boldsymbol{I}_0(\varepsilon_{33}), && \boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{C}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\varepsilon}_t),\\
&\boldsymbol{u} = \mu\boldsymbol{u}_0 - \mu\,\boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{p}\,w - \boldsymbol{\varepsilon}_s), && \boldsymbol{\varepsilon}_n = (\boldsymbol{\varepsilon}_s^T, \varepsilon_{33})^T,\\
&\boldsymbol{\sigma}_s = -\mu\,\boldsymbol{I}(\boldsymbol{P}^T\cdot\boldsymbol{\sigma}_t + \mu\boldsymbol{f}_t), && \boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n,\\
&\sigma_{33} = -\mu\,\boldsymbol{I}(\boldsymbol{p}^T\cdot\boldsymbol{\sigma}_s + \mu^2 f_3), && \boldsymbol{\sigma}_n = (\boldsymbol{\sigma}_s^T, \sigma_{33})^T.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Здесь подлежащие определению произвольные функции $w_0(x_1,x_2)$, $\boldsymbol{u}_0(x_1,x_2)$ описывают перемещения слоя $z = 0$. С учетом (3.7) функции $\boldsymbol{\sigma}_s$ и σ_{33} удовлетворяют граничным условиям (2.10) при $z = -1/2$. Функции w_0 и $\boldsymbol{u}_0$ находим из условий (2.10) при $z = 1/2$.

В связи с тем, что $\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\boldsymbol{\varepsilon}_s^T, \varepsilon_{33})^T$, $\boldsymbol{\sigma}_n = (\boldsymbol{\sigma}_s^T, \sigma_{33})^T$ и порядок функций $\boldsymbol{\sigma}_s$ и σ_{33} различен, перепишем соотношения (2.7). Введем блочную структуру матриц $\boldsymbol{C}^{-1} = \{G_{ij}\}$ и $\boldsymbol{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}^T = \{S_{ij}\}$:

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{G} & \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{g}^T & c_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = (G_{13}, G_{23})^T, \quad c_3 = G_{33},$$
$$\boldsymbol{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{s} = (S_{31}, S_{32}, S_{33}). \tag{3.9}$$

Теперь соотношения (2.7) дают

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_t &= \boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{s}^T \sigma_{33}, \\ \varepsilon_s &= \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{g}\, \sigma_{33} - \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{u}, \\ \varepsilon_{33} &= \boldsymbol{g}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + c_3\, \sigma_{33} - \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Тем самым правые части интегральных уравнений (3.8) выражены через основные неизвестные. Проведем изменение масштаба неизвестных и внешних нагрузок в соответствии с их порядками (3.3), (3.4):

$$\boldsymbol{u} = \mu \hat{\boldsymbol{u}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_s = \mu^2 \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s, \quad \sigma_{33} = \mu^3 \hat{\sigma}_{33}, \quad \boldsymbol{f}_t = \mu \hat{\boldsymbol{f}}_t, \quad f_3 = \mu^2 \hat{f}_3. \tag{3.11}$$

Опуская значок $\wedge$, с учетом формул (3.10) перепишем уравнения (3.8):

$$\begin{aligned} w &= w_0 - \mu^2 \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{s}_P \cdot \boldsymbol{u})) + \mu^3 \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{g}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s) + \mu^4 \boldsymbol{I}_0(c_3\, \sigma_{33}), \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{p}\, w) - \mu \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P \cdot \boldsymbol{u}) + \mu^2 \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s) + \mu^3 \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{g}\, \sigma_{33}), \\ \boldsymbol{\sigma}_s &= -\boldsymbol{I}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}) - \mu \boldsymbol{I}(\boldsymbol{S}_P^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s) - \mu^2 \boldsymbol{I}(\boldsymbol{s}_P^T \sigma_{33}) - \boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}_t), \\ \sigma_{33} &= -\boldsymbol{I}(\boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s) - \boldsymbol{I}(f_3), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где для краткости записи введены обозначения

$$\boldsymbol{L}(z) = \boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{A}^*(z) \cdot \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{S}_P(z) = \boldsymbol{S}(z) \cdot \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{s}_P(z) = \boldsymbol{s}(z) \cdot \boldsymbol{P}. \tag{3.13}$$

В системе (3.12) все основные неизвестные функции имеют порядок единицы. Система (3.12) является точной и удобна для построения решения методом итераций. Ниже будет построена модель ВПТ по отношению к малому параметру μ. Поэтому слагаемые с множителями μ^3 и μ^4 в первых двух уравнениях (3.12) могут быть опущены.

4. Нулевое приближение. При построении нулевого приближения полагаем в уравнениях (3.12) $\mu = 0$ и последовательно интегрируем эти уравнения. Получаем [20]

$$\begin{aligned} w^{(0)}(x_1, x_2, z) &= w_0(x_1, x_2), \\ \boldsymbol{u}^{(0)}(x_1, x_2, z) &= \boldsymbol{u}_0(x_1, x_2) - z\, \boldsymbol{p}\, w_0(x_1, x_2), \\ \boldsymbol{\sigma}_s^{(0)}(x_1, x_2, z) &= -\boldsymbol{I}(\boldsymbol{L}(z) \cdot \boldsymbol{u}^{(0)}) - \boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}_t), \\ \sigma_{33}^{(0)}(x_1, x_2, z) &= \boldsymbol{I}\boldsymbol{I}(\boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{L}(z) \cdot \boldsymbol{u}^{(0)}) + \boldsymbol{I}(\boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{f}_t) - \boldsymbol{I}(f_3). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Граничные условия $\boldsymbol{\sigma}_s^{(0)}(1/2) = \sigma_{33}^{(0)}(1/2) = 0$ дают уравнения

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma}_s^{(0)}(x_1, x_2, 1/2) = -\boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{L}(z)\cdot \boldsymbol{u}^{(0)}) - \boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{f}_t) = 0, \\ &\sigma_{33}^0(x_1, x_2, 1/2) = \boldsymbol{I}_a\boldsymbol{I}(\boldsymbol{p}^T\cdot \boldsymbol{L}(z)\cdot \boldsymbol{u}^{(0)}) + \boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{p}^T\cdot \boldsymbol{f}_t) - \boldsymbol{I}_a(f_3) = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Пользуясь тождеством

$$\boldsymbol{I}_a\boldsymbol{I}(Z(z)) = (1/2)\boldsymbol{I}_a(Z(z)) - \boldsymbol{I}_a(z\, Z(z)) \tag{4.3}$$

и учитывая равенство $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}_0 - z\,\boldsymbol{p}\,w_0$, запишем уравнения нулевого приближения в виде [20]

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}_0\cdot \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{N}_1 w_0 + \boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{0}, \\ &\boldsymbol{N}_1^T\cdot \boldsymbol{u}_0 - Q_2 w_0 + m + F_3 = 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}_0 = \boldsymbol{P}^T\cdot \boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{A}^*(z))\cdot \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{P}^T\cdot \boldsymbol{I}_a(z\,\boldsymbol{A}^*(z))\cdot \boldsymbol{P}\cdot \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{f}_t), \\ &Q_2 = \boldsymbol{p}^T\cdot \boldsymbol{P}^T\cdot \boldsymbol{I}_a(z^2\,\boldsymbol{A}^*(z))\cdot \boldsymbol{P}\cdot \boldsymbol{p}, \quad F_3 = \boldsymbol{I}_a(f_3), \quad m = \boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{p}^T\cdot \boldsymbol{f}_t). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Подробные выражения операторов в системе (4.4) имеют вид [5, 20]

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}_0 = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} L_{11} &= a_{11}^{(0)} p_1^2 + 2a_{13}^{(0)} p_1 p_2 + a_{33}^{(0)} p_2^2, \\ L_{12} &= a_{13}^{(0)} p_1^2 + (a_{12}^{(0)} + a_{33}^{(0)}) p_1 p_2 + a_{23}^{(0)} p_2^2, \\ L_{22} &= a_{33}^{(0)} p_1^2 + 2a_{23}^{(0)} p_1 p_2 + a_{22}^{(0)} p_2^2, \end{aligned} \\ &\boldsymbol{N}_1 = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} N_1 &= a_{11}^{(1)} p_1^3 + 3a_{13}^{(1)} p_1^2 p_2 + (a_{12}^{(1)} + 2a_{33}^{(1)}) p_1 p_2^2 + a_{23}^{(1)} p_2^3, \\ N_2 &= a_{13}^{(1)} p_1^3 + (a_{12}^{(1)} + 2a_{33}^{(1)}) p_1^2 p_2 + 3a_{23}^{(1)} p_1 p_2^2 + a_{22}^{(1)} p_2^3, \end{aligned} \\ &Q_2 = a_{11}^{(2)} p_1^4 + a_{13}^{(2)} p_1^3 p_2 + 2(a_{12}^{(2)} + 2a_{33}^{(2)}) p_1^2 p_2^2 + 4a_{23}^{(2)} p_1 p_2^3 + a_{22}^{(2)} p_2^4, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где коэффициенты $a_{ij}^{(k)}$ зависят от моментов нулевого, первого и второго порядков от коэффициентов матрицы упругих модулей $\boldsymbol{A}^*(z)$:

$$a_{ij}^{(k)} = \boldsymbol{I}(z^k A_{ij}^*(z)) = \int_{-1/2}^{1/2} z^k A_{ij}^*(z)\, dz, \quad i,j = 1,2,3, \quad k = 0,1,2. \tag{4.7}$$

Расчеты показали [21], что если все элементы матрицы упругих модулей $\boldsymbol{E}$ (см. (2.3)) имеют один порядок, то нулевое приближение имеет удовлетворительную точность. Если же элементы матрицы $\boldsymbol{C}$, стоящей в формулах (3.9) в знаменателе, малы, точность нулевого приближения недостаточна, что стимулирует построение старших приближений. Физически это означает необходимость учета влияния поперечного сдвига, которое не учитывается нулевым приближением.

5. Старшие приближения. Первое приближение вносит поправку порядка μ в нулевое приближение. Отметим, что при $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ в системе (3.12) слагаемые порядка μ исчезают и можно сразу переходить ко второму приближению. В силу формул (3.9) случай $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ реализуется для моноклинного материала, для которого

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{56} \\ 0 & 0 & E_{46} \\ 0 & 0 & E_{36} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} E_{55} & E_{45} & 0 \\ E_{45} & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Многослойную пластину, состоящую из системы ортотропных слоев с произвольно ориентированными направлениями ортотропии, можно рассматривать как моноклинную пластину с кусочно постоянными модулями упругости [5, 21].

Построим первое приближение для анизотропного материала общего вида, для которого $\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{0}$. Такую анизотропию будем называть наклонной, ибо она получается у композитной пластины, состоящей из ортотропной матрицы, подкрепленной системой нитей, наклоненных к плоскости пластины [22].

Первое приближение в случае наклонной анизотропии имеет вид

$$\begin{aligned}
&w^{(1)} = w_0,\\
&\boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{p}\, w^{(1)}) - \mu \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P \cdot \boldsymbol{u}^{(0)}) = \boldsymbol{u}^{(0)} - \mu \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P \cdot \boldsymbol{u}^{(0)}),\\
&\boldsymbol{\sigma}_s^{(1)} = -\boldsymbol{I}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}^{(1)}) - \mu \boldsymbol{I}(\boldsymbol{S}_P^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{(0)}) - \boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}_t) =\\
&\qquad = -\boldsymbol{I}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}^{(0)}) + \mu \boldsymbol{I}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P \cdot \boldsymbol{u}^{(0)})) + \mu \boldsymbol{I}(\boldsymbol{S}_P^T \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}^{(0)})) - \boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}_t),\\
&\sigma_{33}^{(1)} = -\boldsymbol{I}(\boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{(1)}) - \boldsymbol{I}(f_3) =\\
&\qquad = \boldsymbol{II}(\boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}^{(0)}) - \mu \boldsymbol{II}\left(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P \cdot \boldsymbol{u}^{(0)}) + \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{S}_P^T \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}^{(0)})\right) +\\
&\qquad + \boldsymbol{II}(\boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{f}_t) - \boldsymbol{I}(f_3).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Продолжая итерации, находим второе приближение:

$$\begin{aligned}
&w^{(2)} = w_0 + \mu^2 \boldsymbol{I}_0(\sigma_{33}^{(0)}) = w_0 - \mu^2 \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{s}_P \cdot \boldsymbol{u}^{(0)})),\\
&\boldsymbol{u}^{(2)} = \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{p}\, w^{(2)}) - \mu \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P \cdot \boldsymbol{u}^{(1)}) + \mu^2 \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{(0)}) =\\
&\qquad = \boldsymbol{u}^{(0)} - \mu \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P \cdot \boldsymbol{u}^{(0)}) + \mu^2 \boldsymbol{I}_0 \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s}_P \cdot \boldsymbol{u}^{(0)}) +\\
&\qquad + \mu^2 \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P \cdot \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P \cdot \boldsymbol{u}^{(0)})) - \mu^2 \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}^{(0)})) - \mu^2 \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}_t)),\\
&\boldsymbol{\sigma}_s^{(2)} = -\boldsymbol{I}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}^{(2)}) - \mu \boldsymbol{I}(\boldsymbol{S}_P^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{(1)}) - \mu^2 \boldsymbol{I}(\boldsymbol{s}_P^T \sigma_{33}^{(0)}) - \boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}_t),\\
&\sigma_{33}^{(2)} = -\boldsymbol{I}(\boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{(2)}) - \boldsymbol{I}(f_3).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Представим величину $\boldsymbol{\sigma}_s^{(2)}$ в виде

$$\boldsymbol{\sigma}_s^{(2)} = -\boldsymbol{I}(\boldsymbol{L}^* \cdot \boldsymbol{u}^{(0)} + \boldsymbol{f}^*), \quad \boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}_0^* + \mu \boldsymbol{L}_1^* + \mu^2 \boldsymbol{L}_2^*, \tag{5.4}$$

где

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}_0^* = \boldsymbol{L} = \boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{A}^*(z) \cdot \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{L}_1^* = -\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P) - \boldsymbol{S}_P^T \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{L}),\\
&\boldsymbol{L}_2^* = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{I}_0 \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s}_P) + \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P \cdot \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P)) - \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{L})) +\\
&\qquad + \boldsymbol{S}_P^T \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S}_P)) + \boldsymbol{S}_P^T \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{S}_P^T \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{L})) + \boldsymbol{s}_P^T \cdot \boldsymbol{II}(\boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{L})],\\
&\boldsymbol{f}^* = \boldsymbol{f}_t - \mu \boldsymbol{S}_P^T \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}_t) - \mu^2 [\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}_t)) + \boldsymbol{s}_P^T \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}_t) - \boldsymbol{s}_P^T \boldsymbol{I}(f_3)].
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Тогда в силу четвертого уравнения (3.12) получим

$$\sigma_{33}^{(2)} = \boldsymbol{II}(\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{u}^{(0)} + \boldsymbol{f}^*) - \boldsymbol{I}(f_3). \tag{5.6}$$

Как и в нулевом приближении, граничные условия $\boldsymbol{\sigma}_s^{(2)} = \sigma_{33}^{(2)} = 0$ при $z = 1/2$ дают уравнения для $\boldsymbol{u}_0$ и w_0:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{L}^* \cdot \boldsymbol{u}^{(0)} + \boldsymbol{f}^*) = 0, \qquad \boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{p}\, z\, w_0, \\
&\boldsymbol{I}_a \boldsymbol{I}(\boldsymbol{p}^T \cdot (\boldsymbol{L}^* \cdot \boldsymbol{u}^{(0)} + \boldsymbol{f}^*)) - \boldsymbol{I}_a(f_3) = 0.
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Пользуясь тождеством (4.3) при $Z = \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{u}^{(0)} + \boldsymbol{f}^*$ и учитывая, что с $\boldsymbol{I}_a(Z) = 0$, запишем систему (5.7) в виде

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{L}^*) \cdot \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{L}^* \cdot \boldsymbol{p}\, z)\, w_0 + \boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{f}^*) = 0, \\
&\boldsymbol{I}_a(z\, \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{L}^*) \cdot \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{I}_a(z\, \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{L}^* \cdot \boldsymbol{p}\, z)\, w_0 + \boldsymbol{I}_a(z\, \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{f}^*) + F_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Система (5.8) — это система трех дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами относительно неизвестных функций $\boldsymbol{u}_0 = (u_{10}, u_{20})$, w_0. Дифференциальные операторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{S}_P$, $\boldsymbol{s}_P$ имеют первый порядок, а оператор $\boldsymbol{L}$ — второй. В силу (5.5) порядок операторов $\boldsymbol{L}_k^*$ равен $2 + k$. Наличие множителя $\boldsymbol{p}$ или $\boldsymbol{p}^T$ увеличивает порядок на единицу. Развернутая запись уравнений (5.7) весьма громоздка и здесь не приводится (для сравнения см. формулы (4.5)–(4.7) нулевого приближения).

В случае переменных по z модулей упругости для вычисления коэффициентов нужно вычислять повторные интегралы. Рассмотрим оператор $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{L}))$, входящий в $\boldsymbol{L}_2^*$. В развернутой записи он имеет вид

$$
\int_{-1/2}^{1/2} \boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{A}^*(z) \cdot \boldsymbol{P} \cdot \left(\int_0^z \boldsymbol{G}(z_1) \cdot \left(\int_{-1/2}^{z_1} \boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{A}^*(z_2) \cdot \boldsymbol{P}\, dz_2 \right) dz_1 \right) dz. \tag{5.9}
$$

Если же модули упругости постоянны, вместо интегралов появляется множитель $1/24$. Во втором слагаемом второго уравнения (5.8) тот же оператор встречается в виде $z\, \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{I}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{p}\, z))$, и его развернутая запись такова:

$$
\int_{-1/2}^{1/2} \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{P}^T \cdot\, z\boldsymbol{A}^*(z) \cdot \boldsymbol{P} \cdot \left(\int_0^z \boldsymbol{G}(z_1) \cdot \left(\int_{-1/2}^{z_1} \boldsymbol{P}^T \cdot z_2 \boldsymbol{A}^*(z_2) \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{p}\, dz_2 \right) dz_1 \right) dz. \tag{5.10}
$$

Для постоянных модулей упругости множитель равен $1/120$.

Для моноклинного материала $\boldsymbol{S} = 0$ и в системе (5.8) $\boldsymbol{L}_1^* = 0$, а в операторе $\boldsymbol{L}_2^* = 0$ обращаются в нуль слагаемые с множителем $\boldsymbol{S}_P$.

Для симметричной по толщине пластины, у которой модули упругости являются четными функциями z часть коэффициентов обращается в нуль. В нулевом приближении в силу формул (4.6), (4.7) $\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{0}$ и система распадается на уравнения, описывающие тангенциальные и трансверсальные (изгибные) деформации. В старших приближениях для пластины с наклонной анизотропией указанное расщепление не имеет места, однако для пластины из моноклинного материала возможно раздельное рассмотрение тангенциальных и трансверсальных деформаций. Как показано в [15–17], для пластины из трансверсально изотропного материала указанное раздельное рассмотрение возможно даже для несимметричной по толщине пластины. Это раздельное рассмотрение возможно за счет смещения нейтрального слоя по отношению со срединному. Заметим, что у неоднородной пластины из ортотропного материала (а также при более общих видах анизотропии материала) нейтральный слой не существует и раздельное рассмотрение невозможно.

6. Уравнения свободных колебаний анизотропной пластины. Рассмотрим свободные колебания анизотропной неоднородной по толщине пластины. В качестве внешних нагрузок выступают силы инерции, которые в исходных обозначениях равны

$$f_i = \rho(x_3)\omega^2 u_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6.1}$$

где $\rho(x_3)$ — плотность материала, ω — частота колебаний. Переход к безразмерным переменным по формулам (3.1) и (3.11) приводит к выражениям для нагрузок $\boldsymbol{f}_t$ и f_3, входящих в формулы (5.5) и (5.8):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f}_t = \mu^2 \lambda \hat{\rho}(z) \boldsymbol{u}_0, \qquad f_3 = \lambda \hat{\rho}(z) w_0, \\ &\lambda = \frac{l^2 \rho_0 \omega^2}{\mu^2 E}, \quad \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \rho_0 = \textstyle\int_{-1/2}^{1/2} \rho(z) dz, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где λ — параметр частоты, ρ_0 — средняя по толщине плотность.

В случае свободных колебаний система (5.8) принимает вид

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{L}^*) \cdot \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{L}^* \cdot \boldsymbol{p}\, z)\, w_0 + \boldsymbol{I}_a(\boldsymbol{f}^*) = 0, \qquad \boldsymbol{f}^* = O(\mu^2 \boldsymbol{u}_0), \\ &\boldsymbol{I}_a(z\, \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{L}^*) \cdot \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{I}_a(z\, \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{L}^* \cdot \boldsymbol{p}\, z)\, w_0 + \boldsymbol{I}_a(z\, \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{f}^*) + \lambda w_0 = 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Поперечные перемещения вносят существенно больший вклад в решение, чем продольные, и система (6.3) описывает преимущественно изгибные колебания.

При построении низкочастотной части спектра свободных колебаний пластины конечных размеров, например, прямоугольной, возникает трудность, связанная с удовлетворением граничных условий. Для изотропной или ортотропной пластины при шарнирном опирании краев возможно получение решения в явном виде в результате разделения переменных $w_0(x_1, x_2) = W_0 \sin q_1 x_1 \sin q_2 x_2$. Для анизотропии более общего вида (моноклинной, наклонной) указанное разделение переменных невозможно ни при каких граничных условиях. Поэтому для построения решения приходится прибегать к вариационным численным методам [5, 23, 24].

7. Гармонические решения для бесконечной пластины. Ищем решение системы уравнений (5.7) в виде

$$\{\boldsymbol{u}_0,\ w_0\}(x_1, x_2) = \{\boldsymbol{U},\ W\} e^{i(q_1 x_1 + q_2 x_2)}, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{7.1}$$

где $\boldsymbol{U},\ W$ — комплексные амплитуды перемещений, $q_1,\ q_2$ — заданные волновые числа. Не нарушая общности, считаем, что $q_1^2 + q_2^2 = 1$, а характерная длина волны l в формулах (3.1) будет равна $l = 2\pi/\mu$.

Решение вида (7.1) реализуется при перемещениях, вызванных гармонической нагрузкой

$$\{\boldsymbol{f}_t,\ f_3\}(x_1, x_2) = \{\boldsymbol{f}_t^0,\ f_3^0\} e^{i(q_1 x_1 + q_2 x_2)}, \tag{7.2}$$

а также при свободных колебаниях, описываемых системой (6.3). Эта же система описывает и распространение длинных плоских волн по пластине:

$$\{\boldsymbol{u}_0,\ w_0\}(x_1, x_2, t) = \{\boldsymbol{U},\ W\} e^{i(q_1 x_1 + q_2 x_2 - vt)}, \tag{7.3}$$

где v — безразмерная скорость распространения волны, а вектор $\boldsymbol{n} = (q_1, q_2)$ описывает направление распространения волны. При этом в системе (6.3) имеем $\lambda = v^2$.

Для гармонических функций (7.1)–(7.3) системы уравнений (5.8) и (6.3) переходят в системы линейных алгебраических уравнений после формальной замены операторов дифференцирования p_1 и p_2 на числа iq_1 и iq_2.

Для получения прогиба вида $w_0(x_1, x_2) = W \sin q_1 x_1 \sin q_2 x_2$ следует рассматривать линейные комбинации решений вида (7.1).

В работе [25] рассмотрены свободные колебания и волны в балке из материала с наклонной анизотропией (с 6 упругими модулями).

8. Заключение. Построена двухмерная система уравнений ВПТ, описывающая деформацию тонкой неоднородной по толщине пластины с анизотропией общего вида. Завершен процесс построения уравнений ВПТ, начатый в работах для однородной изотропной пластины [13], для трансверсально изотропной неоднородной по толщине (в том числе, многослойной) пластины [14–17] и для неоднородной пластины из моноклинного материала, к которому приводится многослойная пластина, состоящая из ортотропных слоев с произвольной ориентацией ортотропии [21]. Каждый следующий этап приводит к усложнению системы, ведущему к добавлению новых слагаемых. Следует отметить, что дифференциальный порядок всех моделей второго порядка точности одинаковый и совпадает с порядком модели Тимошенко—Рейсснера. В то же время порядок нулевого приближения, которое при определенных предположениях дает удовлетворительную точность, совпадает с порядком модели Кирхгофа—Лява.

Полученная система (5.7) весьма громоздка. Целью последующих исследований может быть выявление малых слагаемых второго порядка, которые могут быть отброшены без существенной потери точности. Для трансверсально изотропных пластин эта задача была решена [16] и было установлено, что наиболее важными являются слагаемые, учитывающие поперечный сдвиг, а обжатием нормали можно пренебречь. Задача может быть приведена к задаче об однородной пластине Тимошенко—Рейсснера с эквивалентной жесткостью на поперечный сдвиг. Для пластин с анизотропией более общего вида вопрос об отбрасывании малых членов остается открытым.

Дальнейшие исследования могут быть посвящены решению различных частных задач прочности, колебаний и устойчивости, а также применению построенной модели для развития теории анизотропных оболочек.

Литература

1. *Kirchhoff G.* Vorlesungen uber Matematische Physik. Leipzig: Mechanik, 1876.

2. *Love A. E. H.* A treatise on the mathematical theory elasticity. Cambridge Univ. Press, 1927.

3. *Timoshenko S. P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Philos. Mag. Ser. 6. 1921. Vol. 4, no. 242.

4. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // Trans. ASME, J. Appl. Mech. 1945. Vol. 12. P. 69–77.

5. *Reddy J. N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. CRC Press, 2004. 831 p.

6. *Векуа И. Н.* О методе расчета призматических оболочек // Тр. Тбилис. мат. инст. 1955. Т. 21. С. 191–259.

7. *Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1996.

8. *Еремеев В. А., Зубов Л. М.* Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008.

9. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.

10. *Аголовян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997.

11. *Vetukov Y., Kuzin A., Krommer M.* Asymptotic splitting of the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates // Int. J. of Solids and Structures. 2011. Vol. 40. P. 12–23.

12. *Schneider P., Kienzler R.* A Reissner-type plate theory for monoclinic material derived by extending the uniform-approximation technique by orthogonal tensor decompositions of nth-order gradients // Meccanica. 2017. Vol. 52. P. 2143–2167.

13. *Kienzler R., Shneider P.* Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation // Shell Structures: Theory and Applications. Proc. 10th SSTA 2013 Conf. 2014. Vol. 3. P. 109–112.

14. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Уравнение изгиба тонкой пластины второго порядка точности // ДАН. 2014. Т. 457, № 60. С. 660–663.

15. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Обобщенная модель Тимошенко—Рейсснера сильно неоднородной по толщине пластины // ДАН. 2016. Vol. 469, no. 5. P. 562–566.

16. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Generalized Timoshenko—Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // ZAMM. 2017. Vol. 97, no. 3. P. 296–308.

17. *Tovstik P., Tovstik T.* An elastic plate bending equation of second-order accuracy // Acta Mechanica. 2017. Vol. 228, no. 10. P. 3403–3419.

18. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Континуальная модель многослойной нанопластины // ДАН. 2016. Vol. 471, no. 3.

19. *Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Free vibrations of a transversely isotropic plate with application to a multilayer nano-plate // Mechanics for Materials and Technologies. In: Advanced Structured Materials. Springer International Publishing AG. Cham, 2017. Vol. 46. P. 349–362.

20. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Двухмерная модель пластины из анизотропного неоднородного материала // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 32–45.

21. *Морозов Н. Ф., Беляев А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Двухмерные уравнения второго порядка точности для многослойной пластины с ортопропными слоями // Доклады Академии наук. 2018. Т. 483, № 1. С. 37–42.

22. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Двухмерные модели пластин из анизотропного материала // Тр. семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». Вып. 3. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. С. 4–16.

23. *Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А.* Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 1. Постановка задачи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 300–309.

24. *Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А.* Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 2. Метод решения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 678–688.

25. *Товстик П. Е., Товстик Т. П., Наумова Н. В.* Длинноволновые колебания и волны в анизотропной балке // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 323–335.

Статья поступила в редакцию 16 августа 2018 г.;
после доработки 3 сентября 2018 г.;
рекомендована в печать 27 сентября 2018 г.

Контактная информация:

Товстик Петр Евгеньевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; peter.tovstik@vail.ru

Two-dimensional model of an anisotropic plate of the second-order accuracy

P. E. Tovstik

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Tovstik P. E. Two-dimensional model of an anisotropic plate of the second order accuracy. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 1, pp. 157–169. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.112 (In Russian)

In a linear approximation a deformation of a thin elastic anisotropic heterogeneous in the thickness direction plate is investigated. By using an asymptotic solution of 3D equations of the theory of elasticity, a 2D model of the second order accuracy with respect to the small thickness parameter is built for a plate with the general anisotropy that is described by 21 elastic modules. The obtained system of equations describes deflections of a middle layer and has the differential order, coinciding with the order of the Timoshenko—Reissner model. The model is acceptable to an investigation of statics, dynamics and stability of multi-layered, and also functionally graded plates. In the previous works, the models of the second-order accuracy were constructed for isotropic plates and for plates with partial kinds of anisotropy. The general anisotropy is studied first.

Keywords: anisotropic heterogeneous plate, model of the second-order accuracy.

References

1. Kirchhoff G., *Vorlesungen uber Matematische Physik* (Mechanik, Leipzig, 1876).

2. Love A. E. H., *A treatise on the mathematical theory elasticity* (Cambridge Univ. Press, 1927).

3. Timoshenko S. P., "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars", *Philos. Mag. Ser. 6.* **4**(242) (1921).

4. Reissner E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **12**, 69–77 (1945).

5. Reddy J. N., *Mechanics of laminated composite plates and shells* (CRC Press, 2004, 831 p.).

6. Vekua I. N., "On one method of calculating prismatic shells", *Trudy Tbilis. Mat. Inst.* **2**1, 191–259 (1955). (In Russian)

7. Rodionova V. A., Titaev B. F., Chernykh K. F., *Applied theory of anisotropic plates and shells* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 1996). (In Russian)

8. Eremeev V. A., Zubov L. M., *Mechanics of elastic shells* (Nauka Publ., Moscow, 2008). (In Russian)

9. Gol'denveizer A. L., *Theory of elastic thin shells* (Nauka Publ., Moscow, 1976). (In Russian)

10. Agolovyan L. A., *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells* (Nauka Publ., Moscow, 1997) [in Russian].

11. Vetukov Y., Kuzin A., Krommer M., "Asymptotic splitting of the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates", *Int. J. of Solids and Structures* **40**, 12–23 (2011).

12. Schneider P., Kienzler R., "A Reissner-type plate theory for monoclinic material derived by extending the uniform-approximation technique by orthogonal tensor decompositions of nth-order gradients", *Meccanica* **52**, 2143–2167 (2017).

13. Kienzler R., Shneider P., "Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation", *Shell Structures: Theory and Applications. Proc. 10th SSTA 2013 Conf.* **3**, 109–112 (2014).

14. Tovstik P. E., Tovstik T. P., "A thin-plate bending equation of second-order accuracy", *Doklady Physics* **59**(8), 389–392 (2014).

15. Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Generalized Timoshenko-Reissner model for a multilayer plate", *Mechanics of Solids* **51**(5), 527–537 (2016).

16. Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Generalized Timoshenko—Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction", *ZAMM* **97**(3), 296–308 (2017).

17. Tovstik P., Tovstik T., "An elastic plate bending equation of second-order accuracy", *Acta Mechanica* **228**(10), 3403–3419 (2017).

18. Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., "A continuum model of a multilayer nanosheet", *Doklady Physics* **61**(11), 567–570 (2016).

19. Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Free vibrations of a transversely isotropic plate with application to a multilayer nano-plate", *Mechanics for Materials and Technologies.* In: *Advanced Structured Materials* **46**, 349–362 (Springer International Publishing AG, Cham, 2017).

20. Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Two-dimensional model of a plate made of an anisotropic inhomogeneous material", *Mechanics of Solids* **52**(2), 144–154 (2017).

21. Morozov N. F., Belyaev A. K., Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Two-dimensional equations of the second order accuracy for a multi-layered plate with orthotropic layers", *Doklady Physics* **63**(11), 471–475 (2018).

22. Tovstik P. E., Tovstik T. P., “Two-dimensional models of a plate made of an anisotropic material”, *Trudy seminara “Komp’uternye metody v mekhanire sploshnoi sredy”* **3**, 4–16 (St. Petersburg Univ. Publ., St. Petersburg, 2008). (In Russian)

23. Parshina L. V., Ryabov V. M., Yartsev B. A., “Energy dissipation during vibrations of nonuniform composite structures. 1. Formulation of problem”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy.* **5 (63)**, issue 2, 300–309 (2018). (In Russian)

24. Parshina L. V., Ryabov V. M., Yartsev B. A., “Energy dissipation during vibrations of nonuniform composite structures. 2. Method of solution”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5 (63)**, issue 4, 678–688 (2018). (In Russian)

25. Tovstik P. E., Tovstik T. P., Naumova N. V., “Long-wave vibrations and waves in anisotropic beam”, *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4 (62)**, issue 2, 323–335 (2017). (In Russian)

Received: August 16, 2018
Revised: September 3, 2018
Accepted: September 27, 2018

Author’s information:

Petr E. Tovstik — peter.tovstik@mail.ru

ХРОНИКА

10 октября 2018 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН выступили кандидат физ.-мат. наук, доцент А. С. Кулешов и студентка В. А. Катасонова (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва) с докладом на тему «О существовании лиувиллевых решений в задаче о качении тела вращения по сфере».

Краткое содержание доклада:

Рассматривается задача о качении без проскальзывания динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной сфере. Предполагается, что силы, приложенные к твердому телу, имеют равнодействующую, приложенную к центру масс G тела, направленную к центру O опорной сферы, и зависящую только от расстояния между точками G и O. В этом случае решение задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии. С помощью алгоритма Ковачича доказано существование лиувиллевых решений в задаче о качении по сфере неоднородного динамически симметричного шара.